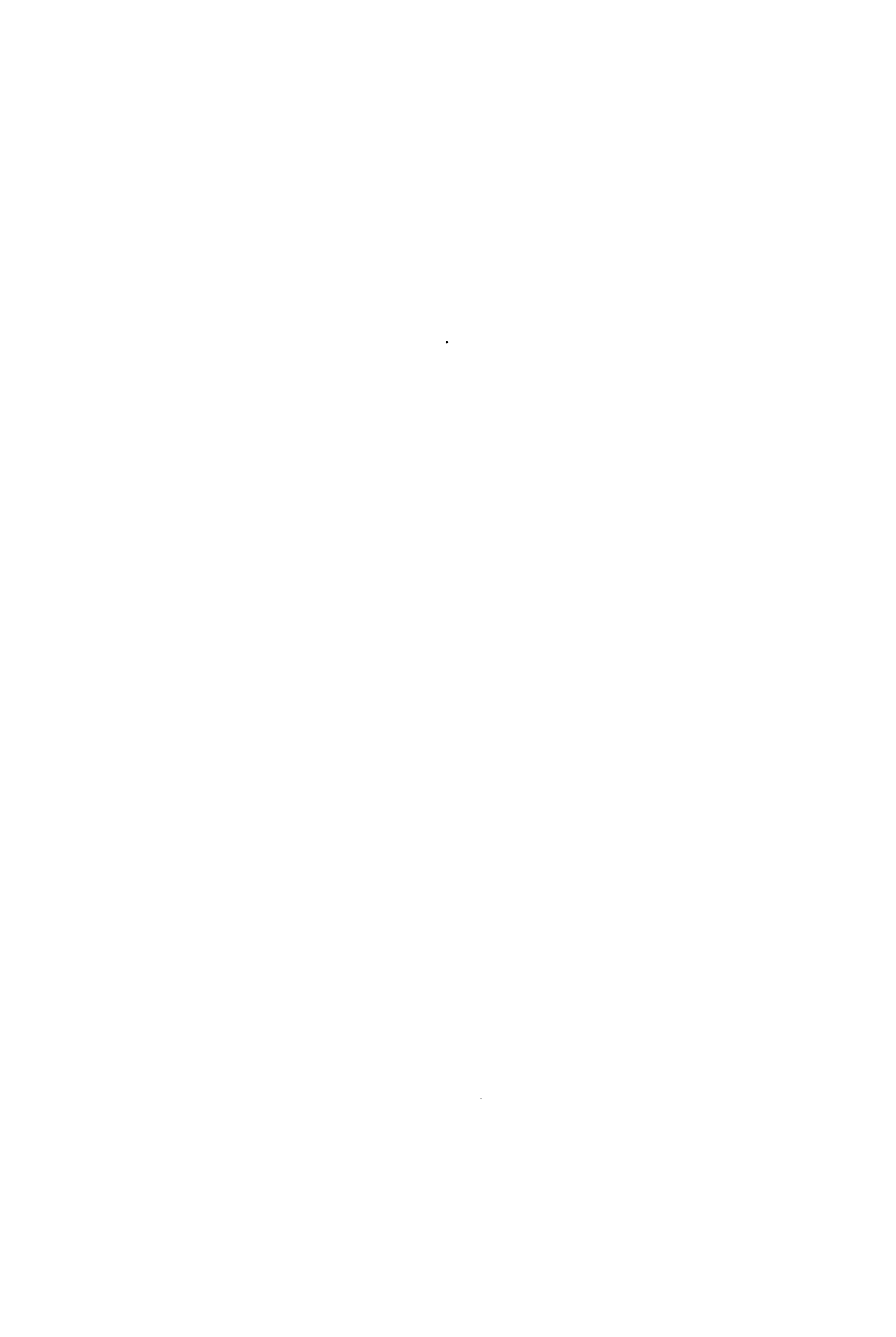








Jahrbuch

über die

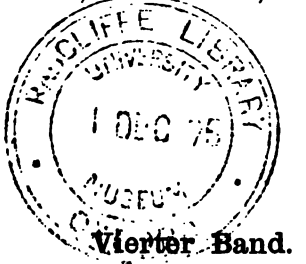
Fortschritte der Mathematik

im Verein mit anderen Mathematikern

herausgegeben

von

Carl Ohrtmann, Felix Müller, Albert Wangerin.



Vierter Band.

Jahrgang 1872.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1875.



Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu der der Band gehört.

Altpr. Monatsschr.: Altpreussische Monatsschrift. Der neuen preussischen Provinzialblätter vierte Folge. Herausgegeben von R. Reiche und E. Wiechert. Königsberg i. Pr. 8.

Ann. de Belg.: Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 12.

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'école normale supérieure publiées sous les auspices du ministre de l'instruction publique par Mr. Le Pasteur. Paris. 4.

Ann. d. Mines: Annales des Mines. Paris. 8.

Ann. d. P. et Ch.: Annales des Ponts et des Chaussées. Paris. 8.

Ann. d. R. M. I. d. Torino: Annali delle Reale Museo Industriale di Torino. Torino.

Ann. d. Un. Tosc.: Annali delle Università Toscane. Pisa.

Arch. Néerl.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem. La Haye. 8.

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten begründet von H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona. 4.

Astr. Viert.: Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft herausgegeben von C. Bruhns. Leipzig. 8.

Att. d. Acc. P. d. N. Linc.: Atti della Accademia Pontifica dei Nuovi Lincei. Roma.

Att. d. Acc. R. d. Linc.: Atti della Accademia Reale dei Lincei. Roma.

Att. d. R. Ist. Ven.: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vinezia.

Att. d. Torino: Atti della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino.

Battaglini G.: Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicata per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8.

Ber. d. Böhm. V.: Bericht des Vereins Böhmischer Mathematiker. Prag. 8.

Berl. Abh.: Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4.

Berl. Monatsber.: Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8.

Boncompagni Bull.: Bulletino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicata da B. Boncompagni. Roma. 4.

Borchardt J.: Journal für reine und angewandte Mathematik. Als Fortsetzung des von A. L. Crelle gegründeten Journals, herausgegeben unter Mitwirkung der Herren Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass von C. W. Borchardt. Berlin. 4.

Brioschi Ann.: Annali di Matematica pura ed applicata diretti da F. Brioschi e L. Cremona in continuazione degli Annali gia pubblicati in Roma da Prof. Tortolini. Milano. 4.
Bull. de Belg.: Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique. Bruxelles. 8.
Bull. de Moscou.: Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou. Moscou. 8.
Bull. de St. Pét.: Bulletin de l'Académie Impériale de St. Pétersbourg. Pétersbourg et Leipzig. Folio.
Carl Repert.: Repertorium für Experimental-Physik herausgegeben von Dr. Ph. Carl. München. gr. 8.
Casopis: Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8.
Clebsch Ann.: Mathematische Annalen herausgegeben von A. Clebsch und C. Neumann. Leipzig. 8.
C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4.
Darboux Bull.: Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, rédigé par G. Darboux. Paris. 8.
Educ. Times: Mathematical Reprint of the Educational Times. London. 8.
Forh. af Christ.: Forhandlingar i Videnskabs Selskabet i Christiania. Christiania. 8.
Giebel Z.: Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften, herausgegeben von dem naturwissenschaftlichen Vereine für Sachsen und Thüringen in Halle, redigirt von F. Giebel. Halle. 8.
Gött. Abh.: Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4.
Gött. Anz.: Göttingische gelehrte Anzeigen. Unter der Aufsicht der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften. Göttingen. 12.
Gött. Nachr.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen. Göttingen. 12.
Grunert Arch.: Archiv für Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Unterrichtsanstalten herausgegeben von J. A. Grunert. Greifswald. 8.
Handl. Stockholm: Kgl. Svenska Vetenskaps Akademiens Handlingar. Stockholm. 4.
Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. 8.
Jaarb. v. Amst.: Jaarbock van de koninkligke Akademie van Wetenschapen. Amsterdam.
Il Nuovo Cimento: Il nuovo Cimento, Giornale di fisica, dí chimica e scienze affini da C. Matteucci, R. Piria, G. Meneghini. Torino e Pisa. 8.
J. d. l'Éc. Pol.: Journal de l'école impériale polytechnique publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris. 4.
J. Phil. d. Moscou.: Journal de la Société Philomatique de Moscou. Moscou.
Inst.: L'Institut, Journal universel des sciences et des sociétés savantes en France et à l'étranger. Première section. Sciences mathématiques, physiques et naturelles. Paris. 4.
Leipz. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig. gr. 8.
Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Klasse. Leipzig. 8.

Liouville J.: Journal de Mathématiques pures et appliquées ou Recueil mensuel des mémoires sur les diverses parties de mathématiques, par J. Liouville. Paris. 4.

Lunds Un. Års.: Lunds Universitets-Årsskrift.

Marb. Ber.: Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. Marburg. 8.

Mél. math. et astr.: Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. Leipzig. Petersburg. 8.

Mém. de Belg.: Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des Sciences de Belgique. Bruxelles. 4.

Mem. di Bologna: Memorie dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4.

Mém. de Bordeaux: Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux. Paris. Bordeaux. 8.

Mem. d. Ist. Lomb.: Memorie del Reale Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti. Milano. gr. 8.

Mém. de Kasan: Mémoires de l'Université de Kasan. Kasan.

Mem. of Manch.: Memoirs of the litterary and philosophical society of Manchester. Manchester.

Mém. de Paris: Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France. Paris. 4.

Mem. of R. Astr. Soc.: Memoirs of the Royal Astronomical Society. London. 4.

Mém. d. l. S. R. de Liège: Mémoires de la Société Royale de Liège.

Mém. d. l. S. Ph. de Moscou: Mémoires de la Société Philomatique de Moscou. Moscou. 8.

Mém. de St. Pét.: Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. St. Pétersbourg. 4.

Mem. di Torino: Memorie dell' Accademia delle scienze di Torino. Torino.

Mem. di Vinez.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vinezia.

Messenger: The Messenger of Mathematics, edited by M. Allen Whitworth, C. Taylor, R. Pendlebury, J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan. 8.

Mondes: Les Mondes, revue hebdomadaire des sciences et de leur application aux arts et à l'industrie par l'Abbé Moigno. Paris. 8.

Monthl. Not.: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London. 4.

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Baierschen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München.

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Baierschen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8.

Nov. Act. Ups.: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Upsala. 4.

Nouv. Mém. de Belg.: Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique. Bruxelles. 8.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par Gerono et Bourget. Paris. 8.

Nyt Mag.: Nyt Magazin for Naturvidenskaberne, ved Sars og Kjerulf. Christiania. 8.

Öfv. af Forh. Stockh.: Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar. Stockholm.

Overs. v. Kopenh.: Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlingar. Af J. J. S. Steenstrup. Kopenhagen.

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science, by Brewster, Kane, Francis. London. 8.

Pogg. Ann.: Annalen der Physik und Chemie herausgegeben zu Berlin von Poggendorff. Leipzig. 8.
Polyt. Tidsskr.: Polyteknisk Tidsskrift. Christiania.
Prag. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 4.
Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8.
Proc. of Edinb.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8.
Proc. of L. M. S.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8.
Proc. of London: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8.
Proc. of Manch.: Proceedings of the litterary and philosophical Society of Manchester. Manchester.
Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied mathematics. Edited by Sylvester and Ferrers. London. 8.
Rend. di Bologna: Rendiconti delle sessioni dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4.
Rend. d. Ist. Lomb.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8.
Rend. di Napoli: Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. Napoli.
Report of the Brit. Ass.: Report of the meeting of the British Association for the advancement of scienze. London. 8.
Rübezahl: Rübezahl. Schlesische Provinzialblätter. Neue Folge. Breslau.
Schlömilch Z.: Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter der verantwortl. Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor. Leipzig. 8.
Skrift. v. Kopenh.: Det Kongl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter Naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling. Kopenhagen.
Sybel Hist. Z.: Sybel, Historische Zeitschrift.
Trans. of Cambridge: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge.
Trans. of Dublin: Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin.
Trans. of Edinb.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh.
Trans. of London: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4.
Verh. d. Ak. d. Wet. Amst.: Verhandlingen der Kongl. Akademie de Wetenschapen. Amsterdam.
Verh. d. Vereins z. Bef. d. Gew. i. Pr.: Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen. Berlin. 4.
Versl. en Mededeel.: Verslagen en Mededeelingen d. Kongl. Akademie van Wetenschapen to Amsterdam. Amsterdam.
Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathem.-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abtheilung. Wien. 8.
Wien. Denkschr.: Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien.
Wolf J.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8.
Z. dtsch. Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure herausgegeben von Ziebarth. Berlin. 4.
Zeuthen Tidsskr.: Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af Zeuthen. Kopenhagen. 8.

Inhaltsverzeichniss.

(Die mit einem † bezeichneten Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Capitel 1. Geschichte.

Capitel 2. Philosophie.

Seite

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Capitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen).

Capitel 2. Theorie der Formen.

Capitel 3. Elimination und Substitution, Determinanten, Invarianten, Covarianten, symmetrische Functionen.

Dritter Abschnitt. Zahlentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Theorie der Formen und Kettenbrüche.

Vierter Abschnitt. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

Seite

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

Capitel 3. Integralrechnung.

Capitel 4. Bestimmte Integrale.

Capitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Capitel 7. Variationsrechnung.

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Functionen.

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1. Principien der Geometrie.

Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen (analysis situs).

Capitel 3. Elementare Geometrie. (Planimetrie. Trigonometrie. Stereometrie).

Seite

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Ebene Gebilde.

B. Räumliche Gebilde.

C. Geometrie der Anzahl.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Coordinaten.

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

B. Theorie der algebraischen Curven.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

D. Andere specielle Curven.

Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

D. Andere specielle Raumgebilde.

Capitel 4. Liniengeometrie. (Complexe, Strahlensysteme).

Capitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformation, Abbildungen.

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.)

Capitel 2. Kinematik.

Capitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

B. Hydrostatik.

Capitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

B. Hydrodynamik.

Capitel 5. Potentialtheorie.

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Capitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

Capitel 2. Akustik und Optik.

Capitel 3. Electricität und Magnetismus.

Capitel 4. Wärmelehre.

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1. Geodäsie.

Capitel 2. Astronomie.

Anhang.

Verzeichniss

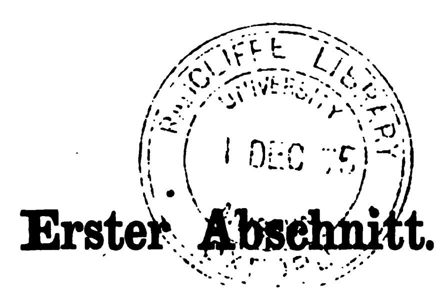
der Herren, welche für den vierten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate).

Herr	Dr. August in Berlin.	A.
-	Prof. Björling in Lund.	Bg.
-	Prof. Boltzmann in Wien.	Bn.
-	Prof. Brill in Darmstadt.	Bl.
-	Dr. Bruns in Dorpat.	B.
-	Prof. J. Casey in Dublin.	Csy.
-	Prof. Cayley in Cambridge.	Cly.
-	Curtze in Thorn.	Ce.
-	Prof. Frobenius in Berlin.	Fs.
-	Prof. Glaisher in Cambridge.	Glr.
-	Dr. Günther in München.	Gr.
-	Dr. Hamburger in Berlin.	Hr.
-	P. C. V. Hansen in Kopenhagen.	Hn.
-	Prof. Henrici in London.	Hi.
-	Prof. Hoppe in Berlin.	H.
-	Prof. Jung in Mailand.	Jg.
-	Prof. Klein in Erlangen.	Kln.
-	Prof. Korkine in Petersburg.	Ke.
-	Dr. Kretschmer in Posen	K.
-	Prof. Lie in Christiania.	L.
-	Prof. Mansion in Gent.	Mn.
-	Prof. A. Mayer in Leipzig.	Mr.
-	Dr. Maynz in Ludwigslust.	Mz.
-	Dr. Felix Müller in Berlin.	M.
-	Dr. Netto in Berlin.	No.
-	Prof. C. Neumann in Leipzig.	Nn.
-	Dr. Oberbeck in Berlin.	Ok.
-	Dr. Ohrtmann in Berlin.	O.
-	Panzerbieter in Berlin.	Pr.
-	Dr. Scholz in Berlin.	Schz.
-	Dr. Schubert in Hildesheim.	Scht.
-	Dr. Schumann in Berlin.	Schn.
-	Prof. Stolz in Innsbruck.	St.
-	Prof. Sturm in Darmstadt.	Sm.
-	Dr. Teichert in Freienwalde a. O. (†).	T.
-	Dr. Wangerin in Berlin.	Wn.
-	Prof. Em. Weyr in Prag.	W.
-	Dr. Wittstein in München.	Wtn.
-	Prof. Zolotareff in Petersburg.	Z.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Dr. C. Ohrtmann, Berlin SW., Markgrafenstr. 78. III.



Erster Abschnitt.

Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.

Geschichte.

. Friedlein. Beiträge zur Geschichte der Mathematik, II. Pr. Hof. Recens. dazu v. M. Cantor. Schlömilch Lit. Z. XVII. 105-110.

Die Beiträge enthalten Studien über die Geometrie der Griechen vor Euklides. Cantor hat richtig als Hauptresultat der Arbeit herausgehoben die beiden Sätze: 1) „Die Aegypter besassen eine mystische Geometrie, von welcher die griechischen Denker sich mächtig angezogen fühlten"; 2) „Die Aegypter beachteten den Winkel als solchen und seine Eigenschaften noch nicht, erst den Griechen und zunächst Thales verdankt die Wissenschaft diese Kenntniss." Er hat in seiner Recension gewichtige Gründe gegen die Resultate Friedlein's beigebracht; dieselben werden durch die Veröffentlichung des Rhind'schen Papyrus, die nahe bevorsteht, wesentlich verstärkt werden. Ce.

F. W. C. Gensler. Die thebanischen Tafeln stündlicher Sternaufgänge aus den Gräbern der Könige Ramses VI. und Ramses IX. für die 24 halbmonatlichen Epochen des Jahres 1262/61 v. Chr. Leipzig. Hinrichs.

Ce.

Th. H. Martin. Hypothèse astronomique de Pythagore. Boncompagni Bull. V. 99-126.

Die Abhandlung bildet das Capitel IV. einer „Histoire des hypothèses astronomiques chez les Grecs et les Romains“, welche der Verfasser vorbereitet. Seine Resultate sind folgende: Nach Pythagoras steht 1) die Erde unbeweglich im Mittelpunkte der Welt. 2) Um sie drehen sich die Planeten in der Ordnung: Saturn, Jupiter, Mars, Venus, Merkur, Sonne, Mond und endlich der Fixsternhimmel. 3) Er kannte wenigstens theilweise die Ungleichheit der Planetenbewegungen. 4) Er führte in Griechenland die Kenntniss der Kugelgestalt der Erde und der Eigenbewegung der Planeten von Westen nach Osten in schiefem Kreise gegen den Himmelsäquator ein. Alle übrigen dem Pythagoras zugeschriebenen Kenntnisse sind fälschlich von seinen Schülern und Nachfolgern auf ihn übertragen worden. Ce.

Th. H. Martin. Hypothèse astronomique de Philolaus Boncompagni Bull. V. 127-157.

Capitel VI. der obenerwähnten unvollendeten Schrift des Verfassers. Dasselbe lässt alle Nachrichten der Alten über das System des Philolaus und seiner Schüler Revue passiren, und kommt in letzter Instanz auf die Resultate Böckh's zurück, die dieser in den vielfachen Abhandlungen, welche er dem Philolaus gewidmet, veröffentlicht hat. Die Resultate desselben sind nach Martin in Deutschland allgemein anerkannt, während in Frankreich die falschen Ansichten noch immer als wahr gelehrt werden. Ce.

M. Cantor. Euclide e il suo secolo. Saggio storico matematico. Traduzione di G. B. Biadego. Boncompagni Bull. V. 1-64.

G. B. Biadego. Note. Boncompagni Bull. V. 65-74.

Die Schrift Cantors erschien zuerst 1867 im Supplementheft von Schlömilch's Zeitschrift und als Separatabdruck. Sie behandelt Euklid und seine Zeitgenossen, vorzugsweise Archimedes und Apollonios. Sie giebt ein anschauliches Bild ihres Lebens,

soweit dasselbe bekannt ist, und ihrer Werke; sie zeigt den Standpunkt in der Entwickelung der Mathematik, auf dem die behandelten Schriftsteller sich befinden, und wie sich diese unter einander in stetigem Fortschritte verknüpfen. Die beweisenden, zum Theil erläuternden Anmerkungen sind am Ende vereinigt. Der Uebersetzer, Herr Biadego, hat aus andern nach 1867 erschienenen Schriften vorzugsweise aus Bretschneider: „Die Geometrie und die Geometer vor Euklides“ in 14 Noten einige Punkte der Abhandlung Cantor's weiter ausgeführt. Ce.

C. J. GEHRHARDT. Der Sammlung des Pappus von Alexandrien siebentes und achtes Buch. Griechisch und Deutsch. Halle. Schmidt. 1871.

Zum ersten Male erscheint hier der Urtext der beiden Bücher des Pappos, von denen bis jetzt nur der Abschnitt über das Porisma veröffentlicht war. Wo der Herausgeber seinen Text her hat, welchen Werth und welches Alter die benutzten Handschriften besitzen, das sind Räthsel, welche der Herausgeber dem Leser aufgiebt, da auch nicht ein Wort einer Einleitung beliebt ist. Die Uebersetzung scheint treu und doch nicht sclavisch zu sein. Ce.

A. SCHWARZ. Der jüdische Kalender historisch und astronomisch untersucht. Breslau. Schletter. Ce.

J. A. M. MENSINGA. Ueber alte und neuere Astrologie. Berlin. Lüderitz. 1871.

Der Verfasser sucht die Frage zu entscheiden, worauf die Astrologie als Grundlage basire. Er sucht sie aus den Religionsansichten, nicht aus Mystik zu erklären, und führt ihren Ursprung auf die Chaldäer zurück, indem er die Uebereinstimmung der Grundprincipien mit der Religion derselben zeigt. Er setzt weiter auseinander, dass die Astrologie sich völlig rationell (auf den falschen Grundlagen) entwickelt habe und deshalb wohl sogar auf den Namen „Wissenschaft“ Anspruch machen könne, und unterzieht dann den Unterschied zwischen alter und neuerer Astrologie einer andeutungsweisen Betrachtung. O.

L. AM. SÉDILLOT. Sur quelques points de l'histoire de l'astronomie ancienne et en particulier sur la précession des équinoxes. Lettre à D. B. Boncompagni. Boncompagni Bull. V. 306-317.

Eine Kritik derjenigen Stellen aus den Werken Th. H. Martin's, in denen von der Präcession der Nachtgleichen bei den Alten gesprochen wird, vorzugsweise veranlasst durch Prioritätsansprüche. Der Verfasser spricht den Indiern jeden Einfluss auf die Untersuchung dieser Erscheinung ab; alle Rechnungen, die man bei denselben finde, seien untergeschoben, erst nach Christi Geburt gemacht und auf griechischen Ursprung zurückzuführen. Ganz Aehnliches behauptet er von der chinesischen Astronomie. Seitenhiebe gegen die deutsche Wissenschaft der vergleichenden Sprachforschung fehlen nicht. Ableitungen wie Sanscrit = Sanct-um Script-um kritisiren sich selbst. Ce.

B. BONCOMPAGNI. Sulle scienze occulte nel medio evo e sopra un codice della famiglia speciale, discorso letto all' Accademia di scienze e lettere in Palermo dal Sac. Isidoro Carini. Palermo. Perino. Boncompagni Bull. V. 543-544.

Anzeige des oben bezeichneten Buches durch Herrn Boncompagni mit Hervorhebung der interessantesten in demselben angeführten und beschriebenen Schriften. O.

M. STEINSCHNEIDER. Vite di matematici Arabi tratte da un' opera inedita di Bernardino Baldi con note. Boncompagni Bull. V. 427-534.

Herr Boncompagni besitzt in seiner Bibliothek 3 Manuscripte des bisher noch unedirten Werkes: „De le vite de' matematici" von Bernardino Baldi (geb. d. 5. oder 6. Juni 1553 zu Urbino, gest. den 10. October 1617). Herr Steinschneider veröffentlicht mit Erlaubniss des Herrn Boncompagni in vorliegender Arbeit 14 Artikel desselben, die er mit zahlreichen und eingehenden Notizen literarischen nnd historischen Inhalts versehen hat. Der erste Abschnitt ist überschrieben: Autori Arabi Orientali (Se-

coli IX. — XII.) und behandelt: Messala, Alfragano, Alchindo, Albumasaro, Tebitte, Albategno, Almansore; der zweite Abschnitt trägt den Titel: Autori Egiziani, Mauritani e Spagnuoli (Secoli IX). In ihm werden besprochen: Alhazeno, Ali Abenrodano, Punico, Ali Abenragele, Arzahele, Gebro, Alpetragio. Leider gestattet der hier erlaubte Raum ein näheres Eingehen nicht und müssen wir daher auf die Arbeit selbst verweisen. O.

H. HANKEL. Storia delle matematiche presso gli Arabi. Traduzione dal Tedesco del Sign. Filippo Keller. Boncompagni Bull. V. 343-401.

Die Arbeit zerfällt in zwei Theile. Im ersten Theil werden die Mathematiker und Astronomen, welche unter den Arabern die Mathematik gefördert haben, chronologisch geordnet besprochen. Dieser Theil enthält hauptsächlich biographische Notizen. Nach einigen einleitenden historischen Worten bespricht das erste Capitel die Einführung der Astronomie bei den Arabern. Im zweiten Capitel werden die arabischen Uebersetzungen griechischer mathematischer Autoren behandelt. Die beiden folgenden Capitel betrachten das 9te und 10te und 11te Jahrhundert, während sich der Verfasser im 5ten Capitel nach Spanien wendet, und im 6ten zum Schluss den Orient vom 13ten bis 16ten Jahrhundert in den Bereich seiner Besprechung zieht. Der 2te wissenschaftliche Theil (Cap. 7—15) behandelt die einzelnen Disciplinen der Mathematik für sich. Zunächst werden die Zahlzeichen besprochen, dann folgen die elementare Arithmetik, die Algebra, die theoretische Arithmetik und unbestimmte Analysis, die Geometrie, an welche sich die Construction der cubischen Gleichungen schliesst, endlich die Trigonometrie und die trigonometrischen Tafeln. O.

L. AM. SÉDILLOT. Lettre à D. B. Boncompagni au sujet d'une note de M. Th. Henri Martin. Boncompagni Bull. V. 294-296.

Richtet sich gegen die im 3ten Bande dieses Jahrbuchs p. 3 erwähnten „Quelques mots de réponse à M. Sédillot" von Th. H. Martin, und ist rein persönlicher Natur. Ce.

SCHANZ. Der Cardinal Nicolaus von Cusa als Mathematiker. Tübingen. Fues.

Ce.

A. KNOETEL. Die schlesische Abstammung des Nikolaus Kopernikus. Rübezahl (2) XI. 285-291; 334-339.

Nach dem ältesten Thorner Schöppenbuch ist der Stammort der Familie Koppernick Frankenstein in der Grafschaft Glatz. Der Verfasser zeigt nun, dass in alter Zeit in der Nähe von Frankenstein ein Ort Koppirnik gelegen war — jetzt Köppriche —, von dem also der Name stammen dürfte. Er zeigt ferner, dass die ältesten Koppirnik's, die in Thorn auftraten, Kupferschmiede waren, dass der Vater des Astronomen mit Kupfer handelte (nach Danziger Archivalien); er spricht die Vermuthung aus, — die sich durch neuere Nachforschungen glänzend bestätigt hat, und nicht nur für das Frankensteiner Köppernick — dass in Köppernick Kupfer gegraben wurde, und leitet daraus den Namen ab, indem er Koppirnick als ein Mischwort aus Koppir = Kupfer und der polnischen Ableitungssilbe nik annimmt, wie in Krakau der Kürschner noch heute Futer-nik, d. h., der sich mit Pelz beschäftigt, heisst, und weist daher die Ableitung von dem polnischen Worte Koper = Dillkraut, der die älteste urkundliche Form Koppirnik mit ihrem i und Doppel-p schon entgegensteht, zurück.

Ce.

R*** (ROMER). Beiträge zur Beantwortung der Frage nach der Nationalität des Nicolaus Copernicus. Breslau. Priebatsch.

L. PROWE. Zum Streit über die Nationalität des Copernicus. Sybel Hist. Zeitschr. XXVIII. 367-372.

M. P(ERLBACH). Recension der Beiträge. Altpr. Monatsschr. IX. 347-357.

M. CURTZE. Recension der Beiträge. Grunert Arch. LIV. Litb. CCXV. 6-9.

Die Schrift Romer's will beweisen, dass Copernicus nach Vaterland, Familie, Namen und politischer Denk- und Handlungs-

weise ein Pole ist, im Gegensatz zu Prowe, den er persönlich in massloser Weise angreift und beschimpft. Die Arbeit ist fleissig zusammengestellt, ihr fehlt aber doch, wie Perlbach hervorhebt, die Kenntniss der neuesten deutschen Forschungen zur Geschichte Preussens. Was sie beweisen will, beweist sie nur dem, der nichts weiteres gelesen hat als sie selbst. Alles, was dem Verfasser unbequem ist, ignorirt er einfach oder verdreht es; es kommt ihm auch auf ein — gelinde gesagt — Ableugnen von Thatsachen nicht an, deren Folgerungen er sich aber in seiner Weise zu Nutzen macht.

Die hauptsächlichsten Fälschungen deckt Prowe in seiner Besprechung auf; auf einzelne Widersprüche hat auch Curtze hingewiesen. Perlbach steht zu sehr ausserhalb der Copernicanischen Forschungen, als dass es ihm möglich gewesen wäre, den Hauptsachen für diese Frage nachzugehen; seine Recension dreht sich um Punkte, die für den Streit um die Nationalität zu den untergeordnetsten gehören. Bewiesen ist durch die Schrift Romer's für seinen Zweck nichts. Ce.

H. Zeissberg. Zu Albert v. Brudzewo, dem Lehrer des Copernicus. Altpr. Monatsschr. IX. 377.

Aus einem Bande, der früher dem Brudzęski angehörte, giebt der Verfasser Notizen über diesen angeblichen Lehrer des Copernicus. Danach ist er 1468 zur Universität gegangen, 1470 zum Baccalaureus promovirt, 1474 zum Magister; 1476 ist er in der Bursa Ungarorum in das Collegium minus berufen und 1490 zum Baccalaureus der Theologie promovirt worden. Der Nachweis, dass nicht Brudzeski der Lehrer des Copernicus gewesen, ist nicht von R*** geführt (s. oben) sondern von Prof. Karliński in Krakau, den R***, ohne seine Quelle zu nennen, ausgeschrieben hat. Ce.

M. Curtze. Ueber die Originalhandschrift des Copernicanischen Hauptwerkes: „De revolutionibus orbium coelestium libri VI." Altpr. Monatsschr. IX. 187-189.

M. CURTZE. Die Originalhandschrift des Copernicanischen Hauptwerkes: „De Revolutionibus“ und die Neuausgabe desselben durch den Copernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst zu Thorn. Grunert Arch. LIV. Litt. Ber. CCXVI. 1-7.

Das erste ein kurzer Auszug, das zweite der Abdruck des Berichtes, der von dem Verfasser über seine Collation der Originalhandschrift des Copernicus seinen Auftraggebern erstattet ist.

Ce.

F. HIPLER. Analecta Warmiensia. Studien zur Geschichte der ermländischen Archive und Bibliotheken. Braunsberg. Peter.

Enthält auf S. 119—123 Nachrichten über Bücher, welche Copernicus einst besessen hat, nebst Mittheilung einiger der Notizen, welche darin von des Copernicus Hand eingezeichnet sind, zum Theil falsch gelesen und unvollständig. Ce.

A. M. Recension dazu. Altpr. Monatsschrift IX. 666-672.

Ce.

E. FASBENDER. Die Kopernikanischen Sehnen- und Dreiecksberechnungen. Pr. Thorn.

Eine geschickte Darstellung der wichtigen Capitel 12 und 13 des ersten Buches der Revolutiones des Copernicus in der Sprache unserer Mathematik, aber ohne Einführung der trigonometrischen Functionen als solche. Es soll durch die kleine Arbeit gezeigt werden, mit welchen Schwierigkeiten Copernicus zu kämpfen hatte bei Bewältigung von Problemen, welche die neuere Mathematik durch eine kurze Formel erledigt. Ce.

G. GOVI. Il S. Offizio, Copernico e Galileo, a proposito di un opusculo postumo del P. Olivieri sullo stesso argomento. Atti di Torino VII. 565-590, 808-838.

Der Dominikaner P. Tommaso Bonora hat ein Buch veröffentlicht: „Di Copernico e di Galileo scritto postumo del

P. Maurizio Benedetto Olivieri Ex-generale dei Dominicani e Commissario della Santa Romana ed universale Inquisizione, ora per la prima volta messo in luce sull' autografo per cura di un religioso dello stesso istituto. Bologna 1872 un vol. in 8°." Der Verfasser bekämpft Olivieri und weist die Argumente desselben eingehend zurück. Jg. (O.)

M. CHASLES. Sur l'ouvrage de M. G. Govi intitulé: Il S. Offizio, Copernico e Galileo, a proposito di un Opuscolo postumo del P. Olivieri sullo stesso argomento. C. R. LXXV. 893-894.

Chasles giebt bei Ueberreichung des Buches im Namen des Verfassers einen kurzen Ueberblick über den Inhalt desselben.
Ce.

E. WOHLWILL. Zum Inquisitionsprocess des Galileo Galilei. Schlömilch Lit. Z. XVII. 1-31, 81-98.

G. FRIEDLEIN. Zum Inquisitionsprocess des Galileo Galilei. Schlömilch Lit. Z. XVII. 41-45.

G. FRIEDLEIN. Factische Berichtigung. Schlömilch Lit. Z. XVII. 112-113.

Im zweiten Bande der Fortschritte p. 11 ist die Schrift des Herrn Wohlwill über den Inquisitionsprocess des Galileo Galilei, sowie die Recension derselben von G. Friedlein besprochen worden. Herr Wohlwill sucht in der ersten der oben citirten Arbeiten die Ansichten des Herrn Friedlein, namentlich auf Grund der an derselben Stelle und auch Bd. III. p. 8 erwähnten Gherardi'schen Publication zu widerlegen. Daran schliessen sich die übrigen Arbeiten als Erwiderung und Gegenerwiderung. Der Ton in denselben wird je länger desto leidenschaftlicher und persönlicher, persönlicher als in einer wissenschaftlichen Streitfrage erlaubt scheint. Referent glaubt daher nicht näher auf dieselbe eingehen zu dürfen, um so mehr, da der Streit resultatlos verläuft, insofern wenigstens resultatlos, als beide Herren bei ihrer ursprünglichen Meinung bleiben. Eines Urtheils über die

Sache selbst glaubt sich Referent, bei dem Charakter des Jahrbuchs, enthalten zu müssen. O.

J. v. Hasner. Tycho Brahe und J. Kepler in Prag. Eine Studie. Prag. Calve.

Auf unedirte Urkunden basirende Darstellung des Aufenthaltes Tycho's und Kepler's in Prag. Der Verfasser zeigt darin auch die Unbegründetheit der Nachricht, dass Kepler in dürftigen Verhältnissen gelebt habe. Das Buch ist für die Geschichte Kepler's und die seiner Arbeiten von hohem Werthe. Ce.

K. Goebel. Ueber Kepler's astronomische Anschauungen und Forschungen. Ein Beitrag zur Entdeckungsgeschichte seiner Gesetze. Halle. Waisenhaus.

Ce.

L. F. Ofterdinger. Zum Andenken an Johannes Kepler. Rede. Ulm. Ling.

Ein kurzer Abriss des Lebens Kepler's und der Entdeckung der drei Kepler'schen Gesetze, anknüpfend an die mancherlei Andenken an Kepler, welche die Stadt Ulm bewahrt. Ce.

J. Rogner. Ueber Johannes Kepler's Leben und Wirken. Graz. Leuschner und Lubensky. Grunert Arch. LIV. 447-458.

Eine anregend geschriebene Biographie des Gefeierten mit besonderer Betonung seines Aufenthaltes als steiermärkischer Landschaftsmathematiker zu Graz. Ce.

C. G. Reuschle. Kepler und die Astronomie. Zum Dreihundertjährigen Jubiläum von Kepler's Geburt am 27. December 1571. Frankfurt a. M. Heyder u. Zimmer. 1871.

Diese wichtige nnd umfassende Arbeit zerfällt in drei Theile. Der erste: „das welthistorische Zeitalter der Astronomie“ überschrieben, behandelt den Zustand der Astronomie, in den Coper-

nicus, Kepler und Newton sie gesetzt, nachdem der Zustand vor diesen näher dargelegt ist. Der zweite Theil mit der Ueberschrift „Ein Bild von Kepler in Worten“ giebt eine Darstellung seiner Lebensverhältnisse seiner Zeit und seiner Werke. Der dritte Theil endlich, „Dreihundert Jahre nach Kepler's Geburt“ handelt über den Zustand der Astronomie im 19[ten] Jahrhundert und das Gedächtniss Kepler's in demselben. Ce.

R. Wolf. Johannes Kepler und Jost Bürgi. Vortrag. Zürich, Schulthess.

Eine kurze Darstellung des Lebenslaufes und der Entdeckungen Kepler's und Bürgi's, eines der Gehilfen Kepler's in Prag, und eines der Erfinder der Logarithmen. Dass Bürgi auch selbstständig eine noch heute existirende Pendeluhr construirte, hat der Verfasser später in seinen astronomischen Mittheilungen bewiesen. Ce.

W. Förster. Johann Kepler. Berlin, Lüderitz.

Eine Darstellung des gesammten Entwickelungsganges der Astronomie von den ältesten Zeiten bis auf Kepler; eine Darlegung der Gründe, weshalb dieser nicht anders stattfinden konnte, als die Geschichte ihn giebt. Ce.

C. Bruhns. Einige Notizen über Kepler. Leipz. Ber. XXIV. 31-49.

Im Vorliegenden berichtet der Verfasser über einige auf Kepler sich beziehende, bisher ungedruckte Schriften. Im ersten Actenstücke, einem von dem Kurfürsten Christian an seinen Kammermeister gerichteten Schreiben (ausgestellt zu Unnaburg am 27. Januar 1607), findet sich nur ein kurzer, Kepler betreffender Passus, wo nämlich von der Bewilligung eines Geschenkes von 20 Thalern für die dem Kurfürsten übersandte Abhandlung: „Stella nova in pede serpentarii etc.“ die Rede ist. Das zweite Document: „Joannis Kepleri S. C. Mt. Mathematici judicium de praecedentibus scriptis Sethi Calvisii et D. Joestelii“ ein Gutachten, das Kepler über die eine Verbesserung des alten Kalenders an-

strebenden Arbeiten von Sethus Calvisius, Cantor an der Thomasschule zu Leipzig, und Dr. Jöstel aus Meissen abgab, wird hier eingehend besprochen, und am Schlusse im Originaltext vollständig mitgetheilt. Drittens wird ein, bereits vollständig in dem Werke des Herrn von Weber: „Aus vier Jahrhunderten“, neue Folge, 2. Band (S. 27) zur Publication gelangter Brief Kepler's aus Prag an den Kurfürsten Georg I. (datirt vom 29. Februar 1628) angeführt, der als Begleitschreiben zu einem gleichzeitig übersendeten Exemplare seiner Rudolphinischen Tafeln dient. Schliesslich hat der Herr Verfasser seinem Aufsatze noch ein Albumblatt beigefügt, das eines Theils als Facsimile der Handschrift Kepler's interessant ist, andern Theils aber auch sein treffendes Urtheil über den damaligen Stand der Chemie beweist. Wtn.

L. F. Ofterdinger. Discurs, welcher Gestalt allerhand Ulmische Maasssachen in einander zu verknüpfen und zu conserviren sein möchten, von Johannes Kepler. Ulm. Walter.

Die Arbeit besteht aus zwei getrennten Theilen. Im ersten Theile sucht der Verfasser die Annahme fester zu begründen, dass der eigentliche Verfasser des 5ten Buches des Euklides Eudoxos von Knidos sei. Im zweiten giebt er nach dem Originalmanuscript die Arbeit Kepler's über die Ulmischen Maasssachen heraus, von dem er eine Analyse in dem auf S. 10 des 2ten Bandes dieses Jahrbuches erwähnten Schriftchen ab. Ce.

L. F. Ofterdinger. Ein Manuscript Kepler's. Tübingen. Fues.

J. Kepleri Opera omnia. Herausgegeben von Ch. Frisch. Vol. VIII. Frankfurt. Heyder u. Zimmer.

R. Peinlich. Die steierischen Landschaftsmathematiker vor Kepler. Graz. Leuschner und Lubensky, auch Grunert Arch. LIV. 470-492.

Handelt von den beiden Mathematikern, welche vor Kepler das Amt eines Landschaftsmathematikers von Steiermark inne hatten. Dies Amt war nichts weiter als das eines Kalender-

machers für genanntes Land. Der erste Inhaber der Stelle war M. Hironymus Lauterbach von 1561 — 1577, sein Nachfolger M. Georg Stadius (nicht zu verwechseln mit dem berühmten Professor gleichen Namens zu Paris) von 1577 resp. 1582—1593. Sein Nachfolger war Kepler. Die Lebensbeschreibung Beider und die Bemerkungen über die Art der damaligen Kalendermacherei sind recht interessant. Ce.

J. Newton. Mathematische Principien der Naturlehre. Mit Bemerkungen und Erläuterungen herausgegeben von J. Ph. Wolfers. Berlin. Oppenheim.

Eine fliessende Uebersetzung des classischen Buches. Die Bemerkungen und Erläuterungen des Uebersetzers tragen viel zum Verständniss bei. Es ist zu bedauern, dass jede geschichtliche Notiz, wie absichtlich vermieden ist, zu der doch so mancher Anlass vorhanden wäre. Ce.

A. D. Wackerbarth. Hyperbolic and Napierian logarithms. Monthl. Not. XXXI. 263-264. 1871.

Das von Napier erfundene Logarithmensystem wird erklärt und mit dem verglichen, welches 2,71828... zur Basis hat. Am Schluss wird auf 4 Fehler aufmerksam gemacht, die sich in des Verfassers: „Femställige Logarithm-Tabelle“ finden. Siehe F. d. M. III. p. 8. Glr. (O.)

E. Dubois. Logarithmes hyperboliques et néperiens. Mondes (2) XXVII. 651-652.

In der obigen Arbeit, die auch schon im vorigen Bande p. 8 besprochen war, war auf eine Differenz der Neper'schen und hyperbolischen Logarithmen aufmerksam gemacht. Herr Dubois sucht in seiner Notiz das Entstehen derselben zu erläutern.

O.

J. W. L. Glaisher. On errors in Vlacq's (often called Brigg's or Neper's) table of ten-figure logarithms of numbers. Monthl. Not. XXXII. 255-262.

Die einzigen zehnstelligen Logarithmentafeln, die existiren,

sind: Vlacq's „Arithmetica logarithmica" (fol. Gauda 1628 und London 1631) und Vega's „Thesaurus logarithmorum completus (fol. Leipzig 1794), von denen die erste die für den Gebrauch passendste ist, weil sie nur die Logarithmen der Zahlen enthält und weil die Differenzen neben die Logarithmen gestellt sind. Sie enthält jedoch eine grosse Zahl von Fehlern, welche nach und nach entdeckt und im Laufe von zwei Jahrhunderten publicirt sind, deren eine Hälfte indess der Oeffentlichkeit ganz entgangen ist. Der Verfasser hat alle Fehlerlisten, die es giebt, geprüft und verglichen, und giebt hier eine Liste, welche eine Ergänzung zu den beiden von Vlacq selbst in einigen Exemplaren der Arithmetica von 1628 gegebenen sein soll, ebenso wie zu der von Herrn Lefort im vierten Theil der Annales de l'observatoire de Paris 1828 gegebenen. Die Zahl der Fehler in Vlacq's Tafeln erreicht 600, ungefähr die Hälfte der wichtigen, d. h. derer, bei denen die letzte Stelle um mehr als eins falsch ist. Es folgen einige bibliographische Notizen, nach denen es scheint, dass die Londoner Ausgabe von 1631 nicht, wie man glaubte, ein Neudruck, sondern nur ein Abdruck der deutschen Ausgabe von 1628 mit einer kleinen englischen Erklärung und Vorrede ist, so dass dieselbe Fehlerliste für beide genügt. Zum Schluss giebt der Verfasser auch noch einige Bemerkungen über die Nützlichkeit zehnstelliger Logarithmen. Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. Addition to a paper on errors in Vlacq's ten-figure logarithms published in the last number of the monthly notices. Monthl. Not. XXXII. 288-290.

Berichtet hauptsächlich über verschiedene Fehlerlisten zu Vega's „Thesaurus logarithmorum completus", Leipzig 1794 und fügt den Punkten, die in der obigen Notiz besprochen, Einiges hinzu. Glr. (O.)

F. v. Kobell. Nekrolog von Charles Babbage. Münch. Ber. I. 1872.

Babbage (geb. 26. Decbr. 1792, gest. 20. Octbr. 1871) war der Nachfolger Newton's auf der mathematischen Lehrkanzel der

Universität Cambridge. Als wissenschaftliche Leistungen führt der Verfasser an: Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Summirung mehrerer Klassen unendlicher Reihen, Rotationsmagnetismus, Barometerbeobachtungen etc. Bekannt sind seine nur theilweise mit Erfolg gekrönten Versuche zur Herstellung einer Rechen- und Schachmaschine. Grössere Schriften sind: Economy of machinery and manufactures, reflections on the decline of science in England.

Nachzutragen möchte noch sein, dass Babbage zuerst die periodischen Functionen in Betracht zog. Gr.

D. Bierens de Haan. Notice sur Meindert Semeijns. Boncompagni Bull. V. 213-220.

B. Boncompagni. Intorno alla vita ed ai lavori di Meindert Semeijns. Boncompagni Bull. V. 221-228.

Meindert Semeijns wurde geboren am 30. Juli 1704 zu Enkhuizen am Zuidersee. Nach längeren Diensten in der holländisch-ostindischen Compagnie kehrte er in seine Vaterstadt zurück, wo er mehrere Jahre das Amt eines Schöffen verwaltete, und starb daselbst am 10. April 1775. Nach einer Hypothese Halley's über die Abweichung des Compass hatte Semeijns sich ein magnetisches System gebildet, durch welches man für jeden Ort der Erde die Missweisung des Compass sollte berechnen können, das er den Generalstaaten mittheilte, die den Prof. J. Lulofs in Leiden mit dem Berichte beauftragten. Die abfällige Beurtheilung desselben brachte Semeijns in heftigen Streit mit seinem Recensenten, und dieser Streit bildet den Gegenstand der Notiz von Bierens de Haan. Boncompagni giebt genaue Nachrichten über das Leben Semeijns und Lulofs, sowie genaue bibliographische Notizen über die Streitschriften Semeijns.

Ce.

M. Cantor. Die Familie Fagnano. Schlömilch Z. XVII. 88.

Eine dem Boncompagni Bull. III. entlehnte kurze Notiz über die Geburts- und Todestage der Mathematiker Julius Carl Fagnano

(geb. d. 26. Sept. 1682, gest. d. 18. Mai 1766) und Johann Franz Fagnano (geb. d. 31. Jan. 1715, gest. d. 14. Mai 1797). M.

J. Sclopis. Communicazione di una lettera di Luigi Lagrange. Atti di Torino. VII. 428-434, Grunert Arch. Litb. CCXV. 2-6.

Behandelt einen noch nicht publicirten Brief von Lagrange an den Marquis Domenico Caracciolo aus Berlin vom 13[ten] Octbr. 1781, von dem sich eine Copie unter den Papieren des Grafen Ludovico Morozzo (gest. 1804), früherem Präsidenten der Akademie der Wissenschaften zu Turin gefunden hat. Herr Sclopis theilt diesen Brief mit, den er für nützlich hält, um drei Punkte aus dem Leben Lagrange's aufzuklären, nämlich den Werth, den er in der Theorie der schweren Körper der Lehre Galilei's beigelegt hat; die an ihn ergangene Einladung, eine hervorragende wissenschaftliche Stellung im Königreich beider Sicilien zu übernehmen; endlich die Liebe zu Italien, die er trotz der Abwesenheit so vieler Jahre sich bewahrt hatte. Jg. (O.)

M. Cantor, Bürmann. Schlömilch Z. XVII. 428-430.

Der Verfasser vorliegender Notiz macht darauf aufmerksam, dass über Bürmann's Lebensverhältnisse bis jetzt sehr wenig bekannt sei, dass das Bekannte manche in sich nicht zu vereinigende Widersprüche und Unklarheiten enthalte. Er fordert deshalb zu Nachforschungen über Bürmann auf, indem er bestimmte Fragen dazu formulirt. O.

F. v. Kobell. Nekrolog von Sir John Frederick William Herschel. Münch. Ber. 1872.

Herschel, Sohn des berühmten Astronomen, wurde geboren am 7. März 1792 und starb am 11. Mai 1872. In den Jahren 1823, 27 und 28 setzte er die Arbeiten seines Vaters fort, und lieferte drei Cataloge von je 300, 295 und 384 neuen Doppelsternen. Drei weitere Cataloge brachten neue Positionen von resp. 1236, 2007 und 286 dieser wichtigen Objecte. Zu diesem Zweck hielt er sich vier Jahre lang ohne irgend welche Sub-

vention am Cap der guten Hoffnung auf. Als selbstständige Werke erschienen: „A treatise on astronomy" und „Outlines of astronomy."

Noch wichtiger war Herschel's Thätigkeit in der Physik. Lebhaft betheiligte er sich an dem alle Forscher jener Zeit beschäftigenden Streite zwischen Emissions- und Undulationstheorie. Während er in der „Theorie des Lichtes" beide Hypothesen als gleich berechtigt zu betrachten scheint, stellt er sich späterhin mit Entschiedenheit auf die Seite der letzteren. Sonst werden noch folgende Entdeckungen Herschel's hier namhaft gemacht: Die Beobachtung, dass jede Farbe die grösste Veränderung in den die Complementärfarbe enthaltenden Strahlen erleide bei Pflanzen, Untersuchungen über die Curven des Polarisationsbildes der Krystalle, welche er als Lemniscaten (im allgemeineren Sinne) erkannte, Interferenz der Schallwellen, die blaue Spektrallinie des Strontiums und verschiedene chemische Arbeiten.

Erwähnt hätte noch werden können, dass auch reine Mathematik den eifrigen Gelehrten vielfach beschäftigte; so war es eine seiner ersten literarischen Leistungen, dass er zusammen mit Peacock ein Lehrbuch der höheren Analysis umarbeitete.

Gr.

Ad. Quetelet. Notice sur Sir John Fréd. Will. Herschel. Ann. de Belg. XXXVIII. 161-199.

Enthält Notizen über das Leben Sir John Herschel's (geb. den 7. März 1792 zu Slough bei Windsor, gest. d. 11. Mai 1871 zu Collingwood in Kent). Dieselben beziehen sich namentlich auf Arbeiten, mit denen der Verfasser der Notiz durch seine eigene Thätigkeit in Verbindung gestanden hat. Die Arbeit giebt daher ebenso sehr ein Bild von Arbeiten des Herrn Quetelet, wie von denen Herschel's. Eingestreut sind Briefe von Herschel an den Verfasser, die in der Originalsprache wie in Uebersetzung mitgetheilt werden.

O.

A. Clebsch. Notice sur les travaux de Jules Plücker. Traduit de l'allemand par le Dr. Paul Mansion. Boncompagni Bull. V. 183-212.

Uebersetzung der auf S. 10 des III. Bandes dieses Jahrbuch erwähnten Schrift von Clebsch: Zum Gedächtniss an Jul Plücker. Ce.

Liste des travaux scientifiques de J. Plücker. Darboux B III. 59-64.

Abdruck nach demselben Werke von Clebsch. Ce.

C. NEUMANN. Zum Andenken an Rudolf Friedri Alfred Clebsch. Gött. Nachr. 1872. 550-559.

Die Arbeit giebt ein kurzes Lebensbild von Clebsch.

Rudolf Friedrich Alfred Clebsch ist geb. zu Königsberg i. l am 19ten Januar 1833. Nachdem er mit 17 Jahren das Abi rientenexamen am Altstädtischen Gymnasium seiner Vaterst bestanden, studirte er dort unter Neumann, Richelot und Hes Mathematik und Physik. Im Jahre 1854 absolvirte er das Doct und Staatsexamen und blieb dann einige Jahre als Lehrer Berlin. 1858 kam er als Professor an das Polytechnicum Carlsruhe. Nach 5 Jahren ging er von dort nach Giessen, v wo er im Jahre 1868 nach Göttingen übersiedelte. Dort erei ihn der Tod am 7ten November 1872. Neben dem äusser Lebensbilde giebt die Arbeit einen Ueberblick über die gros wissenschaftliche Thätigkeit des Verstorbenen. Den Bericht d über verschiebt Referent jedoch bis zum nächsten Bande, v über die von Clebsch's Schülern entworfene ausführliche Darlegu seiner wissenschaftlichen Leistungen zu referiren sein wird. F jetzt mag hier zum Zeichen, wie sehr er jeden Versuch zur F derung der Mathematik zu unterstützen bemüht war, der Aufmu terung und Thätigkeit mit Dank gedacht werden, die er diese Jahrbuch zu Theil werden liess. O.

E. BELTRAMI. Alfredo Clebsch. Battaglini G. X. 347-349.

Nachruf an Clebsch. O.

L. CREMONA. Commemorazione di A. Clebsch. Rend. Ist. Lomb. (3) V. 1041-1042.

Nachruf des berühmten Gelehrten an Clebsch, in dem namentlich dem Schmerze über den für die Wissenschaft zu früh erfolgten Tod Ausdruck gegeben wird. Jg. (O.)

R. Börnstein. Alfred Clebsch. Nachruf. Altpr. Monatschr. IX. 653-656.

Ein kurzer warm geschriebener Nachruf. Am Anfange ein ganz knapp gehaltener Lebensabriss, der aber doch vielleicht manches in weitern Kreisen nicht Bekannte enthält. Ce.

A. Stiattesi. Intorno alla Vita ed ai lavori del P. Giovanni Antonelli delle Scuole Pie. Cenni. Boncompagni Bull. V. 253-276.

Eine eingehende Biographie und Würdigung der wissenschaftlichen Leistungen Antonelli's, zuletzt Directors der Sternwarte zu Florenz. Er war geboren zu Candeglia bei Pistoia am 10. Januar 1818. Seine Studien machte er im Collegio Calasanziano in Florenz. Schon 1843 wurde er Professor am Collegium zu Cortona, dann aber 1844 Gehilfe und Stellvertreter Inghirami's am Observatorium zu Florenz. Als Director dieses Institutes starb er den 14. Januar 1872 im 54ten Lebensjahre. Ce.

A. Stiattesi. Catalogo de' lavori del P. Giovanni Antonelli. Boncompagni Bull. V. 267-277.

Verzeichniss der Schriften, welche Antonelli hinterlassen; davon beziehen sich 31 auf mathematische Gegenstände, eingeschlossen eine Reihe von Commentaren zu Stellen aus Dante's göttlicher Comödie, 7 sind verschiedenen vorzugsweise theologischen Inhalts, 1 ist unedirt. Gesammtsumme 39. Ce.

B. Boncompagni. Intorno ad un opera dell' Abate Nicolò Luigi de La Caille intitolata „Leçons élémentaires de Mathématiques" ecc. Boncompagni Bull. V. 278-293.

Antonelli hatte von dem genannten Buche eine italienische Ausgabe veranstaltet. Das hat wahrscheinlich Fürst Boncom-

pagni veranlasst, über dieses Werk des La Caille genaue bibliographische Notizen zu veröffentlichen. Er zählt auf 15 Ausgaben in französischer Sprache, 3 Ausgaben in lateinischer, 11 in italienischer, 1 Ausgabe in neugriechischer Sprache. Ce.

E. Lefébure de Fourcy. Notice nécrologique sur Lamé. Ann. d. Mines (7) I. 271-273.

J. Bertrand, Combes, V. Puiseux. Discours aux funérailles de M. Lamé. Ann. d. Mines (7) I. 274-282.

Gabriel Lamé, geboren zu Tours am 22. Juli 1795, trat 1814 in die École Polytechnique, ging 1821 in russische Dienste. 1831 nach Paris zurückgekehrt, erhielt er sehr bald die Stellung als Physiker an der École Polytechnique, die er bis 1844 bekleidete. Schon 1843 Mitglied der Akademie geworden, übernahm er 1851 Vorlesungen an der Faculté des Sciences zu Paris, und starb am 1. Mai 1870. Siehe auch F. d. M. II. p. 268. O.

F. v. Kobell. Nekrolog von F. M. Schwerd. Münch. Ber. 1872.

Heel. Dr. Friedrich Magnus Schwerd, ein Nekrolog. Pr. Speyer.

Die hier vorliegende Biographie Schwerd's geht genauer auf dessen wissenschaftliche Leistungen ein. Ueber seine äusseren Lebensumstände ist wenig zu berichten. Geboren 1792 in Rheinhessen, ward er, nachdem er bereits von 1814—1817 als Lehrer zu Speyer gewirkt hatte, in diesem Jahre zum Lycealprofessor in dieser Stadt ernannt, und bekleidete diese Stelle bis zu seinem Todestage, dem 22. April 1871.

Seine erste bedeutende wissenschaftliche Arbeit war die Gradmessung in der Pfalz, bei welcher er den Gedanken verfolgte, ob sich nicht bei entsprechend geschärfter Sorgfalt im Beobachten mit Zugrundelegung einer nur kurzen Basis ebenfalls genaue Resultate erzielen liessen. Höchst interessant sind die hier genauer beschriebenen Mittel, deren er sich zur Messung der Zwischenräume der an einander gelegten Maassstäbe bediente.

Das ganze Verfahren ist niedergelegt in seinem Erstlingswerke „Die kleine Speyerer Basis, 1820“. Bald darauf wurden die Mittel zum Bau einer Sternwarte bewilligt und ein 20zölliger Meridiankreis auf derselben aufgestellt. Die Ellipticität von dessen Axen gab Schwerd die Veranlassung zu der, wie es scheint, einzigen rein mathematischen Arbeit seines Lebens. Er verallgemeinerte nämlich ein Problem, welches bereits Bessel, durch die nämlichen Gründe angeregt, behandelt hatte, und untersuchte (Gymn. Progr. 1830) die von der Spitze eines beweglichen Winkels beschriebenen Curven, vorausgesetzt, dass dessen Schenkel stets einen Kegelschnitt berühren. Mit Hülfe jenes Instrumentes bearbeitete Schwerd einen bekannten Sternkatalog von 1751 Positionen, dessen Fundamentalsterne 12—20 mal beobachtet wurden. Auch an dem von der Berliner Akademie ausgehenden Unternehmen der Sternkarten betheiligte er sich lebhaft.

Im Jahre 1835 lieferte Schwerd jenes Werk, welches vor allen anderen seinen Namen berühmt machte: „Die Beugungserscheinungen aus den Fundamentalsätzen der Undulationstheorie analytisch entwickelt und in Bildern dargestellt.“ Vor allem muss man die Einfachheit bewundern, welche Schwerd in den Beobachtungsmodus dieser Phänomene brachte, ein innen mit Asphaltlack geschwärztes Uhrglas oder ein innen geschwärztes Rohr genügten als Beobachtungsmittel. Auch gewisse astronomische Thatsachen gewannen durch ihn zuerst ihre richtige Erklärung. Erwähnt hätte vielleicht noch werden können, dass auch die reine Mathematik manchen Vortheil aus diesem bahnbrechenden Werke zog, wie er denn in demselben die Summationen der Reihen

$$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}\alpha+\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(\alpha+\beta)+\cdots+\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(\alpha+(n-1)\beta)$$

lehrt.

Viele Jahre später begann Schwerd sich eifrig mit photometrischen Messungen am Himmel zu beschäftigen. Da wohl häufig von dem dazu gebrauchten Instrumente die Rede ist, eine Beschreibung desselben aber gleichwohl selten angetroffen wird, so möge dieselbe hier folgen. Zwei Fernröhre gehen aus dem

Innern eines Hohlwürfels so hervor, dass die Brennpunkte ihrer Objective durch eine Combination von Prismen neben einander fallen, während das Ocular gemeinschaftlich ist. Durch Verschiebung des Oculars wird es dann möglich sein, die in den beiden Brennpunkten erscheinenden Sterne zu gleich grossen Lichtscheibchen auszudehnen; durch Diaphragmen liess sich auch eine Gleichheit der Lichtstärke beider Scheibchen erzielen. Wurde beim Stern A die Blendung α, beim Stern B die Blendung β angewandt, so war

$$\alpha A = u\beta B.$$

$\frac{1}{u}$ ist das Verhältniss der Objectivöffnungen der beiden Fernröhre. Die Genauigkeit seines Instrumentes schätzte Schwerd selbst auf $\frac{1}{20}$ einer Sterngrösse.

Von grosser Bedeutung war auch Schwerd's pädagogische Thätigkeit; zur Einführung in das neue Decimalsystem verfasste er ein eigenes arithmetisches Lehrbuch. Gr.

J. C. Jamin. Discours aux funérailles de M. Duhamel. Darboux Bull. III. 314-317, Liouville J. (2) XVII. 324-327.

Rede Jamin's, gehalten im Namen der Pariser Akademie am Grabe Duhamel's. Sie giebt einen kurzgehaltenen Ueberblick über die hauptsächlichsten Arbeiten Duhamel's. Jean Marie Constant Duhamel ist geboren den 5. Februar 1797 zu St. Malo. Nach Absolvirung des Lyceums zu Rennes kam er auf die Polytechnische Schule, musste dieselbe aber 1816 verlassen und besuchte die École de droit zu Rennes. Auch dort wegen seiner politischen Anschauungen ausgeschlossen, ging er nach Paris, wo er sich durch Unterricht ernährte. Später (1840) wurde er Mitglied der Akademie und erhielt den Lehrstuhl der Analysis an der École Polytechnique, École Normale und an der Sorbonne. Im späteren Alter zog er sich von dieser Stellung zurück und starb nach einem glücklichen, sorgenfreien Alter am 1. Mai 1872.

O.

M. Curtze. Notice sur la vie de Jean-August Grunert. Darboux Bull. III. 285-287.

Der Verfasser giebt einen kurzen Lebensabriss Grunert's und am Schluss eine Schilderung seiner Persönlichkeit. J. A. Grunert wurde am 7. Febr. 1797 zu Halle a. S. geboren, studirte zuerst daselbst Bauwissenschaften, dann in Göttingen Mathematik, wurde 1820 zu Halle promovirt, war darauf Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium und an der Militairschule zu Torgau, seit 1828 Professor am Gymnasium zu Brandenburg a. H. und seit 1833 ord. Professor au der Universität zu Greifswald, wo er am 7. Juni 1872 starb. M.

FAYE, V. PUISEUX, DUBARÉE, G. VILLARCEAU. Discours aux funérailles de M. Delaunay. Darboux Bull. III. 317-320, Liouville J. (2) XVII. 348-350, Inst. XL. 279-280, Ann. d. Mines (7) II. 193-205.

Die beiden ersten Reden gedenken nur der Verdienste, die sich der Verstorbene durch seine „Théorie de la Lune" um die Astronomie erworben hat, enthalten aber keine Mittheilungen über das Leben desselben. Auch in der dritten Rede von Dubarée finden sich nur solche Notizen, die sich auf Delaunay's Verhältniss zur École des Mines beziehen: Charles Eugène Delaunay ist geboren den 9. April 1816, war Professor der Mathematik an der École Polytechnique, dann Ingénieur des Mines. 1855 wurde er Mitglied der Akademie und bekleidete seit dem Jahre 1870 die Stelle des Directors der Pariser Sternwarte. Er fand seinen Tod am 4. August 1872 bei einer Wasserfahrt durch Umschlagen des Bootes. O.

L. F. MENABREA. Intorno ad uno scritto del Sig. Prof. Angelo Genocchi. Lettera a. D. B. Boncompagni. Boncompagni Bull. V. 301-305.

Richtet sich persönlich gegen eine Aeusserung in der auf S. 11 des III. Bandes dieses Jahrbuches erwähnten Arbeit Genocchi's über das Leben und die Werke Felice Chiò's in Betreff der Arbeiten dieses Letzteren über die Lagrange'sche Reihe, in welcher eine Anklage Menabrea's gefunden werden konnte. Ce.

A. GENOCCHI. Intorno ad una lettera del Sig. Conte L. F. Menabrea. Apunti. Boncompagni Bull. V. 535-542.

Wendet sich gegen den oben erwähnten Brief Menabrea's und zeigt an der Hand von Documenten, dass der Verfasser zu der incriminirten Aeusserung völlig berechtigt war. Ce.

H. SUTER. Geschichte der mathematischen Wissenschaften. I. Theil: Von den ältesten Zeiten bis Ende des XVI. Jahrhunderts. Zürich. Orell, Füssli et Comp.

H. HANKEL. Intorno al Volume intitolato „Geschichte der mathematischen Wissenschaften etc.“ Traduzione del Sig. Filippo Keller. Boncompagni Bull. V. 297-300.

Das Werk Suter's, ursprünglich als Doctordissertation geschrieben, hat sich als Ziel gesetzt, einen kurzen und klaren Ueberblick über die Geschichte der gesammten Mathematik zu geben. Bei einem Umfange von 200 Seiten ist natürlich von einer Quellenangabe abzusehen gewesen, was auch ohne Schaden geschehen kann, wenn von dem Verfasser alle guten Quellen zu Rathe gezogen sind. Dass dies nicht überall der Fall, hat zum Theil schon Hankel in seiner Recension nachgewiesen. So fehlt die Geschichte der Mathematik bei den Indern gänzlich, die Geschichte der Wissenschaft bei den Arabern ist nur nach Wallis und Montucla gegeben; alle neueren wichtigen Untersuchungen von Woepcke, Sédillot, Steinschneider etc. sind nicht berücksichtigt. Von den dadurch entstandenen Fehlern und Missverständnissen giebt Hankel vielfache Proben, die sich leicht vermehren liessen. Wenn Hankel ihm aber zum Fehler anrechnet, dass er den Erfinder der Quadratix, Hippias, mit dem Sophisten Hippias von Elis identificirt, was schon Brettschneider gethan hat, so dürfte er irren. Proklos Diadochos hat, wie man sich leicht überzeugt, die Gewohnheit, nur bei der ersten Aufführung eines Namens die nähere Bezeichnung hinzuzufügen, später aber dieselbe als selbstverständlich wegzulassen. In der Aufzählung der Mathematiker vor Euklides am Anfange seines Werkes findet sich nun aber auch erwähnt Ἱππίας ὁ Ἠλεῖος (Proclus ed. Friedlein

p. 65). Der später nur als Hippias Erwähnte kann also nur der Eleer sein. Es ist aber nicht blos in der Geschichte der griechischen und arabischen Mathematik, dass die schlechtesten Quellen benutzt sind, auch in der späteren Geschichte findet sich vieles fehlerhaft. So ist die Darstellung der Entdeckung der Auflösung der Gleichungen 3ten Grades durch Ferro, Cardan, Tartaglia gänzlich falsch, wie schon 1846 durch Gherardi gezeigt ist; so fehlt der Hauptrepräsentant der Mathematik des XIV. Jahrhunderts, Nicole Oresme, gänzlich; so sind die Angaben über Copernicus zum grössesten Theile irrig. Schon Alpetragius hat ähnliche Ideen, wie Copernicus ausgesprochen; Copernicus hat nicht blos in Krakau und Bologna, sondern höchst wahrscheinlich auch in Padua studirt; hat aber nur ein halbes bis dreiviertel Jahr, nicht Jahre lang, in Rom gelehrt. Schon vor seiner Reise nach Italien war er Kanonicus zu Frauenburg geworden, nicht erst 1506 nach seiner Rückkunft von Italien. Rhäticus lebte nicht in Nürnberg, sondern in Wittenberg. Als Hypothese giebt nicht Copernicus, sondern der anonyme Schreiber der Vorrede, Osiander, das System aus; das war ja gerade die Bedingung der Indexcongregation, dass alle Stellen, in denen Copernicus sein System nicht als Hypothese ausspricht, in diese Form umgeschrieben werden mussten.

Den Schlusssatz der Recension Hankels: „Wenn wir auch von all diesen einzelnen Ausstellungen absehen, so müssen wir dem vorliegenden Werke doch einen Fehler zum Vorwurf machen, der nicht leicht zu verbessern ist. In ihm fehlt nämlich gänzlich die Charakterisirung der verschiedenen Mathematiker, die ihrer Werke und ihrer Methoden. Wie weit der Verfasser von der Erkenntniss des speciellen Geistes der antiken Mathematik entfernt ist, kann man aus dem oben erwähnten Beispiel in Betreff des Archimedes ersehen.“

„Die Geschichte der Mathematik darf nicht die Gelehrteu und ihre Werke einfach aufzählen, sie muss vielmehr die ganze Entwickelung der Ideen auseinandersetzen, welche in der Wissenschaft herrschten; nur so wird sie das allgemeine Interesse anregen und den Nutzen stiften, den Herr Suter sich von ihr

verspricht“, kann man nur einfach unterschreiben. Ein grosser Mangel nicht dieses Geschichtswerkes allein ist das Fehlen eines guten Index. Ce.

P. Riccardi. Biblioteca Matematica Italiana dalla origine della stampa ai primi anni del secolo XIX. Modena 1870—1872. Fasc. 1-4.

Eine vortrefflich gearbeitete mathematische Bibliographie der in Italien oder von Italienern erschienenen Werke, zugleich mit Nachweisung der Litteratur über jeden Autor, soweit eine solche existirt. Die bis jetzt erschienenen 4 Lieferungen reichen bis zum Schluss des ersten Bandes des ersten Theiles von A bis Kirchhoffer. Ce.

M. de Tilly. Rapport séculaire sur les travaux mathématiques de l'académie royale de Belgique (1772 bis 1872). Bruxelles. Hayez. [Extrait du livre commémoratif du centième anniversaire de l'académie].

Das vorliegende Werk, das eine beinahe vollständige Geschichte der Mathematik in Belgien seit 100 Jahren enthält, zerfällt in folgende Theile. I. Analysis. 1) Algebraische Analysis, 2) Reihen, 3) Integralrechnung, 4) Theorie der quadratischen Reste, 5) Wahrscheinlichkeitsrechnung. II. Geometrie: 1) Reine Geometrie, 2) Infinitesimal-Geometrie. III. Mechanik: 1) Rationelle Mechanik, 2) Angewandte Mechanik.

Es erscheint dem Referenten nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, dass zu den von Herrn Tilly hier analysirten Arbeiten einige der wichtigsten Arbeiten von Chasles gehören, z. B. seine Geschichte der Geometrie, ausserdem verdienstvolle Untersuchungen von Daudelin, Quetelet, Brasseur, Schaar, Gilbert und Catalan.

Mn. (Wn.)

S. Günther. Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche. Pr. Weissenburg. 1872.

Recension dazu von M. Cantor. Schlömilch Z. XVII. Litz. 102.

Die Abhandlung beschäftigt sich in eingehender Weise mit der Geschichte des ab- und aufsteigenden Kettenbruchs, und führt uns der Reihe nach die Verdienste des Leonardo Pisano, des P. A. Cataldi, Daniel Schwenter's, Lord Brouncker's und Huyghens um diese Grössenformen vor Augen. Vorzugsweise betont er die Verdienste D. Schwenter's um dieselben, aus dessen Deliciae mathematicae er im Anhange noch einige weitere Beiträge zur Geschichte der Mathematik beibringt, die den Werth jener Schrift für letztere noch klarer hervortreten lassen. Ce.

W. Karup. Theoretisches Handbuch der Lebensversicherung. Leipzig, 1871. Fritsch.

Dem historischen Theile des Werkes entnehmen wir folgende Angaben. Die erste Tafel über die Lebensdauer besitzen wir vom römischen Präfecten Ulpian. Angebahnt ward die Idee der Lebensversicherung im 14ten Jahrhundert durch die Reise- und Unfallversicherung der See-Assecuranzkammern und durch die im Mittelalter von Seiten der Gilden geleisteten gegenseitigen Unterstützungen bei Unglücksfällen. Sie entwickelten sich zu den Kranken- und Begräbnisskassen der Zünfte. Der italienische Arzt Lorenzo Tonti erfand die Tontinen und legte damit den Grund zur Rentenversicherung. Die französische Regierung versuchte vergeblich daraus eine Einnahmequelle zu machen. Fermat und Pascal schufen die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der holländische Staatsmann de Witt gründete auf deren Principien und auf gesammelte Geburts- und Todeslisten die Rentenversicherung, welche sofort von mehreren Staatsregierungen realisirt ward. Im 17ten Jahrhundert wird die Mortalitätsstatistik, die den Römern schon durch die fünfjährigen Steuerlisten des Servius Tullius bekannt war, später in Klöstern dauernd gepflegt ward, auf die Wahrscheinlichkeitslehre basirt. Aus der von da an beginnenden wissenschaftlichen Litteratur werden angeführt die Werke von Sir William Petty (politische Arithmetik 1662), John Graunt (Todtenlisten 1680), Caspar Neumann 1692, Halley (Mortalitätstabellen 1693). Die erste Lebensversicherungsanstalt, projectirt von Assheton, ward 1698 in London errichtet. Die Fortentwicke-

lung des Instituts lässt sich nur durch Eingehen auf den Specialinhalt darstellen.

Siehe auch Abschn. IV. H.

F. Klein. M. Chasles, Rapport sur les progrès de la géométrie. Gött. Anz. 1-12.

Herr F. Klein berichtet über vorstehendes Werk, in welchem der Verfasser die gesammte Entwickelung der neueren Geometrie in Frankreich von ihrem Beginne zu Anfang dieses Jahrhunderts bis auf die neuesten Forschungen hin dargestellt hat. Im Anschluss an diesen Bericht kennzeichnet Herr Klein die Bedeutung, welche die Arbeiten deutscher Forscher für die Ausbildung und Vervollkommnung der neueren Methoden in der Geometrie gehabt haben. Schn.

F. Hoza. Beitrag zur Geschichte der Trochoiden. Casopis I. 54-60. Wn.

J. W. L. Glaisher. Remarks on the calculation of π. Messenger (2) II. 119-123.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 3.

K. Hippauf. Lösung des Problems der Trisection mittelst der Conchoide auf circularer Basis. Hoffmann Z. III. 215-240. Leipzig, Teubner.

Von den Resultaten der Abhandlung ist höchstens die Construction des Conchoidencirkels in dieser Form neu, obwohl derselbe nur eine Modification des Nicomedischen Conchoidencirkels für die auf gerader Basis ist. Der Grundgedanke der Lösung des Verfassers findet sich im 8ten Lemma des Archimedes, seine Lösung selbst haben die Araber unter Berufung auf die Griechen vollständig gegeben, z. B. Thabit ben Korrah und Abul Rihan, gewöhnlich Albiruni genannt. Dieser Letzte fand auch den Zusammenhang seiner Lösung mit der des Nikomedes, die Herr Hippauf dem Jesuiten Clavius zuschreibt. In der Hippauf'schen Form gaben die Lösung die drei Brüder Muhammed, Ahmed und

Hasan ben Musa ben Shakir, wahrscheinlich nach diesen findet sie sich in der Ausgabe des Euklid von 1482 am Ende des vierten Buches. Die Kenntniss der Geschichte der Trisection scheint der Verfasser nur aus dem 5ten Bande des Klügel'schen Wörterbuches zu kennen, weshalb er dann aber die dort auch auseinandergesetzte Lösung durch die Conchoide auf circularer Basis, die dort nach Montucla schon der Platonischen Schule vindicirt wird, nicht ebenfalls anführt, ist eigenthümlich, da er doch die erste citirt hat, oder hat er etwa seine Methode dort nicht erkennen wollen? Auch Copernicus hat die Methode gekannt, wie in nächster Zeit nachgewiesen werden wird. Die Geschichte der Trisection bei den Arabern findet man in Woepcke's Uebersetzung des Omar Alkayami in Anhang D., wo auch auf die Trisection die Construction des Siebenecks gegründet ist.

Ce.

F. Zöllner. Zur Geschichte des Horizontalpendels.
Leipz. Ber. XXIV. 183-193.

Der Herr Verfasser hat die Priorität der Idee, welche einem Instrumente zu Grunde liegt, das er zuerst in seinem Vortrage: „Ueber eine neue Methode zur Messung anziehender und abstossender Kräfte“ (Leipz. Ber. 1869, S. 281) beschrieb und an einem Modelle erläuterte, das er später, auf Grund zahlreicher Versuche vervollkommnet, unter Beigabe einer Reihe von damit angestellten Versuchen, in der Abhandlung: „Ueber den Ursprung des Erdmagnetismus und die magnetischen Beziehungen der Weltkörper“ von Neuem erklärte (Leipz. Ber. 1871 p. 479), bereits im Jahr 1869 Herrn Perrot, (C. R. LIV. 728) eingeräumt. Durch Herrn Dr. Klein auf die, in Dingler's polytechnischem Journale (Jahrgang 1832 p. 81—92) erschienene Schrift: „Astronomische Pendelwage, nebst einer neuen Nivellirwage, erfunden und dargestellt von Lorenz Hengler, academischem Bürger an der Hochschule zu München“ aufmerksam gemacht, sieht er sich aber jetzt veranlasst, die ursprünglich Perrot zugedachte Priorität Herrn Hengler zu vindiciren, und dieses Hengler gebührende Recht durch Anführung der Cardinalpunkte seines Aufsatzes ausser

allen Zweifel zu stellen. Gleichwohl aber müssen die Hengler'schen Beobachtungen, deren nähere Umstände und dabei angewandte Vorsichtsmaassregeln äusserst dürftig angegeben sind, mit grosser Behutsamkeit aufgenommen werden, wenn auch ihre Glaubwürdigkeit hier nicht in Zweifel gezogen wird. Ueber die Persönlichkeit des Erfinders liessen sich genauere Nachrichten nicht einziehen; nur soviel konnte ermittelt werden, dass zu München im Jahre 1830—31 ein Cand. phil. et theol. Lorenz Hengler aus Reichenhofen in Württemberg immatriculirt gewesen, jedoch weder früher noch später wieder zu finden sei.

Wtn.

C. Ohrtmann. Das Problem der Tautochronen. Pr. Berlin.

Der Verfasser bespricht zuerst die Erfordernisse einer Geschichte der Mathematik. Die Schwierigkeiten ihrer Erfüllung erklären den Mangel einer befriedigenden Leistung auf diesem Gebiete, und weisen uns darauf hin, durch historische Bearbeitung der Entwickelung einzelner Probleme die künftige umfassende Darstellung vorzubereiten. Hierzu soll die gegenwärtige Arbeit über die Tautochronen ein Anfang sein.

Nach einer kurzen Uebersicht über die Reihenfolge der Arbeiten und deren Erfolge schreitet der Verfasser zur sachlichen Darstellung. Diese zusammenfassend wiederzugeben ist nicht wohl möglich. Der Fortschritt besteht weniger im Vordringen zur allgemeinen Lösung einer bestimmten Frage, als grösstentheils in der Entwickelung einer immer grössern Vielseitigkeit der Fragen, zu denen die mannichfaltige Form der Kräfte und die Begrenzung der Bewegung Anlass bietet, und welche wohl kaum als erschöpft und abgeschlossen betrachtet werden dürfen. Huyghens bestimmte die tautochronische Curve für parallel constante Schwerkraft, Newton und Herrmann für Centralanziehung und für einen der Geschwindigkeit, Euler und Jean Bernoulli für einen dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand. Necker führte dazu die Reibung längs der Curve ein. Durch Fontaine und Lagrange ward das Problem verallgemeinert, einestheils beliebige Kräfte in Untersuchung gezogen,

anderntheils die Schwingungszeit als beliebig gegebene Function des Bogens genommen. Die mannichfaltigen hieraus fliessenden Fragen sind von ihnen sowohl als von den folgenden Autoren unter verschiedenen Beschränkungen auf verschiedene Stadien der Lösung geführt worden. Es haben sich seit 100 Jahren 19 Autoren mit dem Problem beschäftigt, deren betreffende Werke und biographische Notizen am Schluss aufgeführt werden.

Es verdient bemerkt zu werden, dass erst kurz vorher eine Arbeit von Bösser (siehe Fortschr. d. Math. II. 26) erschienen war, welche sich als vorzüglicher Beitrag zu dem von Ohrtmann angeregten Unternehmen ganz in dessen Sinne betrachten lässt, obwohl sie nicht aus dem umfassenden Gedanken hervorgegangen ist. H.

J. H. v. MÄDLER. Geschichte der Himmelskunde von der ältesten bis auf die neueste Zeit. Braunschweig. Westermann.

Das Referat erfolgt im nächsten Bande der Fortschritte nach vollendetem Erscheinen des Werkes. O.

Capitel 2.

Philosophie.

J. M. C. DUHAMEL. Des méthodes dans les sciences de raisonnement. Vme Partie: Essai d'une application des méthodes à la science de l'homme moral. 8°. Paris. Gauthier-Villars.

Wir führen den vorliegenden Theil nur der Vollständigkeit halber als Ergänzung zu dem im 2ten Bande p. 270 erwähnten Referate an, das den 4ten Band des vorliegenden Werkes besprach. Wie aus dem Titel schon hervorgeht, bewegt sich der Inhalt dieses Theils nicht mehr auf mathematischem Gebiete.

O.

J. C. V. HOFFMANN. Vom Allgemeinen zum Besondern oder vom Besondern zum Allgemeinen? Hoffmann Z. III. 366-367.

Der Verfasser will den Fortschritt vom Besondern zum Allgemeinen consequent zur Norm des mathematischen Unterrichts erheben. Uebersehen ist dabei wohl nur, dass das Besondere ohne die angrenzende Abweichung, der rechte Winkel ohne den nichtrechten, keine distincte Auffassung zulässt. Allerdings lässt sich eine propädeutische Methode nach solchem Princip denken; doch kann diese die mathematische nicht ersetzen. H.

R. HOPPE. Der exacte und einfache Begriff des Unendlichen nebst seiner Anwendung in der höhern und niedern Mathematik. Hoffmann Z. III. 11-18.

Unendlich klein „ist“ eine Variable, wenn sie beliebig klein „werden kann.“ Zu keinem Infinitesimalschluss ist das Verschwinden der unendlich kleinen Differenzen erforderlich, vielmehr erhält man das genaue Resultat nach dem leicht zu beweisenden Satze: „Zwei Constanten, die von einer Variabeln unendlich wenig differiren, sind einander gleich.“ Bei solcher Bestimmung ist der Begriff und die Schlussweise des Unendlichen für Anfänger der Mathematik fasslich, und lässt sich, ohne Abänderung bis in die höchsten Zweige fortgeführt, in einfachster Weise zur Begründung der Principien anwenden. Hiermit hofft der Verfasser die Jahrhunderte lang schwebende Frage über die Möglichkeit einer exacten Bestimmung des Unendlichen zum Abschluss gebracht zu haben. H.

A. TRANSON. De l'infini ou métaphysique et géométrie, à l'occasion d'une pseudo-géométrie. Evreux 1871. Hérissey.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 1. — Vergl. F. d. M. III. p. 13.

J. C. BECKER. Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume. Schlömilch Z. XVII. 314-332.

Der Aufsatz ist eine Kritik einer Reihe von Sätzen, die einestheils Rosanes in einem Vortrag zu Breslau, anderntheils Gauss, Riemann und Helmholtz in ihren Schriften aufgestellt hatten. Der Verfasser nimmt Kant in Schutz nicht nur gegen die Beschuldigungen des Erstern, sondern auch gegen die sich ergebenden Folgerungen der Letztern. Soviel nun auch die logische Verwerthung, welche diese Folgerungen bisher erfahren haben, an Klarheit vermissen lässt, so kann man doch in der gegenwärtigen Beurtheilung schwerlich einen Fortschritt finden, da der Verfasser erst den Grundgedanken, dann auch eine direct ausgesprochene Bestimmung ganz ignorirt und nicht zu verstehen scheint. Es handelte sich darum, dass das Denkvermögen in Bezug auf geometrische Objecte weiter reicht als die der Anschauung des wirklichen Raumes entsprechenden Begriffe. Becker sieht darin vielmehr eine Anzweiflung, dass der wirkliche Raum der betreffenden Beschränkung unterliege, vertheidigt die Anschauungsbegriffe gegen das erweiterte Denken und nennt letzteres ein Ankämpfen gegen den gesunden Menschenverstand. Während aber in diesem Punkte sein Urtheil sehr von der Gewohnheit beherrscht und beengt erscheint, beweist er andererseits eine grosse Fertigkeit, mit schwebenden Begriffen, deren Berechtigung er selbst nicht anerkennt, zu argumentiren, mit untadelhafter Consequenz und in einer leichtfasslichen Sprache eingehend auf die formellen Bestimmungen, aber ohne die eigentlich vorliegende Frage zu treffen. Letzterer würde er schwerlich von dem Kant'schen Standpunkt aus näher treten können, auf dem er die Anschauung als ein fertig Gegebenes, auf Erfahrung nicht Reducirbares betrachtet, womit er den Schlüssel zur Lösung sich selbst vorweg versperrt. H.

P. de Saint-Robert. Qu'est-ce que c'est que la force? Mondes (2) XXVIII. 253-258.

Der Verfasser bespricht zunächst die Art, wie man gewöhnlich die Grösse von Kräften zu messen pflegt. Das Wort „force“ scheint ihm jedoch für den Begriff nicht angemessen, und er schlägt daher vor, analog der Unterscheidung in potentielle und

actuelle Energie (welche Ausdrücke ihm ebenfalls schlecht gewählt scheinen), „puissance disponible“ und „puissance vive“ zu substituiren. Nachdem er den Unterschied derselben an Beispielen erläutert, kommt er auf die Ansichten von Descartes und Leibniz über das Maass der Bewegungsmenge zu sprechen. Er setzt sodann die Ungenauigkeit des mit Annahme dieser Maasse ausgesprochenen Satzes von der Erhaltung der Kraft auseinander, indem beide Forscher die Fälle, wo mechanische Arbeit in Wärme verwandelt wird, nicht berücksichtigen konnten, und bespricht das Princip von der Constanz der Kraft bei einem freien, von äussern Einwirkungen gänzlich unabhängigen System. Bei der weiteren Erörterung stellt er die Hypothese auf, dass es nur unzerstörbare Materie giebt und unzerstörbare Bewegung, die sich unter verschiedenen Formen, wie mechanische Arbeit, Wärme etc. darstellt. Er folgert daraus, dass es in der Natur überhaupt keine Kraft giebt und sagt: „la force est simplement l'effet d'une transmission de mouvement.“ Wodurch diese Transmission der Bewegung hervorgebracht wird, darüber verschweigt der Verfasser seine Ansicht. Er glaubt hierdurch die Physik von dem Begriff „Kraft“ befreit zu haben, dürfte aber die Beantwortung der im Titel aufgestellten Frage durch seine Betrachtung weder gefördert noch klarer gestellt haben. O.

H. Klein. Die Principien der Mechanik, historisch und kritisch dargestellt. Leipzig. Teubner.

Die vorliegende Schrift ebenso, wie die im nächsten Jahrgang zu besprechende von E. Dühring ist aus Veranlassung der von der Göttinger Philosophischen Facultät für die Beneke-Stiftung gestellten Preisaufgabe entstanden. Die Aufgabe verlangte eine historische und kritische Darstellung der Principien der Mechanik von Galilei's Zeiten an und überliess es dem Bearbeiter, den historischen und kritischen Theil entweder gesondert für sich, oder in einander verflochten zu bearbeiten. Der Verfasser vorliegender Schrift, der der zweite Preis zuertheilt worden ist, hat die erstere Behandlungsweise gewählt, indem er den historischen Theil völlig von dem kritischen getrennt hat.

In der Einleitung giebt der Verfasser zunächst ein, etwas skizzenhaftes, Bild von dem Standpunkt der Mathematik im siebzehnten Jahrhundert. Als Begründer der Algebra bezeichnet er Diophantus. Vieta war der erste, der für die Zahlen Buchstaben einführte und dadurch die Aufstellung allgemeiner Lehrsätze und Methoden ermöglichte. Erwähnt werden dann noch in Kürze die Fortschritte, die Neper, Gunther, Descartes, Pascal, Huyghens, Wallis und endlich Fermat zu verdanken sind. Nachdem dann der Verdienste der Griechen um die Geometrie gedacht, bespricht der Verfasser den durch Descartes geschaffenen Fortschritt, der uns in der analytischen Geometrie geworden ist. Roberval beschäftigte sich nun speciell mit dem Problem der Tangenten, und daran schliesst sich eine Besprechung des Umschwungs, der für die gesammte Mathematik durch die Infinitesimalrechnung herbeigeführt wurde. An die Würdigung der Verdienste Euler's durch Einführung des Begriffs der Function schliesst der Verfasser eine Darstellung des Standpunktes der Mechanik. Die Alten hatten zwar, wie aus Vitruv und den grossartigen architektonischen Werken hervorgeht, bereits eine grosse Anzahl sinn- und kunstreicher Instrumente, trotzdem aber befanden sie sich hier auf einem falschen Wege. Sie suchten die Erscheinungen auf dunkle und unbestimmte abstracte Begriffe zurückzuführen, auf deren Worterklärung die Sache dann meist ohne eigentliche Berücksichtigung der reellen Erscheinungen hinauslief. Hatten die Alten auch naturphilosophische Systeme, physikalische Theorien fehlen ihnen gänzlich. Eine Ausnahme hiervon macht vielleicht nur Archimedes, der eine Anzahl von Erscheinungen wirklich zu erklären versucht. Aber dies blieb ein vereinzelter Lichtpunkt. Aristoteles mit seiner Naturphilosophie erhielt sich durch das ganze Mittelalter hindurch als Autorität. Erst gegen Ende des sechszehnten Jahrhunderts fängt man an, diesen Weg zu verlassen. Es treten nun eine Anzahl von zunächst vereinzelten mechanischen Begriffen und Gesetzen auf, wie z. B. bei Benedetti der Begriff der beschleunigten Bewegung, bis zu Galilei, dem eigentlichen Begründer der Dynamik. Indem der Verfasser dann die Entwickelung im siebzehnten Jahrhundert bespricht, charakterisirt er

den Standpunkt der Mechanik in folgenden Worten: „Mit dem siebzehnten Jahrhundert war die theoretische Mechanik so weit fortgeschritten, dass ihr noch vor Allem der mathematische Ausdruck fehlte. Es wurde nun Aufgabe der Mathematiker, die speciellen mechanischen Untersuchungen allgemeinen Gesetzen unterzuordnen, d. h. die allgemeinen mechanischen Principien aufzustellen.“ Der Verfasser macht dann auf die verschiedene Bedeutung aufmerksam, die man dem Wort: „Principien“ unterlegen könne. Einmal kann nach dem Verfasser Princip ein allgemeines mechanisches Gesetz bezeichnen, ferner können Principien eine allgemeine Betrachtung enthalten, welche zur Integration einer ganzen Gattung mechanischer Differentialgleichungen führt, endlich können sie auch allgemeine Erfahrungssätze aussprechen.

Der Verfasser wendet sich nun zu der historischen Entwickelung der allgemeinen Principien der Mechanik. Zunächst ist es das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Nach Lagrange ist Guido Ubaldo del Monte der erste gewesen, der dieses Princip benutzt hat. Aber weder er noch Galilei haben die Tragweite und Wichtigkeit desselben erkannt. Johann Bernoulli war es, der dasselbe zunächst für das Gebiet der Statik fruchtbar machte. Nach ihm wurde dasselbe von Maupertuis und d'Alembert benutzt. Aber erst Lagrange hat es in völliger Allgemeinheit zur Grundlage der theoretischen Mechanik gemacht. Nachdem dann noch die Beweisversuche von Fourier und Lagrange und endlich die Ansichten von Jacobi und Carl Neumann besprochen sind, folgt das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft. Der Ausdruck „lebendige Kraft“ ist von Leibniz eingeführt worden. Das Maass der Kraft, das dadurch eingeführt wurde, gab zu einem Streite zwischen den Anhängern von Leibniz und Descartes Veranlassung, der erst durch d'Alembert erledigt wurde; seit dem hat sich dann die Unterscheidung zwischen Quantität der Bewegung und lebendiger Kraft herausgebildet. Zuerst ist dies Princip von Huyghens für einen speciellen Fall aufgestellt, und dann von Joh. Bernoulli als allgemeines Princip hingestellt worden. Das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes

ist in seiner ersten Aufstellung auf Huyghens zurückzuführen, die genaue Deduction ist aber Newton zu verdanken. Gleichzeitig von Euler, Daniel Bernoulli und d'Arcy wurde das Princip der Erhaltung der Flächen gefunden, wenn es auch bei ihnen unter verschiedenen Formen auftritt. Der erste Gedanke an das Princip der kleinsten Wirkung findet sich schon bei Hero. Maupertuis hat es dann gebraucht, um die Erscheinungen der Zurückwerfung und Brechung des Lichts zu erklären. Es ist indess nicht mit absoluter Gewissheit zu entscheiden, ob dasselbe nicht etwa schon von Leibniz aufgestellt ist. Lagrange gab demselben eine erweiterte Bedeutung, die nach Jacobi indess einer gewissen Beschränkung bedarf. Das d'Alembert'sche Princip ist in seiner ersten Aufstellung von Fontaine gegeben. Newton hatte dasselbe vorbereitet, und Joh. Bernoulli und Herrmann haben es bereits benutzt. Das Verdienst jedoch, dem Princip eine mathematische Form gegeben und es dadurch anwendbar gemacht zu haben, gebührt d'Alembert. Gauss hat das Princip des kleinsten Zwanges aufgestellt. Das Princip der Erhaltung der Kraft endlich ist zuerst von J. A. Mayer in Heilbronn ausgesprochen worden. Die allgemeinste Form desselben verdankt man Helmholtz, während Andeutungen des demselben zu Grunde liegenden philosophischen Gedankens sich bis zu Cicero herunter verfolgen lassen.

Nachdem der Verfasser so die historische Seite der Aufgabe besprochen, wendet er sich zu dem kritischen Theile seiner Arbeit. Zunächst stellt er die Gesichtspunkte auf, die ihn hier geleitet haben. Gemäss dem von der Facultät aufgestellten Programm ist das Ziel der Untersuchung: festzustellen, wie viel an jedem dieser mechanischen Principien nur ein selbstverständlicher logischer Grundsatz, wie viel die zum Gebrauche nothwendige mathematische Formulirung eines solchen Grundgesetzes, wie viel dagegen Ausdruck einer allgemein gültig gefundenen Erfahrungsthatsache, wie viel endlich nur eine durch den bisherigen Umfang der Erfahrungskenntniss wahrscheinlich gemachte Annahme ist. Der Verfasser stellt die einzelnen Fragen, die damit für jedes Princip gegeben, näher dar, namentlich in dem Zusammenhange, in dem dieselben untereinander zu fassen sind.

Die allgemeine Voraussetzung, die er seiner Forschung zu Grunde legt, ist nun die, dass in der Natur ausnahmslose Gesetzmässigkeit herrsche, d. h. also: er nimmt das Causalitätsprincip als nothwendige Voraussetzung an. Er setzt ferner Materie voraus, der Ausdehnung nach drei Richtungen und damit Theilbarkeit in ausgedehnte Massenpunkte zukommt, ferner Masse, die jeden qualitativen Unterschied aufhebt, und Undurchdringlichkeit. Diese Materie lässt er Ursachen unterworfen sein, d. h. er macht die Materie zur Trägerin von Kräften. Nachdem sodann das Causalitätsprincip einer näheren Erörterung unterzogen ist, wird die Natur der Ursachen, denen die Materie unterworfen ist, untersucht. Als Resultat dieser Untersuchung ergeben sich die beiden Sätze: „Alle Kräfte sind Bewegungskräfte“ und „Die Bewegungsursachen liegen ausserhalb des Bewegten.“ Nachdem der Verfasser sodann das Gesetz der Trägheit als Grundgesetz aufgestellt und dabei der Arbeiten von Wundt und namentlich der Untersuchung von C. Neumann über die Bedeutung desselben (siehe Fortschr. d. M. II. p. 39) gedacht, stellt er als letzten Grundsatz, der jeder mechanischen Betrachtung zu Grunde zu legen ist, den Satz auf, dass „Wirkung und Gegenwirkung einander gleich sind“, einen Satz, den auch Newton seiner Naturphilosophie zu Grunde gelegt hatte. Er wendet sich sodann zur kritischen Betrachtung der vorher historisch besprochenen Principien. Die Reihenfolge ist hier jedoch eine andere als dort, motivirt durch die sachliche Stellung, die sich durch die Untersuchung als Resultat für die einzelnen Principien ergeben hat. Zunächst wird das Princip von der Erhaltung der Kraft besprochen. Der Verfasser giebt diesem Princip die Stellung einer Grundhypothese, die ihrem Wesen nach schon in dem Satz: „Jede Wirkung ist ihrer Ursache äquivalent“ enthalten ist. Sie ergiebt sich ihm als eine Folgerung, zu der man durch Schlüsse der Analogie wie von der Materie zur Kraft gelangt, die aber zugleich ihre Begründung in der für den Naturforscher nothwendigen Annahme einer qualitativ und quantitativ unveränderlichen Materie mit Kräften findet. Der Verfasser bespricht sodann die mathematische Formulirung des Satzes nebst der nothwendigen Beschränkung und

wendet sich dann in längerer Auseinandersetzung zu der Stellung des Princips zur Erfahrung. Indem er hier die Worte von Helmholtz: „Die vollständige Bestätigung jenes Princips ist wohl als eine der Hauptaufgaben der nächsten Zukunft der Physik zu betrachten“ als Wegweiser bezeichnet, erläutert er zunächst kurz die Wahrscheinlichkeit desselben a priori, bespricht dann die hauptsächlichsten Phänomene der verschiedenen physikalischen Disciplinen der Reihe nach und untersucht, in wie fern sie für oder gegen die Richtigkeit des Princips sprechen. Er gelangt dabei zu dem Resultate, dass dasselbe zwar in der Erfahrung bereits vielfach bestätigt sei, dennoch aber nicht als Ausdruck einer allgemein gültigen Erfahrungsthatsache, sondern nur einer sehr wahrscheinlich allgemeinen betrachtet werden könne. Sodann geht er zur Betrachtung des Princips der virtuellen Geschwindigkeit und des d'Alembert'schen Princips über. Beide sind in ihrer Allgemeinheit rein logische Folgerungen aus der aufgestellten Grundhypothese, in ihrer mathematischen Form Lehrsätze, deren Richtigkeit auf mathematische Ausdrücke der Grundhypothese zurückgeführt werden kann. Beide können ihrerseits umgekehrt dazu dienen, den Satz von der Constanz der Kraft zu begründen. Beide aber können nur bei den sogenannten mechanischen Kräften als allgemein gültige Erfahrungsthatsachen betrachtet werden. Der Verfasser hat die beiden Principien unmittelbar der Besprechung der Gruudhypothese folgen lassen, weil beide zusammen die Mittel an die Hand geben, die mechanischen Probleme in solche der Analysis zu verwandeln. Während das erste diese Rolle für die Probleme der Statik übernimmt, leistet das d'Alembert'sche dasselbe für die dynamischen. Sie bilden also gewissermaassen das Fundament der ganzen Mechanik. Die Form aber, in der sie diese Aufgabe erfüllen, nöthigt oft dazu, sich noch nach weiteren Principien umzusehen. Diese können dann Folgerungen enthalten, welche entweder eine ganze Gattung von Problemen enthalten, oder den Aufgaben eine für die analytische Behandlung schicklichere Form geben. Sie können entstehen durch neue Begriffe und aus der Erfahrung neu herbeigebrachte Eigenschaften der Materie, welche

sogar zwingen könnten, obige Principien entweder noch nicht als die allgemeinsten anzuerkennen, oder auch dieselben ganz zu verwerfen. Es könnte aber auch ohne Vermehrung der Erfahrungskenntnisse ein Princip gefunden werden, welches, allgemeiner als die beiden, diese als Folgerungen enthält. Der Verfasser untersucht nun das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft, indem er zunächst die logische Herleitung desselben aus der Grundhypothese nach Helmholtz giebt und dann die mathematische Bedeutung und Anwendbarkeit erörtert. Nachdem sodann die Erfahrungsgültigkeit desselbeu besprochen, wird die Stellung desselben zum Princip der virtuellen Geschwindigkeit erörtert, wobei der Verfasser auf eine gewisse Analogie in der Stellung dieser beiden Principien zu einander mit den Sätzen von den Winkelpaaren bei Parallellinien geführt wird, von denen sich jeder ohne Schwierigkeit erweisen lässt, sobald nur einer als richtig erkannt ist. Der Verfasser schliesst daraus, dass die Mathematik zwar bei der Entwickelung mechanischer Gesetze grosse Dienste leiste, dass ihr aber die eigentliche Entdeckung derselben nicht zu verdanken sei, denn „die Formel ist nichts als der mathematische Ausdruck eines bereits im Geiste klar erkannten Zusammenhanges der Erscheinungen, und deswegen ist das, was aus der Formel herausgerechnet wird, schon darin enthalten.“ Die durch die Mathematik erhaltenen Resultate können daher nur auf die Sicherheit Anspruch machen, die der ersten Gleichung zukommt. Das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes, das der Verfasser dann bespricht, ist als rein mathematische Folgerung aus den bereits erörterten Principien zu betrachten. Der Verfasser unterzieht bei dieser Gelegenheit auch die Bezeichnung „Schwerpunkt“ einer Kritik und empfiehlt, statt desselben „Massenmittelpunkt“ oder mit Thomson „Trägheitsmittelpunkt“ zu substituiren. Das Princip der Erhaltung der Flächen tritt in verschiedenen Formen auf. Ist in demselben von Proportionalität der Flächen und Zeiten die Rede, so erscheint es als rein mathematische Folgerung, während es metaphysische Gültigkeit zu haben scheint, wenn man von Constanz der Momente der Quantitäten der Bewegung spricht. In letzterer Form lässt es sich

aus dem Grundsatz der gleichen gegenseitigen Wirkung und aus dem Trägheitsprincip folgern. In Beziehung auf seine Stellung zur Erfahrung wird bemerkt, dass es durch Beobachtung noch keinen Widerspruch gefunden, und namentlich in der Bewegung der Himmelskörper seine Bestätigung finde. Das Princip der kleinsten Wirkung tritt in dem Gewande eines an und für sich klaren Grundsatzes auf. Schon Poisson und Lagrange indess haben auf die Unhaltbarkeit hingewiesen, was sofort klar wird, wenn man an das Maass für die Grösse denkt, die zu einem Minimum werden soll. Dasselbe ist nur als mathematische Folgerung zu betrachten. Auch das Princip des kleinsten Zwanges endlich ist einer doppelten Auffassung fähig, in der es einmal als logischer Grundsatz erscheint, während es andererseits auch als rein mathematische Folgerung betrachtet werden kann.

Damit ist die Reihe der mechanischen Principien beendigt und der Inhalt des gestellten Themas erschöpft. Zum Schluss giebt der Verfasser noch einige Andeutungen über die Anwendung dieser Principien auf chemische Processe und auf das organische Leben. O.

J. C. V. Hoffmann. Die Principien des 1ten Buches von Euklid's Elementen. Hoffmann Z. III. 114–143.

Der Aufsatz ist eine sehr eingehende logische Kritik der Erklärungen (ὅροι), Forderungssätze (αἰτήματα) und Grundsätze (κοιναὶ ἔννοιαι) Euklid's, in welcher namentlich die zu weit gehende Behauptung widerlegt werden soll, dass Euklid's Geometrie in jeder Beziehung ein unübertroffenes Meisterstück sei. Die Richtigkeit der Charakteristik kann man durchweg zugestehen; dennoch bleibt sie fern davon, das vorgesetzte Ziel zu erreichen, weil sie weder ein realisirtes Muster aufstellt, noch von ihrem Ideal irgend eine Rechenschaft giebt. Der Gegensatz gegen das Getadelte, z. B. die Starrheit, bleibt stets im Dunkeln. In einem Hauptfalle ist sogar die als selbstverständlich unausgesprochene erweislich eine widersprechende Forderung. Dass bei Grundbegriffen die Definition den Begriffsinhalt nicht positiv geben, sondern nur limitiren kann, und dass nicht die allgemeinsten

Begriffe es sind, welche dem gemeinen Denken entlehnt werd können, leuchtet wohl ein. Hätte der Verfasser hierauf Beda genommen, so hätte er Euklid's Zuwerkegehen aus Gesich punkten würdigen müssen, denen er durchweg fern bleibt.

H.

F. Reidt. Zur Methode des Unterrichts in der Algebr
Hoffmann Z. III. 431-442.

Die erste Frage ist, wie ein Schüler den algebraischen A satz einer Aufgabe erlernen könne. Eine wesentliche Reg für den betreffenden Unterricht ist hier genannt: die Gleichung ohne Unterschied zwischen Bekannt und Unbekannt erst als R lationen aufzustellen. Im übrigen empfiehlt der Verfasser Ueb gang von der speciellen zur allgemeinen Aufgabe. Dass si das Thema hätte weit erschöpfender behandeln lassen, gewa man leicht. Eine zweite Frage betrifft die Einführung der D terminantenrechnung in den Schulunterricht, welche an bairisch Gymnasien bereits stattgefunden hat, und hier befürwortet wi Bearbeitungen für diesen Zweck giebt es, die jedoch nicht l friedigen. Der gewöhnliche Fehler ist, dass man um der e mentaren Darstellung willen die Einfachheit der Schlüsse u die systematische Ordnung zerstört. H.

Zerlang. Ueber mathematische Beweisführung.
Hoffmann Z. III. 24-27.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen).

AD. DRONKE. Einleitung in die höhere Algebra. 2. Theil. Halle. Nebert.

Im Anschlusse an den ersten Theil (F. d. M. II. p. 18) wird die Lösung der Gleichungen niederer Grade, die Lehre von den Permutationen, der binomische und polynomische Satz und die Theorie der Kettenbrüche vorgetragen. Es folgt eine Behandlung der Functionen einer Veränderlichen und deren Ableitung, der Reihentheorie und der allgemeinen algebraischen Gleichungen.

No.

M. A. STERN. Ueber J. Todhunter's „elementary treatise on the theory of equations with a collection of examples.“ Gött. Anz. 1872. 719-720.

Anzeige und kurze Besprechung. No.

P. L. M. BOURDON. Éléments d'arithmétique. 35me édition. 8º. Paris. Gauthier-Villars.

P. L. M. BOURDON. Éléments d'algèbre avec notes de M. Prouhet. 14me édition. 8º. Paris. Gauthier-Villars.

J. GROLOUS. Études sur les équations. Inst. XL. 256.

Siehe Abschn. V. Cap. 2.

MALEYX. Séparation des racines des équations à un inconnue. Nouv. Ann. (2) XI. 404-418.

Die Wurzeln von $F(x) = 0$ liegen zwischen den Werthe welche $\varphi(x) F(x) - f(x) F'(x) = 0$ und $f(x) = 0$ oder machen, wenn φ und f beliebige algebraische Functionen sin aber f mit F keine Wurzel gemeinsam hat. No.

G. FROBENIUS. Ueber die algebraische Auflösbarke der Gleichungen, deren Coefficienten rationale Fun tionen einer Variabeln sind. Borchardt J. LXXIV. 254-27

Die Resultate dieses Aufsatzes sind die bekannten Galoi schen. Die Methode beruht darin, die Veränderliche x, von d die Coefficienten der rationalen Function $f(y, x)$ abhängen, vo einem Werthe a ausgehen und auf einem beliebigen, aber dur keinen kritischen Punkt gehenden Wege zum Anfangswert zurückkehren zu lassen. Dadurch wird eine vom Wege abhängi Vertauschung der Wurzeln $y_1, y_2, \cdots y_n$ von $f(y, a) = 0$ vorgenon men. Lässt man x alle möglichen Werthe durchlaufen, so erhä man das zu $f(y, a) = 0$ gehörige conjugirte System (die Grup von $f = 0$). Lässt man nur die Wege zu, bei denen bestimm algebraische Functionen von x unverändert bleiben $z, z', \cdots,$ erhält man das conjugirte System unter Adjunction von $z, z',$ Mit Hülfe dieser geometrischen Veranschaulichung ergeben si die Galois'schen Sätze in einfacher Weise. No.

W. MATZKA. Horner's eigentliche Auflösungsweise a gebraischer Ziffergleichungen. Prag. Abh. (6) V.

Die Horner'schen Methoden werden theils in wortgetreu Uebersetzungen, theils in Auszügen vorgetragen, und die äusse knapp gehaltenen Vorschriften derselben durch Zusätze und B spiele erläutert. No.

1. TRANSON. Simples notes 1) sur la limite des racines, 2) sur un théorème de Cauchy, 3) sur une question de licence. Nouv. Ann. (2) XI. 254-261.

Die zweite Note beweist $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} < \frac{\Sigma a_\lambda}{n}$; die dritte bringt eine Aufgabe über Rouletten. No.

F. REIDT. Ueber irreducible cubische Gleichungen. Schlömilch Z. XVII. 430-432.

Es sei $x^3 - px - q = 0$, und p und q seien positiv. Setzt man $w_1 = \sqrt{p}$, $w_n = \sqrt{p + \frac{q}{w_{n-1}}}$, so ist für wachsende n, $\lim (x - w_n) = 0$, und x liegt zwischen zwei auf einander folgenden w. No.

E. GERONO. De la réalité des racines de l'équation du troisième degré en s

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-s & b'' & b' \\ b'' & a'-s & b \\ b' & b & a''-s \end{vmatrix},$$

où b, b', b'' représentent des quantités différentes de zéro. Nouv. Ann. (2) XI. 305-309.

No.

A. GULDBERG. Sur la résolution des équations du 2ième, 3ième, 4ième degré. Forh. af Christ. 1872. 144-169.

Tabellen zur numerischen Berechnung der Wurzeln von algebraischen Gleichungen 2ten, 3ten und 4ten Grades. L.

O. E. BJÖRLING. Summarisk framställning af methoderna för algebraisk lösning af den allmänna 4:de grads eqvationer. (1te Abth.) Westerås.

Erwähnt werden 1) die Methode von Ferrari, ihre Erweiterung von Simpson und Lagrange, sowie zwei Methoden von Grassmann (1869 siehe F. d. M. II. p. 49), und Jourdain (1859),

die dem Verfasser mit der ersteren im Wesentlichen überein stimmen scheinen, 2) die Methode von Descartes, vervollstän von Grunert (Grunert Arch. XXXIX.) nebst der dahin gehö den von Ampère (Corresp. math. et phys. LX.); 3) die ält Methode von Euler. Bg.

A. B. KEMPE. On the solution of equations by mech nical means. Messenger (2) II. 51-52.

Es wird $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ in die Form $c_0 + c_1$ co $+ \cdots + c_n \cos n\theta = 0$ gebracht. Diese letztere Form ka leicht durch ein Räderwerk graphisch dargestellt werden.

Glr. (O.)

A. VECCHIO. Sulle equazioni trascendenti. Battaglini G. 171—172.

Der Verfasser untersucht die Gültigkeit der Gleichung

$$\operatorname{tg} x = \frac{ax}{x^2 + b},$$

welche eine Verallgemeinerung der in der Wärmetheorie auftret den Gleichung

$$4x \cos x + (3x^2 - 4) \sin x = 0$$

ist. M.

G. F. W. BÄHR. Sur les racines des équations

$$\int_0^\pi \cos(x \cos\omega)\, d\omega = 0, \quad \int_0^\pi \cos(x \cos\omega) \sin^2\omega\, d\omega = 0.$$

Arch. Néerl. VII. 351-358, Versl. en Mededeel. (2) 1872. 325-333.

Siehe Abschn. VI. Cap. 4.

J. J. SYLVESTER. Solution of question 3230. Educ. T XVII. 19.

Gegeben

$$x(x+y)(x+z)(x+t) = i(x-y)(x-z)(x-t),$$
$$y(y+x)(y+z)(y+t) = j(y-x)(y-z)(y-t),$$
$$z(z+x)(z+y)(z+t) = k(z-x)(z-y)(z-t),$$
$$t(t+x)(t+y)(t+z) = l(t-x)(t-y)(t-z),$$

zeige, dass nur ein einziges System von Werthen $xyzt$ diesen Gleichungen genügt und finde die Lösung.

Man erhält:

$$x = (i+j+k+l)\frac{i^3}{(i-j)(i-k)(i-l)} \text{ u. s. w.}$$

und sieht leicht, dass

$$x+y+z+t = i+j+k+l.$$

Hi.

J. Wolstenholme. Solution of question 3528. Educ. Tim. XVII. 24-25.

Wenn $u = x_1(1-x_2) = x_2(1-x_3) = \cdots = x_n(1-x_{n+1}) = x_{n+1}(1-x_1)$, wo $x_1\, x_2 \cdots x_{n+1}$ alle verschieden sind, so wird u bestimmt durch die Gleichung:

$$\left\{1+(1-4u)^{\frac{1}{2}}\right\}^{n+1} = \left\{1-(1-4u)^{\frac{1}{2}}\right\}^{n+1},$$

nachdem der Factor $(1-4u)^{\frac{1}{2}}$ ausgeworfen ist. Hi.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

A. Clebsch. Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig. Teubner. Recens. von Th. Kötteritzch, Schlömilch Litz. XVII. 110-112.

Mit der Herausgabe dieses Werkes verfolgte der Verfasser den Zweck, die Behandlungsweise der algebraischen Formen, wie sie sich für ihn durch seine eigenen Untersuchungen und die eng mit ihnen zusammenhängenden Arbeiten Gordan's allmählich herausgebildet hatte, dem allgemeinen mathematischen Publicum zugänglich zu machen. Gegenüber den auf denselben Gegenstand bezüglichen Darstellungen Anderer unterscheidet es sich wohl, abgesehen von dem eigentlich Neuen, das es zum ersten Male

im Zusammenhange bringt, hauptsächlich durch den streng systematischen Gang der Entwickelung: gewisse allgemeine Probleme werden von Vorneherein als Endziel hingesetzt und die einzelnen Probleme nur in soweit behandelt, als sie die betreffenden allgemeinen Ueberlegungen zu erläutern im Stande sind. Eben hierdurch ist die Beschränkung auf binäre Formen herbeigeführt: bei mehr Veränderlichen lassen sich die betreffenden Probleme, die bei ihnen gleichwie im binären Gebiete auftreten, noch nicht mit der Vollständigkeit erledigen, als es zum Zwecke einer zusammenhängenden Darstellung wünschenswerth scheinen muss.

Die Definition, wie sie Clebsch im Eingange seines Werkes für die invarianten Bildungen (eigentliche Invarianten, Covarianten etc.) zu Grunde legt, ist die rein formale: Invarianten sind aus den Coefficienten gegebener Formen und beliebig vielen Reihen von Variabeln gebildete Ausdrücke, die sich bei einer linearen Substitution bis auf eine als Factor vortretende Potenz der Substitutionsdeterminante reproduciren. Daran anschliessend wird sofort eine Methode entwickelt, um Invarianten mit mehreren Reihen Veränderlicher aus solchen mit nur einer Reihe zusammenzusetzen, es wird insbesondere sofort die Cayley-Aronhold'sche symbolische Darstellung dieser Bildungen eingeführt, deren principielle und ausschliessliche Anwendung die Gestalt, in der die Invariantentheorie bei Clebsch auftritt, wenigstens äusserlich am meisten characterisirt.

Der Verfasser lässt weiterhin einen Abschnitt folgen über die Bedeutung der binären Formen in der projectivischen Geometrie, wobei denn vor Allem Veranlassung ist, die Beziehung darzulegen, die zwischen dem Verschwinden invarianter Bildungen binärer Formen und dem Doppelverhältniss der Relationen der Geometrie besteht. Ueberhaupt wird im ganzen Werke die Verwerthung der erhaltenen algebraischen Resultate, wo sich leichte Gelegenheit dazu bietet, hervorgehoben; dadurch erscheint sie nicht als Hauptzweck, sondern als beiläufige Anwendung.

Weiter werden zunächst solche invariante Bildungen erläutert, die wegen ihrer geometrischen Bedeutung besonders wichtig scheinen: die Resultanten und Discriminanten, sowie überhaupt

die Formen zweiter, dritter und vierter Ordnung. Dabei wird insbesondere die Auflösung der Gleichungen 2ten, 3ten, 4ten Grades, wie sie sich unter Anlehnung an die Invariantentheorie ergiebt, in ausführlicher Weise entwickelt, wie denn diese ersten Abschnitte auch für denjenigen, der nicht beabsichtigt, tiefer in die eigentliche Theorie einzudringen, der sich vielmehr begnügen will, die Modificationen und Verbesserungen kennen zu lernen, welche sie den elementaren Theilen der Gleichungstheorie angedeihen lässt, des Beachtenswerthen die Fülle bietet.

Der sich nun anschliessende Abschnitt über simultane Formen giebt den Uebergang zu den allgemeinen Untersuchungen über die Endlichkeit der Formensysteme, wie sie den eigentlichen Schwerpunkt der ersten Hälfte des Werkes bilden. Dabei werden wieder eine Reihe einfacher Beispiele: Systeme von beliebig vielen quadratischen Formen, Systeme zweier cubischer Formen etc. entwickelt; auch findet ein interessantes Transformationsproblem vom neunten Grade seine Besprechung, das sich auf die Lösung von Gleichungen niederen Grades zurückführen lässt.

So ist dann allmählich so viel Einzelmaterial entwickelt, dass der Gordan'sche Fundamentalsatz der Theorie binärer Formen, demgemäss jede binäre Form (sowie jedes System binärer Formen) ein endliches Formensystem besitzt, Interesse und Verständniss finden kann. Ohne hier auf die Bedeutung dieses Theorems näher einzugehen (man vergl. das bez. Referat in diesen Fortschritten, I. p. 60), sei nur die Form des für dasselbe von Gordan erbrachten Beweises hervorgehoben. Der Satz geht nämlich nicht sowohl aus begrifflicher Auffassung dessen, was eine Invariante ist, a priori hervor, sondern er erwächst aus einer Methode, die gestattet, alle Invarianten gegebener Formen vermöge eines bestimmt fortschreitenden Processes (des Ueberschiebungs-Processes) wirklich zu bilden. Man hat sich dann nämlich durch richtiges Anordnen der so entstehenden unendlichen Reihe von Bildungen zu überzeugen, dass sich in der That von einer gewissen Stelle ab alle Formen aus bereits vorangegangenen als ganze Functionen zusammensetzen lassen. In diesen allgemeinen Gang, dessen Durchführung eine lange Reihe

schwieriger combinatorischer Ueberlegungen erfordert, flicht Clebsch die Theorie der Formen fünften und sechsten Grades als Beispiele ein und stellt vollständige Systeme für dieselben auf die nicht nur endlich, sondern überhaupt wohl unter den endlichen die kleinstmöglichen sind.

Die weiteren Abschnitte des Werkes sind den erstgenannten typischen Darstellungen binärer Formen gewidmet, wie sie zuerst von Hermite aufgestellt wurden, und deren Zweck es hauptsächlich ist, die unbegrenzte Reihe der zu gegebenen Formen gehörigen Bildungen durch rationale Functionen einer endlichen Anzahl derselben zu ersetzen. Insbesondere bespricht Clebsch die typischen Formen, die man den Grundformen selbst ertheilen kann, wenn man, falls sie existiren, zwei lineare Covarianten oder, in Ermangelung derselben, drei quadratische Covarianten statt der gewöhnlichen Coordinaten einführt. Ohne hier auf alle dabei berührten einzelnen Probleme einzugehen, was nicht wohl möglich scheint, sei hervorgehoben, dass Clebsch dort Gelegenheit nimmt, das Problem der Transformirbarkeit zweier Formen in einander, die Auflösung der Gleichungen vierten Grades unter Benutzung der typischen Form, verschiedene Aufgaben aus der Transformationstheorie der elliptischen Functionen etc. etc. zu besprechen und, soweit es die bis dahin entwickelten algebraischen Hülfsmittel gestatten, durchzuführen.

Die Vorrede zu diesem Werke hat Clebsch vom September 1871 datirt; sie wurde, soviel Referent bekannt, in Anlehnung an die vom Verfasser wiederholt gehaltenen Vorlesungen über Formentheorie wesentlich im Winter 1870/71 niedergeschrieben. Seitdem hat sich Clebsch wiederholt damit beschäftigt, in ähnlicher systematisch abgeschlossener Weise wie hier die binären Formen, auch höhere Probleme zu erledigen. Es sei mit Bezug darauf nur auf die beiden Referate über die Abhandlungen von Clebsch: Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie (siehe das folgende Capitel) und: Ueber das Fünfseit und die Gleichungen fünften Grades (Clebsch Ann. III. p. 33 siehe Fortschr. d. M. III. p. 31) verwiesen. Auch sei der Selbstanzeige gedacht, die Clebsch von seinem Buche in den Göttinger Anzeigen gegeben

hat (1872, Februar), sowie erwähnt, dass in der neuerdings erschienenen Biographie desselben (Clebsch Ann. VII.) die Arbeiten über Invariantentheorie, wie sie hier in Betracht kamen, ausführlich besprochen sind. Kln.

L. Kronecker. Zur algebraischen Theorie der quadratischen Formen. Berl. Monatsber. 1872. 490-504.

Behandlung des Problems: Eine positive quadratische Form von möglichst grosser Determinante zu bestimmen, die für vier gegebene Werthsysteme der drei Variabeln gewisse vorgeschriebene Werthe annimmt; Anwendungen auf das den grössten Raum einschliessende Tetraeder von gegebenen Seitenflächen, und auf das von einem bestimmten Mittelpunkt aus einem gegebenen Tetraeder umschriebene Ellipsoid von kleinstem Volumen. Die algebraische Frage wird dadurch erledigt, dass die Form in die Gestalt $v_1x_1^2 + v_2x_2^2 + v_3x_3^2 - (v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3)^2 + w_1x_2x_3 + w_2x_3x_1 + w_3x_1x_2$ gebracht wird; hier lässt sich zeigen, dass die Determinante der Form sich mit Beibehaltung der v verkleinern lässt, so lange die Coefficienten w nicht sämmtlich gleich Null sind. No.

J. Siacci. Intorno ad una trasformazione simultanea di due forme quadratiche ed alla conica rispetto a cui due coniche date sono polari reciproche. Atti di Torino VII. 758-771.

G. Cantor. Algebraische Notiz. Clebsch Ann. V. 133-135.

Beweis des Satzes: „Wenn $w_1, w_2, \cdots w_n$ von einander verschiedene gegebene Grössen sind, so lassen sich in dem linearen Ausdrucke $x_1w_1 + \cdots + x_nw_n$ die unbestimmten Grössen x als ganze Zahlen stets so annehmen, dass derselbe für alle $n!$ verschiedenen Permutationen der $w_1, \cdots w_n$ von einander verschiedene Werthe annimmt." No.

O... Soluzione d'un quistione (Siacci). Battaglini G. X. 307-312.

Sind U und V zwei quadratische Formen mit n Variab und U', V' ihre Reciproken, d. i. solche quadratische Forn deren Coefficienten die algebraischen Complemente der Elem der Discriminanten A und B von U und V sind, so kann r durch dieselbe lineare Substitution U in AV', und V in BU' tr formiren. Die Determinante C der Substitution ist symmetr und gleich der mittleren geometrischen Proportionale der I criminanten A' und B' von U' und V'.

Betrachtet man nun C als Discriminante einer quadratisc Function W', so kann man durch dieselbe lineare Substitut die drei quadratischen Formen so transformiren, dass die ne nur die Quadrate der Variabeln enthalten. Und sind G_r und zwei entsprechende Coefficienten der U' und V', die so tra formirt sind, so ist der entsprechende Coefficient von W' dies $\sqrt{G_r \cdot H_r}$. Für $n = 3$ ist W' ein Kegelschnitt, in Bezug auf welc U' und V' reciproke Polaren sind. Diese Sätze werden vom V fasser bewiesen. Mz.

LAGUERRE. Sur les covariants des formes binaires. Inst. LX. 77-78.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. B.

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, Invarianten, Covarianten, symmetrische Functionen.

A. BRILL. Ueber Elimination aus einem gewissen Syste von Gleichungen. Clebsch Ann. V. 378-396.

Hat man vier Gleichungen $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$, $q =$ welche in den vier Unbekannten x_1, x_2, x_3, x_4 bezw. zu de Grad m_1, m_2, m_3, m_4; n_1, n_2, etc. ansteigen, so ist der Grad d

Eliminationsgleichung, unter Voraussetzung allgemeiner Coefficienten in den Gleichungen, für jede der 4 Variabeln derselbe, und zwar gleich $\Sigma + m_1 n_2 p_3 q_4$, wo $\Sigma +$ eine Summe von 4! Gliedern bedeutet, welche aus der Determinante $\Sigma \pm$ dadurch hervorgeht, dass man allen Gliedern positives Vorzeichen giebt. Dieser Ausdruck lässt sich nach den aus 1, 2, 3 Reihen gebildeten (und dann nur von einer, zweien, dreien der Gleichungen abhängenden) Partialdeterminanten (in uneigentlichem Sinn) anordnen. Es bedeutet dann z. B. $\Sigma + m_i n_k$ den Grad in Bezug auf x_k (bezw. x_i) der durch Elimination von x_i $[x_k]$ aus den beiden ersten Gleichungen entstandenen Gleichung. Kennt man also die 6 den beiden ersten Gleichungen entsprechenden Gradzahlen $\Sigma + m_i n_k$, so kann man den Grad der Resultante bilden, ohne die $m_i \cdots q_i$ einzeln zu kennen.

Diese Bemerkung kann man mit Vortheil verwenden, wenn es sich um die Anzahl der gemeinsamen Lösungen zweier Gleichungssysteme handelt, deren jedes zweien Gleichungen äquivalent ist. Jedem der zwei Systeme entsprechen 6 Zahlen der obigen Art, aus denen sich die Zahl der Beiden genügenden Lösungen zusammensetzt. Es ist dies insbesondere für den Fall wichtig, dass die Systeme die Variabeln symmetrisch enthalten, wo denn je die 6 Zahlen unter einander gleich sind. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn es sich um die Bestimmung der Werthsysteme x_1, x_2, x_3, x_4 handelt, welche alle Determinanten des aus 4 Horizontal- und 7 Verticalreihen bestehenden rechteckigen Systems:

$$S = \|\varphi_i(x_k)\| \qquad i = 1, 2, \cdots 7; \;\; k = 1, 2, \cdots 4;$$

(wo die φ ganze Functionen m^{ten} Grades je der eingeklammerten Variabeln sind) gleichzeitig zum Verschwinden bringen. — Geometrisch kann man diese Aufgabe so deuten: Man soll drei Punkte einer Geraden so bestimmen, dass alle einer 6-fach unendlichen Schaar von Curven m^{ter} Ordnung angehörigen Curven, welche durch dieselben gehen, sich noch in einem weiteren Punkte der Geraden schneiden.

Man führt ohne Mühe diese Aufgaben zurück auf die folgenden vier einfacheren:

1. Die Anzahl der Werthsysteme zu bestimmen, welche

irgend 4 viergliedrige Determinanten des Systems S zum Ver schwinden bringen (wobei hier wie im Folgenden die Ueber einstimmung gewisser Reihen in den verschiedenen Determinante nicht berücksichtigt wird). Indem man die Formel $\Sigma + m_1 n_2 p_3 q$ anwendet, erhält man (unter Ausschluss der Lösungen, in welche 2 Variable gleiche Werthe haben): $24 (m-3)^4$.

2) Die Anzahl der Werthsysteme zu bestimmen, welch irgend 2 viergliedrige Determinanten und die dreigliedrigen D terminanten eines aus irgend 3 Verticalreihen von S gebildete Systems (welches 2 Gleichungen äquivalent ist) zum Verschwinde bringen. Man bildet die den Ausdrücken $\Sigma + m_i n_k$ und $\Sigma + p_i$ entsprechenden Werthe und erhält: $12 (m-2)(m-3)^3$.

3) Die Anzahl der Werthsysteme, welche eine viergliedrig Determinante und das aus 2 Verticalreihen gebildete System vo zweigliedrigen Determinanten zum Verschwinden bringen, zu bestimmen. Man multiplicire die 4 Zahlen $\Sigma + m_1 n_2 p_3$ u. s. w bezw. mit $q_1, \cdots q_4$ und erhält als Summe: $4 (m-1)(m-2)$ $(m-3)^2$.

4) Die Anzahl der Werthsysteme, welche alle Element einer Verticalreihe auf Null reduciren, ist: $m(m-1)(m-2)$ $(m-3)$.

Dieses Beispiel lässt das Verfahren, welches der Verfasse zur Lösung der analogen Aufgaben für n Variable eingeschlage hat, zur Genüge erkennen. Derselbe findet, dass für ein System S von $(k+i)$ Vertical- und k Horizontalreihen $(i<k<m)$ die Zahl der Werthsysteme, die alle k-gliedrigen Determinanten zum Verschwinden bringen, gleich $\binom{m-k+1}{i+1}$ ist ($k-i-1$ von de k Unbekannten als fest angenommen vorausgesetzt.). Bl.

H. Nägelsbach. Ueber die Resultante zweier ganze Functionen. Schlömilch Z. XVII. 331-346.

Diese Functionen seien f und g, ihre Grade bez. der m^{te} un n^{te} und $m > n$. Nach dem Vorgange von Euler ersetzt man durch eine Function h vom n^{ten} Grade. Die Resultante von g und h

welche mit der von f und g identisch ist, erscheint in der Bézont-schen Form als Determinante n^{ter} Ordnung. Die Identität der Resultante von f und g mit dieser Determinante, deren Ordnung gleich der kleineren der Gradzahlen, wird auch noch durch Umformung des Productes der Wurzeldifferenzen erwiesen. St.

C. JORDAN. Recherches sur les substitutions. Liouville J. (2) XVII. 351-368.

Das erste Theorem ist eine Verallgemeinerung des Satzes, dass jede Affect-Function eine cyklische Function sei; es zeigt nämlich, dass jede transitive Gruppe Substitutionen besitze, welche alle Elemente umstellen. Im zweiten und dritten Theoreme wird bewiesen, dass es im allgemeinen keine $(k+2)$-fach transitiven Gruppen vom Grade $m+k$ und der Ordnung $(m+k)(m+k-1)\cdots m(m-1)$ giebt, ausser, wenn $k=1$ und m eine Primzahlpotenz ist.

Im zweiten Theile der Arbeit wird eine Methode zur Construction von Gruppen einer Primzahlklasse q gegeben. Ist q nicht von der Form 2^n-1, so giebt es nur eine solche Gruppe, welche einfach transitiv ist; ist q von jener Form, so giebt es noch zwei andere Gruppen, von denen die eine doppelt, die andere dreifach transitiv ist. No.

C. JORDAN. Sur l'énumération des groupes primitifs pour les 17 premiers degrés. C. R. LXXV. 1754—1757.

Veranlassung zur Aufnahme der Untersuchungen (F. d. M. III. 46) war, dass sich in die frühere Arbeit Ungenauigkeiten eingeschlichen hatten. Alle primitiven Gruppen der 13 ersten Klassen und 17 ersten Grade gehören mit 7 Ausnahmen zu 6 Kategorien, welche Herr Jordan angiebt. No.

C. JORDAN. Note sur la théorie des substitutions. Battaglini G. X. 116.

Der von H. Janni (Battaglini J. IX. 280-340, siehe F. d. M. III. p. 47) veröffentlichte Anfang einer Theorie der Substitutionen

ist eine fast vollständige Wiedergabe eines Capitels des Traité des Substitutions von Jordan (1869). Herr Jordan macht auf eine in dieser Reproduction stehen gebliebene Ungenauigkeit (No. 3 von Janni, 49 des Traité) aufmerksam. M.

G. Janni. Esposizione della teoria delle sostituzioni. Battaglini G. X. 198-206.

Uebersetzungen aus Dirichlet, Jordan, Serret mit Quellenangabe. No.

L. Sylow. Théorèmes sur les groupes de substitutions. Clebsch Ann. V. 584–594.

Bezeichnet n^α die höchste Potenz der Primzahl n, welche die Ordnung von G theilt, so enthält diese Gruppe eine andere von der Ordnung n^α. Hieran schliessen sich ähnliche Theoreme über enthaltene Gruppen. Wenn die Ordnung einer algebraischen Gleichung $= n^\alpha\, n_1^{\alpha_1}\, n_2^{\alpha_2} \cdots$ ist, wobei $n, n_1, n_2, \cdots$ Primzahlen sind, und $n > n_1^{\alpha_1}\, n_2^{\alpha_2} \cdots$, $n_1 > n_2^{\alpha_2} \cdots$ ist, so ist die Gleichung durch Wurzeln lösbar. Es folgt eine Untersuchung der wichtigsten Eigenschaften transitiver Gruppen. No.

O. Hesse. I determinanti elementarmente. Traduzione di V. Valeriani. Battaglini G. X. 217-230.

Uebersetzung aus dem Deutschen, siehe F. d. M. III. p. 50. O.

J. Siacci. Teorema sui determinanti ed alcune sue applicazioni. Att. di Torino. VII. 772-783.

C. J. Monro. Baltzer on the number of termes in a determinant with a vanishing diagonal. Messenger (2) II. 38-39.

Verbesserung eines Irrthums in Baltzer's „Theorie und Anwendung der Determinanten"; 3. Ausg. p. 29 § 42, 1870 (siehe F. d. M. II. p. 80). Glr. (O.)

L. Ritsert. Die Herleitung der Determinante für den Inhalt des Dreiecks aus den drei Seiten. Schlömilch Z. XVII. 518-520.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 3.

M. Albeggiani. Sviluppo di un determinante ad elementi binomii. Battaglini G. X. 279-293.

Entwickelung der Determinante

$$|c_{r,s}\ a_{r,s} + d_{r,s}\ b_{r,s}| \qquad (r,s = 1,\ 2 \cdots n)$$

nach dem Satze von La-Place und Anwendung auf vier Aufgaben (a. a. O. p. 188). St.

J. J. Weyrauch. Zur Theorie der Determinanten. Borchardt J. LXXIV. 273-276.

Die Anzahl der Glieder einer Determinante n^{ter} Ordnung, in deren Hauptdiagonale alle Elemente $= 0$ sind, beträgt

$$n!\left\{\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right\}.$$

Diese Zahl ist bereits in Baltzer's Theorie der Determinanten p. 29 (siehe F. d. M. II. p. 80) angegeben; jedoch dürfte die Ableitung derselben kaum unanfechtbar sein. Daraus folgt mittelst eines bekannten Satzes (siehe a. a. O.) sofort die Anzahl derjenigen Glieder der allgemeinen Determinante n^{ter} Ordnung, die m bestimmte Elemente der Hauptdiagonale enthalten etc. St.

O. Hesse. Ein Cyclus von Determinanten-Gleichungen. (Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theorems). Borchardt J. LXXV. 1–12.

Die Betrachtung eines vollständigen Pascal'schen Sechseckes führt bekanntlich auf eine Figur von 20 Punkten und 15 Geraden, deren Beziehung durch folgenden Satz ausgedrückt werden kann: „Wenn man dreien geraden Linien ϱ, welche von demselben Punkt ∂ ausgehen, drei Dreiecke einbeschreibt, so schneiden sich die correspondirenden Seiten von je zweien dieser Dreiecke in drei Punkten, welche in einer geraden Linie r liegen, und die drei

den Dreieck-Paaren entsprechenden geraden Linien r schneiden sich wieder in einem Punkte ∂." Der analytische Beweis des Satzes fordert ein System von 20 Identitäten. Als einen speciellen Fall des vorstehenden Satzes lässt sich der folgende ansehen: „Wenn man in einem Pascal'schen (einfachen) Sechsecke die drei Diagonalen zieht, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, so bilden die geraden Seiten des Sechseckes, die ungeraden Seiten und die drei Diagonalen drei Dreiecke, welche dreien von einem Punkte ausgehenden geraden Linien ϱ einbeschrieben sind. Die entsprechenden Seiten je zweier von diesen Dreiecken schneiden sich paarweise in einer geraden Linie r, und die drei geraden Linien r schneiden sich wieder in einem Punkte." (Entsprechend einander sind je zwei Gegenseiten des Sechseckes und die Diagonale, welche das 3[te] Paar von Ecken verbindet). Denkt man sich die Gleichung des Kegelschnittes in der Form $\varDelta \equiv u_0^0 u_1^1 - u_1^0 u_0^1 = 0$, wo die u homogene lineare Functionen der Punkt-Coordinaten bedeuten, und bezeichnet man für drei Eckpunkte $\alpha, \gamma, \varepsilon$ die Werthe der gleichen Quotienten $u_0^0 : u_0^1 = u_1^0 : u_1^1$ bez. mit $\alpha_0 : \alpha_1$ etc.; für die drei anderen β, δ, ζ die von $u_0^0 : u_1^0 = u_0^1 : u_1^1$ mit $\beta_0 : \beta_1$ etc., so ist offenbar

$$[\alpha\beta] \equiv \begin{vmatrix} u_0^0, & u_1^0, & \alpha_0 \\ u_0^1, & u_1^1, & \alpha_1 \\ \beta_0, & \beta_1, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der Geraden $\alpha\beta$. Diese Formel bildet den Ausgangspunkt für eine allgemeine Entwickelung, in welcher $\varDelta$ durch ein Schema $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ersetzt, und die Anzahl der Coefficienten $\alpha, \beta \cdots$ entsprechend erhöht ist. Man erhält 20 Identitäten, die für $n = 1$ den Beweis des zweiten Satzes enthalten. St.

F. J. Studnička. Ueber eine besondere Art von symmetralen Determinanten und deren Verwendung in der Theorie der Kettenbrüche. Prag. Ber. 1872, 74-78.

Ableitung der Euler'schen independenten Formeln für die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche eines Kettenbruches,

dessen Theil-Zähler sämmtlich $= + 1$, aus der bekannten Determinantenform derselben. St.

F. J. Studnička. Beitrag zur Theorie der Determinanten. Prag. Ber. 1872, 78-80.

Eine „bisher unbeachtete Eigenschaft der Determinanten", die aber schon in Baltzer's Theorie der Determinanten § 3, 10 zu derselben Deduction gebraucht ist, wie von Herrn Studnička. St.

F. J. Studnička. Neuer Beweis des Theorems über das Verhältniss zwischen Determinanten und Subdeterminanten des ursprünglichen und adjungirten Systems. Casopis I. 6-10.

Bezeichnet A_{pq} die zu dem Elemente a_{pq} der Determinante

$$\varDelta = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

zugehörige Subdeterminante, so ist bekanntlich

$$\varDelta^{n-k}(a_{11}\, a_{22} \cdots a_{k-1,\, k-1}) = (A_{kk} \cdots A_{nn}),$$

was in vorliegender Abhandlung auf inductivem Wege einfach nachgewiesen wird, um Anfängern den Beweis Borchardt's, den auch Baltzer in seiner Theorie der Determinanten reproducirt, entbehrlich zu machen. W.

J. Muir. Extension of a law of determinants. Messenger (2) II. 60-61.

Beweis dass, wenn m Elemente in einer Reihe einer Determinante der n^{ten} Ordnung einen gemeinschaftlichen Factor enthalten, welcher auch in den entsprechenden Elementen von $n-m$ anderen Reihen enthalten ist, dieser Factor auch Factor der Determinante selbst ist. Glr. (O.)

W. A. Whitworth. Extension of a law of determinants. Messenger (2) II. 80.

Verallgemeinerung des obigen Satzes von Herrn Muir. Glr. (O.)

T. Cotterill. On an algebraical form and the geomet of its dual connexion with a polygon plane spherical. Proc. of L. M. S. IV. 139-143.

Die algebraische Form ist:

$$\frac{1}{(txy)}\left\{\frac{(tab)}{(axy)\,(bxy)}+\frac{(tbc)}{(bxy)\,(cxy)}+\cdots+\frac{(tmn)}{(mxy)\,(nxy)}+\frac{(tna)}{(nxy)\,(axy)}\right\},$$

wo die Symbole die Determinanten

$$(tab)=\begin{vmatrix} t_1 & a_1 & b_1\\ t_2 & a_2 & b_2\\ t_3 & a_3 & b_3\end{vmatrix} \text{ etc.}$$

darstellen, und die Indices in allen Determinanten dieselben sin Ein Fundamentalsatz sagt, dass dieser Ausdruck unabhäng von t ist, und folglich gleich den Werthen, die man erhält, wei man darin für t irgend einen der Buchstaben a, b, c, etc. setz folglich speciell:

$$\frac{1}{(txy)}\left\{\frac{(tab)}{(axy)\,(bxy)}+\frac{(tbc)}{(bxy)\,(cxy)}+\frac{(tca)}{(cxy\,(axy)}\right\} = \frac{(abc)}{(axy)\,bxy)\,(cxy)}.$$

Die vorliegende Arbeit enthält geometrische Anwendung dieser Formel. Cly. (O.)

V. Fiore. Dimostrazione d'una trasformazione di dete minanti. Battaglini G. X. 170.

Die betreffende Relation lautet:

$$\begin{vmatrix} a^n & a^{n-1}\ldots & a^{n-h+1} & a^{n-h-1}\ldots 1\\ b^n & b^{n-1}\ldots & b^{n-h+1} & b^{n-h-1}\ldots 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ l^n & l^{n-1}\ldots & l^{n-h+1} & l^{n-h-1}\ldots 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^{n-1} & a^{n-2}\ldots & b & 1\\ b^{n-1} & b^{n-2}\ldots & a & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ l^{n-1} & l^{n-2}\ldots & l & 1\end{vmatrix} \Sigma abc\cdots$$

wo die Summe $\Sigma abc\cdots k$ die Summe der Producte zu h Gliede ist, die sich aus l Buchstaben bilden lassen. M.

G. Battaglini. Sulle forme ternarie di grado qualunq Battaglini G. X. 152—169. 193—205.

Im Anschlusse an eine früher (siehe F. d. M. III. p. 38) besprochene Darstellung der binären Formentheorie bringt der Verfasser in der vorliegenden Abhandlung allgemeine Auseinandersetzungen über ternäre Formen. Nach Einführung der allgemeinen Begriffe der cogredienten und contragredienten Variabeln etc. entwickelt er eine Reihe der im ternären Gebiete üblichen Formenbildungen sowie deren geometrische Interpretation im Sinne der projectivischen Geometrie der Ebene. Die Arbeit wird namentlich auch für denjenigen nützlich sein, dem die mannigfache Terminologie, welche sich in diesen Untersuchungen entwickelt hat, Schwierigkeit bereitet. Kln.

P. GORDAN. Ueber Combinanten. Clebsch Ann. V. 95-123.

Unter einer Combinante versteht man eine solche invariante Bildung mehrerer Formen gleichen Grades, welche bis auf einen Factor ungeändert bleibt, wenn man die ursprünglichen Formen durch lineare Combinationen ersetzt. Gordan beweist nun, dass diese Combinanten unter den übrigen simultanen Invarianten, zu welchen die vorausgesetzten Formen Anlass geben, ein in sich geschlossenes System bilden. Man kann sie nämlich als Invarianten (unter diesem Ausdruck sollen hier Covarianten etc. immer mit begriffen sein) einer einzelnen unter ihnen darstellen, derjenigen Determinante nämlich, deren Elemente man erhält, wenn man die gegebenen Formen so oft mit verschiedenen Veränderlichen anschreibt, als ihre Anzahl angiebt. Diese fundamentale Combinante enthält also eine ganze Reihe von Variabeln. Aber bei binären Formen kann man derartige Bildungen immer durch ein simultanes Formensystem mit nur einer Art von Veränderlichen ersetzen. Ein solches System besitzt überdies, nach Gordan's fundamentalem Satze, immer ein endliches System von Invarianten. Die Combinanten binärer Formen setzen sich also, wie Gordan noch an einzelnen Beispielen erläutert, aus einer endlichen Zahl von Combinanten rational und ganz zusammen.

Zum Zwecke des Beweises des vorgetragenen Theorems reproducirt Gordan, worauf hier ausdrücklich noch hingewiesen sein mag, in durchsichtiger Form den Satz von Clebsch, der die

Grundlage für die Allgemeingültigkeit der symbolischen Method(
in der Invariantentheorie liefert, dass nämlich jede Invariant(
eines Systems linearer Formen eine rationale ganze Functio(
der aus den Coefficienten der Formen zu bildenden Determi
nanten sei. Kln.

P. Gordan. Ueber die simultanen Invarianten binäre(Formen. Clebsch Ann. V. 595-602.

Es handelt sich in diesem Aufsatze darum, den Satz, der in dem vorstehenden Referate bereits berührt wurde: dass das simultane System von Formen, die für sich ein endliches System besitzen, ein endliches sei, in neuer und sehr viel kürzerer Weise zu begründen, als das früher dem Verfasser gelungen war.

Kln.

A. Cayley. On a theorem in covariants. Clebsch Ann. V 625-630.

Auch diese Mittheilung von Cayley bezieht sich auf Gordan's Untersuchungen über Endlichkeit der Formensysteme, und knüpft insbesondere an die Darstellung an, welche Clebsch von denselben in seiner „Theorie der binären Formen" (siehe p. 47) gegeben hat. Cayley giebt in der von ihm eingehaltenen Darstellungsweise den Beweis eines in der betreffenden Theorie nothwendigen Hülfssatzes, wobei er durch Einführung einer characteristischen Terminologie der Darstellung eine minder abstracte Form zu geben weiss. Kln.

A. Clebsch. Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie. Gött. Abh. XVII., Clebsch Ann. V. 427-435.

In dieser grossen und von sehr allgemeinem Gesichtspunkte aus angelegten Abhandlung entwickelt Clebsch eine gewisse Umgrenzung des Problems der Invariantentheorie bei n Veränderlichen, welche resultirt, wenn man mit dem Verfasser alle solche Bildungen von der Betrachtung ausschliesst, die sich aus bereits betrachteten resp. aus deren Polaren rational und ganz zusammensetzen.

Bei binären Formen hat Gordan in Clebsch Ann. III. (siehe F. d. M. III. 59—60), sowie Clebsch in seiner „Theorie der binären Formen“ (siehe p. 47) bewiesen, dass es von diesem Gesichtspunkte aus genügt, Formen mit nur einer Reihe von Veränderlichen zu betrachten. In der vorliegenden Arbeit nimmt Clebsch die entsprechende Fragestellung für beliebig viele (n) Veränderliche in Angriff.

Er lehnt sich dabei an die Vorstellung einer ($n-1$)-fach ausgedehnten Mannichfaltigkeit an. Sowie man im Raum im Sinne der projectivischen Geometrie dreierlei Grundgebilde unterscheidet: Punkt, Gerade und Ebene, so bei ($n-1$) Dimensionen ($n-1$) lineare Stufen, die bez. durch $1, 2, \cdots (n-1)$ ihnen angehörige Punkte characterisirt und analytisch durch die Determinanten aus den Coordinaten dieser Punkte gegeben sind (vergl. Grassmann's Ausdehnungslehre von 1844). Aber neben diese Auffassung stellt sich, entsprechend dem Principe der Dualität, wie es aus der Geometrie bekannt ist, eine zweite, die von der Ebene, d. h. der durch eine lineare Gleichung zwischen Punktcoordinaten bestimmten Mannigfaltigkeit, als Element ausgehend dieselben Stufen in umgekehrter Reihenfolge ergiebt. Die Coordinaten, welche man entsprechend dieser Auffassung für die Zwischenstufen erhält, sind, wie bereits Grassmann (l. c.) und später Brill (Clebsch Ann. IV. siehe F. d. M. III. p. 314—319) zeigten, den ursprünglich für sie aufgestellten proportionirt.

Die allgemeinste Form nun, welche das Object der Invariantentheorie bilden kann, ist eine solche, die von jeder der in diesem Sinne zu unterscheidenden ($n-1$) Arten von Veränderlichen eine beliebige Anzahl von Reihen enthält. Clebsch entwickelt zur Darstellung solcher Formen zunächst eine besondere Art Symbolik, welche als speciellen Fall die symbolische Darstellung der Linien-Complexe einschliesst, die er bereits bei einer früheren Gelegenheit (Clebsch Ann. II. siehe F. d. M. II. p. 602) gegeben hatte. Es wird dabei eine eigenthümliche Umwandlung der gegebenen Form in eine sogenannte Normalform nothwendig, wobei die zwischen den Coordinaten der Zwischenstufen geltenden identischen Beziehungen zur Verwerthung kommen.

An diese symbolische Darstellung schliesst sich dann der Beweis, dass vermöge einfacher Zerlegung jede solche Form ersetzt werden kann durch ein „reducirtes System“ von Formen besonderen Characters, nämlich solcher Formen, die von jeder Art der in Betracht kommenden Coordinaten höchstens eine Reihe enthalten. Die Formen dieses reducirten Systems sind Covarianten der gegebenen Grundform, die letztere umgekehrt eine simultane Bildung, abgeleitet aus den Formen des Systems; die Constantenzahl ist beiderseits dieselbe. Die Grundform und ihr reducirtes System können daher einander vertreten, und hierin liegt, dass es genügt, überhaupt nur reducirte Systeme, d. h. solche Formen zu betrachten, welche von den verschiedenen Coordinatenarten jedesmal nur eine Reihe enthalten. Zugleich aber ist auch die Forderung: alle Invarianten-Bildungen, die aus gegebenen Formen hervorgehen, anzugeben, in wesentlicher Weise umgrenzt; denn es genügt wiederum und aus demselben Grunde, einzig reducirte Bildungen in's Auge zu fassen.

Bei ternären Formen z. B. ist hierdurch die Beschränkung auf Invarianten, Covarianten, zugeordnete Formen und Zwischenformen, wie man sie auch sonst eingehalten hat, principiell begründet. Bei quaternären dagegen wird ein sehr viel grösserer Kreis von Bildungen zu betrachten sein, als seither geschah, wobei z. B. die Gleichungen der Linien-Complexe als eine Gruppe erscheinen.

Clebsch führt die Reduction der zu betrachtenden Formen insbesondere für 3 Variable noch weiter. Bereits Gordan hatte in einer oben besprochenen Arbeit über Combinanten (siehe p. 61) Zwischenformen betrachtet, die einer gewissen partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung genügen. Bei ternären Formen darf man sich, wie Clebsch zeigt, eben auf derartige reducirte Bildungen beschränken, wobei deren Constanten, abgesehen von der in den Differentialgleichungen liegenden Beschränkung, unabhängig anzunehmen sind. Kln.

A. Clebsch. Ueber ein neues Gebilde der analytischen Geometrie der Ebene. Gött. Nachr. 1872. 429-449, Clebsch Ann. VI. 205-215.

Es bringt dieser Aufsatz eine erste Anwendung der in der vorgenannten Abhandlung entwickelten allgemeinen Principien auf ternäre Formen, und dem entsprechend auf ebene Geometrie, wobei es sich aber zunächst um Aufstellung von Gesichtspunkten und Stellung von Problemen, nicht um Durchführung bestimmter Aufgaben handelt. Bei ternären Formen ist es auf Grund der soeben besprochenen algebraischen Untersuchungen angezeigt, neben den Gleichungen, die eine Reihe von Punkt- oder von Linien-Coordinaten enthalten, auch Zwischenformen, d. h. Gleichungen, die Punkt- und Linien-Coordinaten enthalten, zu Grunde zu legen. Geometrisch bedeutet eine solche Zwischenform, gleich Null gesetzt, eine Verwandtschaft in der Ebene, die den Punkten der Ebene von geraden Linien umhüllte Curven, oder, was dasselbe ist, den Geraden der Ebene von Punkten beschriebene Curven zuordnet, und eben diese Verwandtschaften sind es, welche Clebsch nunmehr als neue Grundgebilde in die analytische Geometrie der Ebene unter dem Namen: „Connexe“ einführt.

Die Richtung, in der ein Connex zu untersuchen ist, wird durch die gewöhnliche Behandlung der Curven oder Flächen vorgezeichnet. Man betrachtet die Gebilde, die zwei, drei, vier Connexen gemeinsam sind, man untersucht die singulären Elemente eines Connexes, für welche Formeln gelten, die den Plücker'schen Formeln für die Singularitäten ebener Curven entsprechen, etc. etc. Auf Connexe so gut wie auf die mehreren Connexen gemeinsamen Gebiete ist, wie überhaupt auf algebraische Mannichfaltigkeiten, der Begriff des Geschlechts anzuwenden, wobei man die eindeutigen Transformationen, welche dasselbe ungeändert lassen, auf das doppelt-ternäre System der Punkt- und Linien-Coordinaten ausdehnen darf etc.

Aber besonders wichtig scheint die Verbindung, in welche die Theorie der Connexe zur Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung bei zwei Veränderlichen tritt. Jeder Connex giebt zu einer solchen Anlass: ihre Integralcurven sind diejenigen, für welche Punkt und zugehörige Tangente dem Connexe angehören; umgekehrt entsteht jede solche Differentialgleichung, und noch auf unendlich viele Weisen, aus der Betrachtung der

Connexe. Es ist hierdurch das Mittel gewonnen, um diese Di rentialgleichungen im Sinne der neueren algebraisch-geometrisc Auffassung zu behandeln; es ist aber namentlich auch eine f damentale Eintheilung dieser Differentialgleichungen in Geschle ter gegeben. Das Geschlecht einer Differentialgleichung ist e Zahl, die bei jeder eindeutigen (Berührungs-) Transformat derselben erhalten bleibt. Kln.

J. Rosanes. Ueber Functionen, welche ein den Function determinanten analoges Verhalten zeigen. Borchardt LXXV. 166-172.

Wenn man die Punkte einer ebenen Curve durch ration Functionen zweier homogen vorkommenden Parameter dargest hat, so repräsentiren die Functionaldeterminanten dieser Funct nen die Coordinaten der Tangente. Die Functionaldeterminant der Functionaldeterminanten führen daher bis auf einen Fac zu den ursprünglichen Functionen zurück. Diesen Satz hat Clebs in Borchardt J. LXIX (siehe F. d. M. I. p. 45) gegeben und gebraisch bewiesen. Rosanes dehnt ihn, geometrisch zu red auf Raumcurven aus, indem er, von der Darstellung einer solch durch rationale Functionen zweier homogen vorkommenden Pa meter ausgehend, die Schmiegungsebenen, und aus deren D stellung wiederum die Punkte berechnet. Der vortretende Fac ist ein volles Quadrat und stellt, gleich Null gesetzt, diejenig Punkte der Curve dar, deren Osculationsebenen stationär sind Kln.

J. Rosanes. Ueber die Darstellung binärer Formen a Potenzsummen. Borchardt J. LXXV. 172-176.

Der Verfasser zeigt, dass man und wie man n gegebe binäre Formen n^{ten} Grades als lineare Combinationen der n^{ten} P tenzen n linearer Ausdrücke darstellen kann. Kln.

S. Gundelfinger. Intorno ad alcune formole del teoria delle curve di secondo e di terzo ordine. Brioschi Ann. (2) V. 223-236.

Es handelt sich darum, zerfallende ternäre Formen auf allgemeine und symmetrische Weise in ihre Factoren wirklich aufzulösen. Nach vorgängiger Betrachtung des Zerfallens eines Kegelschnittes behandelt der Verfasser insbesondere die in drei Gerade zerfallende Curve dritter Ordnung, sowie die Aufgabe, die drei Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve dritter Ordnung einzeln darzustellen. Kln.

P. Cassani. Intorno alle forme binarie. Battaglini G. X. 230-235.

Betrachtung binärer Formen, die von einem Parameter linear abhängen. Die Doppelelemente der betreffenden Involution sind durch die Functionaldeterminante zweier beliebiger unter den Formen repräsentirt. Kln.

A. Cayley. An identical equation connected with the theory of invariants. Quart. J. XII. 115-118.

Beweis der Gleichung

$$2P+Q-R=0,$$

wo

$$P=(bg-ch)(ch-af)(af-bg),\ Q=a^2g^2h^2+b^2h^2f^2+c^2f^2g^2+a^2b^2c^2,$$

$$R=a^2f^2(a^2+f^2)+b^2g^2(b^2+g^2)+c^2h^2(c^2+h^2),\ a=g-h,\ b=h-f,\ c=f-g.$$

Cly. (O.)

H. G. Zeuthen. Elementart Bevis for en Satning af den nyere Algebra. Zeuthen Tidsskr. (3) II. 33.

Elementarer Beweis des Clebsch'schen Satzes:

„Eine Covariante von Formen erster Ordnung lässt sich in Form einer ganzen Function zusammensetzen aus den gegebenen Formen, ihren Determinanten und den Determinanten der Variabeln" (cf. Borchardt J. LIX.) Hn. (Wn.)

H. Nägelsbach. Ueber eine Klasse symmetrischer Functionen. Pr. Zweibrücken.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die Betrachtung Function

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^r \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 1 & \alpha_n \cdots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_n^{n-1} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 1 & \alpha_n \cdots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}} = (\alpha_1 \cdots \alpha_n^r),$$

welche bisher nur für ein ganzes positives r untersucht wo ist, auch auf negative r auszudehnen; ferner soll dann auch allgemeinere Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^m & \alpha_1^p & \cdots \alpha_1^r \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n^m & \alpha_n^p & \cdots \alpha_n^r \end{vmatrix}$$

in Betracht gezogen werden. Die Abhandlung enthält eine gr Anzahl grösstentheils neuer Sätze, unter welchen jedoch die O tirung nicht ganz leicht ist. Ein genaues Eingehen auf d Resultate wird hier nicht am Platze sein; es möge nur die Relation

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi, \cos\varphi - i\sin\varphi\right)^{r} = \frac{\sin(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

$$= \begin{vmatrix} -2\cos\varphi & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2\cos\varphi & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2\cos\varphi & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1-2\cos\varphi \end{vmatrix}$$

hervorgehoben werden, indem dieselbe eine brauchbare An dung auf die Lehre von den Kettenbrüchen gestattet.

Gr.

A. Cayley. On a theorem in elimination. Quart. J. XII

Beispiel zu einem Satze von Sylvester. Cly. (O.)

J. J. WALKER. Solution of question 3462. Educ. Times XVI. 73.

1) Beweise der Identität:

$$\Sigma l(m-n)^2 \cdot \Sigma(2m+2n-l)(m-n)^2 - \Sigma mn(\Sigma(m+n)^2)^2 \doteq q(m-n)^2(n-l)^2(l-m)^2,$$

wo l, m, n irgend welche Grössen sind.

2) Die Discriminante der linearen Form $(abcde)\widehat{(}xy)^4$, nämlich $\Delta = I^3 - 27J^2$, lässt sich in die Form $\Delta = IK - 3J'^2$ bringen, wo $J' = 3J + cI$; beweise, dass dies gleichlautend ist mit obiger Identität, wenn $\alpha\beta\gamma\delta$ die Wurzeln der Form 4ter Ordnung und

$$\alpha\beta + \gamma\delta = l, \quad \alpha\gamma + \beta\delta = m, \quad \alpha\delta + \beta\gamma = n.$$

Hi.

S. ROBERTS. Solution of question 3730. Educ. Tim. XVII. 101.

Ist J eine Invariante von $(a_0, a_1, a_2 \cdots a_p)\widehat{(}x, y)^p$ vom Grade k in den Coefficienten, und schreibt man Δ für

$$na_1 \frac{d}{da_0} + (n-1)a_2 \frac{d}{da_1} + \cdots + a_n \frac{d}{da_{n-1}},$$

so ist

$$\frac{\Delta^{k(n-p)}}{1 \cdot 2 \cdots k^{(n-p)}} I = I', \qquad n > p,$$

wo I' eine Invariante von $(a_{n-p}, a_{n-p+1}, \cdots a_n)\widehat{(}xy)^p$ vom Grade k in den Coefficienten ist. Hi.

Weitere Aufgaben und Sätze über Determinanten sind von den Herren B. WILLIAMSON, R. TOWNSEND, LAVERTY, J. J. WALKER, und über Elimination von Herrn D. BOOTH, J. J. WALKER, etc. in der Educ. Tim. XVI. XVII. behandelt.

Dritter Abschnitt.

Zahlentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

N. Trudi. Intorno alle equazioni binomie. Battaglini G. X. 241-278.

Anfangsgründe der Zahlentheorie; irreductible Factoren der binomischen Gleichungen; Potenz-Summen ihrer primitiven Wurzeln. No.

Ch. Hermite. Sur l'équation $x^3+y^3=z^3+u^3$. Nouv. Ann. (2) XI. 5-8.

Für die bereits von Euler und von Binet gegebene Auflösung dieser Gleichung theilt der Verfasser einen neuen, an geometrische Betrachtungen anknüpfenden Beweis mit. Fs.

J. Grolous. Études sur les nombres. Inst. XL. 253-254.

Siehe Abschn. V. Cap. 2.

J. W. L. Glaisher. On the law of distribution of prime numbers. Rep. Brit. Ass. 1872.

Der Verfasser beweist den weiteren Umfang einer Formel für die Durchschnittanzahl der zwischen zwei Zahlen x' und x gelegenen Primzahlen, welche von Judge Hargreave im Phil. Mag. Juli 1849 gegeben ist. Csy. (M.)

ATTHEW COLLINS. On approximating to the square cube and other roots of a given number N. Rep. Brit. Ass. 1872.

Csy.

. W. MERRIFIELD. On Hutton's rule for approximating to the roots of numbers. Educ. Times XVII. 53-54.

Die von dem Verfasser in Erinnerung gebrachte Regel tton's ist:

Wenn a ein Näherungswerth der n^{ten} Wurzel aus N ist, so ist $\frac{(n+1)N+(n-1)a^n}{(n-1)N+(n+1)a^n}\,a$ ein genauerer Näherungswerth.

Hi.

. C. MOREAU. Solution de la question 441. Nouv. Ann. (2) XI. 172.

Das Product mehrerer aufeinanderfolgender Zahlen kann ine vollkommene Potenz sein, wenn eine dieser Zahlen eine solute Primzahl ist.

Pr.

DE VIRIEU. Solution de la question 139. Nouv. Ann. (2) XI. 129.

Aufstellung der Ziffern des Quotienten von rechts nach links, n man den Dividendus, den Divisor und den Rest kennt.

Pr.

MORET-BLANC. Solution de la question 953. Nouv. Ann.) XI. 173.

Aufstellung aller derjenigen ganzen Zahlen n und p ($n<p$), welche:

1) $1+2+3+\cdots n=(n+1)+(n+2)+\cdots p$

2) $1+2+3+\cdots n=p^2$.

Pr.

O. Théorème d'arithmétique. Mondes (2) XXVII. 653-654.

Beweis des Satzes: Jede ganze Zahl, die ein vollständiges lrat ist, hat eine ungrade Zahl von Theilern.

O.

E. Catalan. Sur un théorème d'arithmétique. Att. d. A
P. d. Linc. XXV. 100.

Theil eines Briefes des Verfassers an den Fürsten Bonco
pagni, den dieser der Academie mitgetheilt hat. Er enthält f
genden Satz ohne Beweis: „Es sei N ein Vielfaches von 4 u
n eine grade Zahl $< N$. Wenn man dann n in eine Summe v
Potenzen von 2 zerlegt und $\lambda_n = \pm 1$ setzt, je nachdem die Za
der Potenzen grade oder ungrade ist, wenn man endlich $N -$
$= 2^{\beta_n} \cdot i$ setzt, so ist:

$$\sum_{n=0}^{n=N-2} \lambda_n \cdot 2^{\beta_n} = \pm \frac{N}{2},$$

wo das $+$ Zeichen dem Fall entspricht, dass N die Summe ein
ungraden Zahl von Potenzen von 2 ist." Dieser Satz wird a
$N = 12$ angewandt. Jg. (O.)

D. André. Théorème d'arithmétique. Nouv. Ann. (2)
314-319.

Sind a und n zwei Zahlen, die grösser als 1 sind, so
der Quotient

$$\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(na-1)}{a^n}$$

eine gebrochene oder eine ganze Zahl, je nachdem a eine Pri
zahl ist oder nicht. Der Satz gilt auch für $n = 1$, ausser
den Werth $a = 4$. Fs.

V. J. Berton. Sur la détermination des limites en
lesquelles se trouve un nombre premier d'une for
donnée. Solution élémentaire dans un cas particuli
C. R. LXXIV. 1390-1393.

Sind $r_1 = 1$, $r_2, \cdots r_{2g} = 2p-1$ die zu $2p = a^\alpha b^\beta \cdots$ re
tiven Primzahlen $< 2p$, und ist $1 - \sum_2^{2g} \frac{1}{r_a} = 1 - s$ positiv,
liegen zwischen x und $\frac{2p(1+\varepsilon)}{(2p-1)(1-s)} x$ (wo ε ein Factor
$2p$ und x ist, der mit wachsendem x sich der Grenze 0 näh
mindestens $2g$ Primzahlen, die sich auf die Formen $2py +$
$2py + r_2, \cdots 2py + r_{2g}$ vertheilen. No.

v. WASSERSCHLEBEN. Zur Charakteristik der Zahl 60. Grunert Arch. LIV. 411-419.

Der Verfasser giebt ohne Beweis einige auf inductivem Wege gefundene Beziehungen der Zahl 60 zu den Zahlen, welche zu 60 relativ prim sind, insbesondere zu ihren Ziffern, wenn sie nach dem dekadischen Systeme geschrieben werden. Fs.

TH. SCHRÖDER. Ueber die Qualität der Decimalbrüche, welche echten gemeinen Brüchen gleich sind, und die Reste, welche man bei der Verwandlung der letzteren in erstere erhält. Pr. Ansbach.

Diese Schrift hat sich die verdienstliche Aufgabe gestellt, die Verhältnisse, welche sich bei der Ueberführung gemeiner Brüche in Decimalbrüche ergeben, eingehend zu untersuchen, indem eigenthümlicherweise auf diesem Gebiete, abgesehen von einigen kurzen Andeutungen von Spitzer, Nagel etc. bisjetzt noch wenig geschehen ist. Während die drei ersten Abschnitte sich mit den einfachsten Fällen beschäftigen und deshalb auch durchaus nur von elementaren Hülfsmitteln Gebrauch machen, bewegt sich der vierte Theil „Qualität der Decimalbrüche, welche echten gemeinen Brüchen gleich sind, deren Nenner ein Product aus Potenzen beliebiger Primzahlen ist" auf rein zahlentheoretischem Gebiete. In folgenden fünf Sätzen, deren Beweise der streng-synthetischen Einkleidung gemäss hie und da etwas complicirt erscheinen, sind die hauptsächlichsten Resultate enthalten.

„Wenn die Periode des Bruches für $\frac{1}{p}$ $\left(\text{oder für } \frac{1}{p^x}\right)$ durch p nicht mehr theilbar ist, so ist die Periode des Bruches für $\frac{1}{p^\alpha}$ nicht weniger, als $\frac{p-1}{m}\cdot p^{\alpha-1}$— (oder $\frac{p-1}{m}\, p^{\alpha-x}$-)ziffrig."

„Ist für $\frac{a}{p^\alpha}$ die Periode des Bruches $2m\cdot p^{\alpha-1}$-ziffrig, so ergänzen sich die gleichvielten Ziffern der Hälften dieser Periode zur Zahl 9 und zwei Reste, welche bei der Ueberführung des Bruches $\frac{a}{p^\alpha}$ in einen Decimalbruch bleiben, und zwischen welchen

$(m \cdot p^{\alpha-1} - 1)$ Reste liegen, zum Nenner p^α und die Summe zwei Reste, zwischen welchen $[(2n+1)\, m - 1]$ Reste liegen, ist durch theilbar." „Die Anzahl der Ziffern der Periode, welche man b der Verwandlung eines Bruches mit zusammengesetztem Nenn $Z = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \cdots$ erhält, ist das kleinste gemeinschaftliche Vi fache zur Anzahl der Ziffern der Periode der Brüche für

$$\frac{m_1}{a^\alpha},\quad \frac{m_2}{b^\beta},\quad \frac{m_3}{c^\gamma}\ldots,$$

deren Nenner nur je einen Primfactor der zusammengesetzt Zahl enthalten, jedoch in derselben Potenz, in welcher der Prin factor in der zusammengesetzten Zahl auftritt."

„Erhält man bei der Verwandlung eines gemeinen Bruche in einen Decimalbruch eine Periode, so ist stets die Summ aller Reste, welche man während der Ausrechnung einer voll ständigen Periode erhält, ein Vielfaches des Nenners des ge meinen Bruches, ausgenommen, wenn dieser den Factor enthält."

„Wird die Summe von n Resten, welche sich bei der Ve wandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch ergebe zum ersten Mal ein Vielfaches des Nenners des gemeinen Bruche so ist der dem gemeinen Bruche gleiche Decimalbruch ein p riodischer, dessen Wiederkehr aus n Ziffern besteht, ausgenom men, wenn der Nenner den Factor 3 enthält."

Dieser so lange vernachlässigte Gegenstand ist gleichzeit von zwei Seiten in Angriff genommen worden; zugleich m diesem Programme erschien das der Studienanstalt zu Rintel welches die nämliche Materie behandelt und zu ganz analog Resultaten gelangt. Gr.

May. Die Quadratreste und Nichtreste. 1. Theil.

Pr. Dillingen.

Nach einer kurzen Einleitung in die Zahlentheorie wird ei elementare Darstellung der im Titel genannten Theorie gegebe Neues zu liefern liegt nicht im Plane der Schrift; jedoch ist natürlich, dass bei jeder Bearbeitung eines derartigen Gege standes sich einzelne neue Bemerkungen machen lassen. S

berichtigt der Verfasser (p. 33) einen Irrthum H. Scheffler's in dessen „Unbestimmter Analytik." Gr.

G. ZOLOTAREFF. Sur l'équation $Y^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} pZ^2 = 4X$. Nouv. Ann. (2) XI. 539-550.

Ist $X = \frac{x^{p-1}}{x-1}$ und p Primzahl, so wird Z bis auf einen constanten Factor der Nenner des $\frac{p-1}{2}^{\text{ten}}$ Näherungswerthes in der Kettenbruchentwickelung von $\frac{S(x)}{X}$, wo $S = \sum_1^{p-1} \left(\frac{i}{p}\right) x^i$ bedeutet und Y bis auf dieselbe Constante der Rest der Division $(S \cdot \psi) : X$. Zwischen den Coefficienten von Z werden lineare Beziehungen abgeleitet, welche die unmittelbare Berechnung derselben gestatten. No.

G. ZOLOTAREFF. Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité de Legendre. Nouv. Ann. (2) XI. 354-362.

Der Verfasser ertheilt einer Permutation den Charakter $+1$ oder -1, je nachdem sie aus der ursprünglichen Anordnung der Elemente durch eine grade oder ungrade Anzahl von Transpositionen erhalten wird. Sind dann p und q zwei ungrade Primzahlen, so betrachtet er die Reihe der Zahlen:

$$q,\ 2q,\ 3q, \cdots (p-1)q,\quad p,\ p+q,\ p+2q, \cdots p+(p-1)q,$$
$$2p,\ 2p+q, \cdots (q-1)p,\quad (q-1)p+q, \cdots (q-1)p+(p-1)q.$$

Die Reste dieser Zahlen mod. pq bilden eine gewisse Permutation der Zahlen $1, 2, 3, \cdots pq-1$. Für den Charakter dieser Permutation findet der Verfasser auf einem Wege $\left(\frac{q}{p}\right)$, auf einem andern $(-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)$, womit das Reciprocitätsgesetz bewiesen ist. Unter den Hülfssätzen, mittelst deren er jenen Charakter bestimmt, ist der interessanteste: „Ist p eine Primzahl, und k eine durch p nicht theilbare Zahl, so bilden die Reste der Zahlen $k, 2k, 3k, \cdots (p-1)k$ (mod. p) eine Permutation der Zahlen $1, 2, 3, \cdots p-1$, deren Charakter gleich $\left(\frac{k}{p}\right)$ ist."

Die Quelle seines Beweises verschweigt der Verfasser. ist aber leicht zu sehen, dass es das Resultat des Bestrebens diejenigen Beweise des Reciprocitätsgesetzes, die auf der Anw dung zweiwerthiger Functionen der Einheitswurzeln beruhen, abhängig von der Algebra auf rein zahlentheoretischem We zu führen. Fs.

VALLÈS. Nombres premiers. Inst. XL. 1957.

Jede Primzahl der Form $13n-1$, $13n-3$, $13n-4$ ka auf die Form a^2-13b^2 oder $13b^2-a^2$ gebracht werden. Ist zugleich von der Form $8m+1$ oder $8m+5$, so kann sie au auf die Form a^2+13b^2 gebracht werden. No.

ZELLER. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die qu dratischen Reste. Berl. Monatsber. 1872. 846-847.

Dem Gauss'schen Lemma gemäss ist zu zeigen, dass Anzahl der absolut kleinsten negativen Reste in $q, 2q, \cdots \frac{1}{2}(p-1)$ (mod. p) und in $p, 2p, \cdots \frac{1}{2}(q-1)$, (mod. q) zusammen nur grade ist, wenn p und q von der Form $4n+3$ sind. Ist $p<$ so kommen sämmtliche unterhalb $\frac{p}{2}$ liegenden Zahlen als ne tive Reste in der einen oder der anderen Reihe vor. Die übri zwischen $\frac{p}{2}$ und $\frac{q}{2}$ liegenden negativen Reste werden d leicht so gruppirt, dass das geforderte Resultat sich ergiebt.

No.

N. BOUGAJEFF. Résolution d'une question numérique C. R. LXXIV. 449-450.

Nennt man die durch kein Quadrat theilbaren Zahlen mitive, bedeutet $H_1(n)$ die Anzahl der primitiven Zahlen, nicht grösser sind als n, und ist $q(u)$ für die nicht primiti Zahlen u gleich 0, für die primitiven aber gleich $+1$ oder $-$ je nachdem sie aus einer graden oder ungraden Anzahl Primfactoren zusammengesetzt sind, so ist

$$H_1(u) = \sum_{u=1}^{u=\varepsilon\sqrt{n}} q(u) + \sum_{u=1}^{u=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{2}}} q(u) + \sum_{u=1}^{u=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{3}}} q(u) + \cdots$$

und

$$H_1(n) + H_1\left(\frac{n}{2^2}\right) + H_1\left(\frac{n}{3^2}\right) + \cdots = n.$$

Aehnliche Formeln gelten für die secundären (durch keinen Cubus theilbaren) Zahlen u. s. w. Fs.

J. J. SYLVESTER. On the theorem that an arithmetical progression which contains more than one, contains an infinite number of prime numbers. Proc. of L. M. S. IV. 7-8, Messenger (2) I. 143-144.

Kurzer Bericht über die Methode, die Herr Sylvester in der Arbeit angewandt hat, über die er in der Sitzung der Lond. Math. Ges. am 14. December 1871 unter dem Titel „Transactions of Societies" berichtet hat. Glr. (O.)

W. SHANKS. On periods in the reciprocals of primes. Messenger (2) II. 41-43.

Praktische Regeln, um die Stellenzahl der wiederkehrenden Perioden bei den reciproken Werthen von Primzahlen zu finden, nebst Beispielen. Glr. (O.)

G. SALMON. On periods in the reciprocals of primes. Messenger (2) II. 49-51. 80.

Bemerkungen zu der obigen Arbeit von Herrn Shanks. Glr. (O.)

J. J. SYLVESTER. On the partition of an even number into two primes. Proc. of L. M. S. IV. 4-6.

Bezieht sich auf einen von Euler ausgesprochenen, aber nicht bewiesenen Satz, dass jede grade Zahl zerlegt werden kann in eine Summe von zwei Primzahlen. Die Arbeit sucht einen Massstab für die wahrscheinliche (oder durschschnittliche)

Zahl der Wege, auf denen eine solche Zerlegung für eine gegebene grosse Zahl bewirkt werden kann: Wenn bewiesen werden kann, dass sie wahrscheinlich grösser ist, als die Quadratwurzel aus der Zahl, so folgt, dass die Wahrscheinlichkeit dieses Satzes, der im Allgemeinen über eine bezeichnete Grenze hinaus wahr ist, wenn er bis zu dieser Grenze bewiesen ist, dargestellt werden kann durch ein unendliches Product von Gliedern, welches sich beliebig der Einheit nähert, so hoch auch die Grenze genommen ist. Der Verfasser glaubt, dass er so gut wie zweifellos bewiesen, dass der Grad der Grösse des wahrscheinlichen Werthes der Zahl von Auflösungen der des Quadrates der Anzahl von Primzahlen kleiner als die gegebene Zahl ist, dividirt durch die Zahl selbst, oder was dasselbe ist, es ist ein endliches Verhältniss zu der Zahl dividirt durch das Quadrat des hyperbolischen Logarithmus. Cly. (O.)

P. Bachmann. Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Leipzig. Teubner.

Absicht des Buches ist, die wunderbaren Wechselbeziehungen zwischen Geometrie, Arithmetik und Algebra, welche gerade in der Theorie der Kreistheilung hervortreten, durch Sammlung und passende Verbindung der einschlägigen Abhandlungen und verstreuten Arbeiten allgemeiner bekannt zu machen. Von der geometrischen Fassung des Problems geht der Herr Verfasser zur algebraischen Aufstellung desselben über, und behandelt, durch die Form der Gleichung veranlasst, die Eigenschaften der Einheitswurzeln. Als Hülfsmittel für spätere Zwecke folgen: der Gauss'sche Satz über die Zerlegbarkeit ganzer ganzzahliger Functionen, sowie die Hauptsätze über Congruenzen. Für die Irreductibilität der Kreistheilungsgleichung werden Beweise von Kronecker, Eisenstein und Arndt gegeben. Nach diesen Vorbereitungen geht die Untersuchung auf die Gauss'sche Auflösungsmethode über und zeigt, nach einer Einschaltung, welche specielle Beispiele algebraisch und geometrisch behandelt, durch die Theorie der Lagrange'schen Resolvente für diesen besonderen Fall die algebraische Auflösbarkeit der Kreistheilungsgleichung. Diese

Untersuchungen werden später in der 15ten Vorlesung noch einmal aufgenommen und durch die Methode der Bildung der Periodengleichungen nach den Kummer'schen Formeln zur Multiplication der Perioden vervollständigt. Für die $\frac{p-1}{2}$-, $\frac{p-1}{3}$-, $\frac{p-1}{4}$-gliedrigen Perioden wird die Berechnung gemacht und entsprechend die Function $\frac{x^p-1}{x-1}$ behandelt. Zwischen diese beiden Theile sind die Anwendungen der Kreistheilungsformeln auf die quadratischen, cubischen und biquadratischen Reste und auf die Zerlegung der Zahlen in Quadrate eingeschaltet. Besonders eingehend und interessant sind die verschiedenen Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes in ihrem Zusammenhange behandelt.

Nur lose hängen mit dem bisher Angeführten die 4 letzten Vorlesungen zusammen. Sie behandeln die Kummer'sche Theorie der idealen Primfactoren und geben einige Anwendungen auf eine Hülfsfunction in der Kreistheilung und — etwas aphoristisch — auf die Theorie der quadratischen Formen. Eine recht vollständige Literatur-Angabe erhöht die Brauchbarkeit eines Werkes, welches auch schon deshalb schätzenswerth erscheint, weil es versucht, aus der überaus reichen Fülle der zu diesem Gebiete gehörigen Forschungen die wichtigsten auszuwählen und zu verbinden. Ob das Band — die Kreistheilung — freilich fest genug sei, ist eine andere Frage. No.

A. B. Evans and A. Martin. Solution of question 2990. Educ. Times XVI. 27-28

Finde drei Quadratzahlen in arithmetischer Progression, so dass die Quadratwurzel aus jeder um die Einheit vermehrt, wieder eine Quadratzahl ist.

Die Zahlen sind 24^2, 120^2, 168^2. Hi.

A. B. Evans, A. Martin and others. Solution of question 3222. Educ. Times XVI. 34-36.

Finde die kleinste ganze Zahl x, welche den Bedingunge[n]

$$940751\, x^2 + 1 = \square, \qquad 940751\, x^2 + 38 = \square$$

genügt.

Die Zahl x enthält 55 Ziffern. Hi.

G. H. Hopkins. Solution of question 3200. Educ. Ti[mes] XVI. 46.

Die Gleichung

$$x^2 = y^2 + z^2$$

hat, für

$z = 2a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_n$, wo $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ Primzahlen sind, $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ ganzzahlige Lösungen in x und y. Hi.

S. Bills, Hart and others. Solution of question 352[.] Educ. Times XVI. 95.

Zwei positive Cubikzahlen (ausser 8 und 27) zu finden, der[en] Summe = 35.

Die Grundzahlen sind $\frac{59347}{18162}$ und $\frac{8693}{18162}$. Hi.

A. B. Evans, Scott, S. Bills. Solution of questi[on] 3549. Educ. Times XVI. 108-110.

Finde vier Quadratzahlen, so dass die Summe der Quadr[ate] von irgend dreien wieder eine Quadratzahl ist. Von den [ge-]gebenen Lösungen ist die mit kleinsten Zahlen 60, 105, 1[..] 280. Hi.

Mehrere Aufgaben derselben Art sind behandelt v[on] den Herren J. Wolstenholme, W. H. Laver[ty,] R. Tucker, Miller, M. Collins, Scott, Gi[..] A. Martin, A. B. Evans, S. Bills. Educ. Times X[VI,] XVII.

Capitel 2.

Theorie der Formen und Kettenbrüche.

C. JORDAN. Sur les formes réduites des congruences du $2^{\text{ième}}$ degré. C. R. LXXIV. 1093-1095.

C. JORDAN. Sur la forme canonique des congruences du second degré et le nombre de leurs solutions. Liouville J. (2) XVII. 368.

Die Methode der Untersuchung von $\Phi = a_1 x_1^2 + \cdots + a_m x_m^2 + b_{12} x_1 x_2 + \cdots \equiv c$ (mod. M) ist die, jene Congruenz zuerst in Bezug auf Primzahl-Potenzen als Moduln zu betrachten und sie dann auf einfachere Formen zurückzuführen. (Traité des Substitutions 197—200 u. 259—260). Ist der Primzahlmodul ungrade, so erhält man als canonische Form

$$\Phi = P^\alpha (\theta X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_p^2) + P^\beta (\theta' Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_q^2) + \cdots \equiv c \text{ (mod. } P^\lambda),$$

wobei die Producte der Variablen verschwunden sind, und die θ entweder $= 1$ oder gleich einem beliebigen quadratischen Nichtreste von P sind. Für $P = 2$ liegen die Verhältnisse nicht so einfach.

No.

A. KORKINE et G. ZOLOTAREFF. Sur les formes quadratiques positives quaternaires. Clebsch Ann. V. 581-583.

Man kann den Veränderlichen einer quadratischen positiven quaternären Form von der Determinante D ganzzahlige Werthe geben, derart, dass der Werth der Form die Grösse $\sqrt[4]{4D}$ nicht überschreitet; und es giebt Formen, deren Minima gleich $\sqrt[4]{4D}$ sind.

No.

J. SIACCI. Nota intorno alle forme quadratiche. Atti d. R. Acc. Linc. XXV. 339-349.

F. J. Studnicka. Ueber Neben-Näherungsbrüche u[illegible] deren Anwendung. Casopis I. 32-33. (Böhmisch.)

Nachdem die Grundeigenschaften dieser Brüche, oder w[illegible] sie hier genannt werden, der beigeordneten Näherungsbrüc[illegible] erklärt worden, zeigt man die Benutzung derselben bei der A[illegible] lösung von unbestimmten Gleichungen des ersten Grades.

W.

O. Schlömilch. Ueber die Kettenbruchentwickelung[illegible] für Quadratwurzeln. Schlömilch Z. XVII. 70-71.

Der Verfasser hatte in seiner algebraischen Analysis (4. A[illegible] § 68) für die bekannte Kettenbruchentwickelung:

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}\alpha^2-\beta}=\tfrac{1}{2}\alpha-\cfrac{\beta}{\alpha-\cfrac{\beta}{\alpha-\text{etc.}}}$$

die Bedingung $\alpha \geqq \beta+1$ angegeben. Herr E. Weyr fa[illegible] aber durch geometrische Untersuchungen, dass diese Bedingu[illegible] zu eng sei, und dass nur $\alpha^2 \geqq 4\beta$ zu sein braucht (Prag. B[illegible] 1869, siehe F. d. M. II. p. 106). Hier giebt nun Herr Schlömil[illegible] einen rein analytischen Beweis für die letztere Bedingung.

M.

P. Bachmann. Zur Theorie von Jacobi's Kettenbruc[illegible] Algorithmen. Borchardt J. LXXV. 25-35.

Die Frage nach der Periodicität der durch den Algorith[illegible] dargestellten dritten Wurzeln aus ganzen Zahlen wird auf [illegible] dreier Ausdrücke zurückgeführt, welche mit den Zählern u[illegible] Nennern der Näherungswerthe in enger Beziehung stehen, u[illegible] dadurch auf die Frage nach der Art der Annäherung selbst.

No.

P. Onofrio. Intorno ad una funzione che entra ne[illegible] composizione delle ridotte delle frazioni continue delle radici delle congruenze di 1° grado ad una i[illegible] cognita. Battaglini G. X. 37-47.

Uebersetzung von Dirichlet, Zahlentheorie § 23 u. 24 ohne Quellenangabe. § 6 der Arbeit ist keine Uebersetzung, aber überaus weitschweifig. No.

F. Bauer. Von einem Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis. Münch. Abh. XI. II.

Diese Abhandlung ist von hohem Interesse, indem hier die schon mehrfach angedeutete Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen durch Determinanten zum ersten Male consequent und methodisch zur Lösung complicirterer Probleme angewandt wird. Nach einer kurzen historischen Einleitung giebt der Verfasser zunächst dem Kettenbruch

$$S = \frac{n}{\alpha_1} + \frac{n+\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{n+\alpha_2}{\alpha_3} + \cdots$$

folgende Form

$$\frac{\begin{vmatrix} \alpha_2 & 1, & 0 & \cdots & 0 \\ -(n+\alpha_2), & \alpha_3, & 1 & \cdots & 0 \\ 0, & -(n+\alpha_3), & \alpha_4 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0, & 0, & 0 & -(n+\alpha_{r-1}), & \alpha_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1, & 0 & \cdots & 0 \\ -(n+\alpha_1), & \alpha_2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0, & -(n+\alpha_2), & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0, & 0 & \cdot & -(n+\alpha_{r-1}), & \alpha_r \end{vmatrix}} = \frac{P_r}{Q_r}$$

Durch eine Reihe von Determinanten-Transformationen erhält man das Resultat

$$\frac{n(P_r+Q_r)}{P_r+nQ_r} = \frac{n+\alpha_1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{n+\alpha_{r-1}}{\alpha_{r-1}} + \frac{n+\alpha_r}{\alpha_{r+1}}.$$

Ist dann

$$S' = \frac{n+\alpha_1}{\alpha_1} + \frac{n+\alpha_2}{\alpha_2} + \cdots,$$

so folgt für $r = \infty$

$$S' = \frac{n(S+1)}{S+n}.$$

Diese Relation ward von Euler auf inductorischem Wege gewonnen.

Geht man alsdann von dem allgemeineren Kettenbruche

$$\frac{b_1 c_0}{a_1} + \frac{b_2 c_1}{a_2} + \cdots$$

aus und wendet ganz analog einige einfache Determinantensätze an, so gelangt man zu dem Resultate. Es ist

$$\left(\frac{d}{2} - b_1 + \frac{b_1^2}{d+b_1-b_2} + \frac{b_2^2}{d+b_2-b_3} + \cdots\right)$$
$$\cdot\left(\frac{d}{2} + b_1 + \frac{b_1^2}{d+b_2-b_1} + \frac{b_2^2}{d+b_3-b_2} + \cdots\right)$$
$$= \frac{d}{2}\cdot\frac{S+d-b_1}{S+d+b_1}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{S+d+b_1}{S+d-b_1} = \frac{d^2}{4}.$$

Ist allgemein $b_r = 2r+1$, d eine grade ganze Zahl, so erhält man mit höchst einfachen Mitteln jenes Wallis'sche Theorem

$$\left(\frac{d}{2} - 1 + \frac{1^2}{d-2} + \frac{3^2}{d-2} + \cdots\right)\cdot\left(\frac{d}{2} + 1 + \frac{1^2}{d+2} + \frac{3^2}{d+2} + \cdots\right)$$
$$= \left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

welches jener Mathematiker bekanntlich nur auf sehr mühsame Art indirect beweisen konnte. Für $d = 2$ geht der erste Kettenbruch in den bekannten Brouncker'schen über:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \cdots = \frac{4}{\pi}.$$

Herr Bauer verallgemeinert das erlangte Resultat und stellt zum Schluss folgenden neuen Satz auf: Das Product der beiden Kettenbrüche

$$\frac{g+b+c}{2} + \frac{bc}{g+h} + \frac{(b+h)(c+h)}{g+h} + \cdots$$

d

$$\frac{g-(b+c)}{2}+\frac{bc}{g-h+\frac{(b+h)(c+h)}{g-h+\cdots}}$$

ıt stets den Werth

$$\tfrac{1}{4}(g-b+c)(g+b-c).$$

Der Beweis dieses Lehrsatzes, sei es durch die Hülfsmittel er älteren Analysis, sei es mit Benutzung des Multiplications-ıtzes der Determinanten, dürfte bedeutende Schwierigkeiten ırbieten. Gr.

Vierter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

C. MOREAU. Sur les permutations circulaires distinctes. Nouv. Ann. (2) XI. 309-314.

Die Anzahl der circulären Permutationen, d. h. der nach Verwerfung der cyklischen Verschiebungen übrigbleibenden, von S Elementen ist im allgemeinen gleich der Anzahl aller Permutationen dividirt durch S. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn einzelne Permutationen in congruente Gruppen zerfallen, die bei cyklischer Verschiebung mehrmals zur Deckung gelangen; dies findet statt, wenn alle Anzahlen gleicher Elemente einen gemeinsamen Factor haben. Zur allgemeinen Lösung wendet der Verfasser die Coefficienten der Taylor'schen Reihenentwickelung einer Function mehrerer Variabeln an und gelangt zu folgendem Ausdruck:

$$P_s^c = \frac{1}{S} \Sigma \varphi(\delta) \frac{P_s^r}{\delta}.$$

Hier ist δ ein beliebiger Divisor des grössten gemeinsamen Factors d aller Anzahlen gleicher Elemente, der in Primfactoren zerlegt lautet:

$$\delta = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}.$$

Die Summe erstreckt sich über alle möglichen Werthe von δ.

·ner ist

$$\varphi(\delta) = \delta\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$$

ickt aus, wie viele relative Primzahlen zu δ kleiner als ebt. Endlich bezeichnet der Ausdruck

$$\frac{P_s^r}{\delta} = \frac{\left(\frac{S}{\delta}\right)!}{\left(\frac{A}{\delta}\right)!\left(\frac{B}{\delta}\right)!\cdots\left(\frac{L}{\delta}\right)!},$$

?, ... L die Anzahlen gleicher Elemente bedeuten, die der geradlinigen Permutationen von $\frac{S}{\delta}$ Elementen, und gesuchte Anzahl der circulären Permutationen aller e. H.

ɪEAU. Solution de la question 444. Nouv. Ann. (2) 31-132.

nn man aus jeder von n Urnen, deren jede die m ersten enthält, eine Zahl zieht, so ist die Wahrscheinlichkeit, Summe der gezogenen Zahlen 1) $= k$ wird:

$$p_k = \frac{1}{m^n}\left(C_{k-1}^{n-1} - C_n^1 C_{k-1-m}^{n-1} + C_n^2 C_{k-1-2m}^{n-1} - \cdots\right)$$

s sie 2) zwischen k und $k+l$ liegt,

$$= \frac{1}{m^n}\left[\left(C_{k+l}^n - C_{k-1}^n\right) - C_n^1\left(C_{k+l-m}^n - C_{k-1-m}^n\right) + C_n^2\left(C_{k+l-2m}^n - C_{k-1-2m}^n\right) - \cdots\right].$$

Pr.

LOUS.. Études sur les nombres. Inst. XL. 253—254.

ıe Abschn. V. Cap. 2.

ss. Évaluation du nombre de combinaisons des- es les 28 dés d'un jeu du Domino sont suscep- ; d'aprés la règle de ce jeu. Brioschi Ann. (2) V. 90-120.

luss der Arbeit, über welche Bd. III. p. 80 referirt worden ist.

P. Volpicelli. Soluzione completa e generale, mediant la geometria di situazione, del problema relativo al corse del cavallo sopra qualunque scacchiere. Att. d. Acc. d. Linc. XXV. 87-160, 364-454.

Da die Arbeit noch nicht beendet ist, wird sie im nächsten Bande des Jahrbuchs zur Besprechung gelangen. Jg. (O.)

P. Volpicelli. Solution complète du problème relati au cavalier des échecs. C. R. LXXIV. 1099-1102.

Der Verfasser zieht diejenigen Springercurse, bei welche nur ein Theil des Schachbretts durchlaufen wird, als Lösunge des Problems für diesen Theil mit in Betracht und nennt s partielle Curse. Die allgemeine Bedingung des Schlusses i dann, dass jeder fernere Zug auf ein schon betretenes Feld zu rückführen würde. Von der eigentlichen Frage jedoch, wan dieser Schluss eintritt, wie viel und welche Curse für das Gan und für den Theil möglich sind, ist nicht die Rede. Es werd nur einige Folgerungen aus der Symmetrie gezogen, und d einzelnen Züge in Coordinaten tabellarisch dargestellt, ohne al Rücksicht auf die Bedingung kein Feld zweimal zu besetze Verwiesen ist auf einen frühern Aufsatz C. R. XXXI. 314, w der Verfasser die Basis des Problems entwickelt zu haben erklä

H.

Tarry. Solution du problème du cavalier au jeu d'échec par Mr. Volpicelli. Mondes (2) XXVIII. 60-64.

Der Verfasser giebt zunächst einen kurzen Ueberblick übe frühere Lösungen des Problems, die sich im „Dictionaire ency clopédique des amusements des sciences" (Paris 1792) zusammen gestellt finden. Er setzt speciell die Lösung von Moivre aus einander, bespricht sodann den Versuch einer allgemeinen Lösun von Van der Monde, und wendet sich zu einer Darstellung d Methode, die Volpicelli in einer Abhandlung (siehe C. R. XXX p. 314) und einer früheren aus dem Jahre 1852 (ebendaselbs gegeben. Volpicelli bezeichnet die Felder des Schachbretts dur

ihre Abscissen und Ordinaten. Es existiren dann 8 Paare von von je 2 Gleichungen, denen die Züge des Springers genügen müssen. Die Art und Weise der Lösung wird dann an dem Beispiel eines Schachbrettes mit 12 Feldern erläutert. O.

V. Bouniakowsky. Sur les combinaisons d'un genre particulier qui se rencontrent dans la question sur les livres défectueuses. Mém. de St. Pét. XX. 1871.

Der Verfasser beschäftigt sich mit folgender Frage: Wenn die Anzahl der unvollständigen Exemplare eines Buches und die Anzahl der in jedem Exemplar fehlenden Blätter bekannt ist, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich daraus eine bestimmte Anzahl vollständiger oder solcher Exemplare zusammensetzen lässt, in denen ein, zwei oder mehr Blätter fehlen.

Z. (O.)

J. Dienger. Ueber einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und damit zusammenhängende bestimmte Integrale. Prag. Abh. (6) V.

Es wird die Aufgabe gelöst, die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Summe einer Anzahl durch Versuche zu ermittelnder Grössen A zwischen gegebenen Grenzen liege, wenn dieselben einzeln zwischen gegebenen Grenzen liegen und ungleiche Wahrscheinlichkeit haben, die auch von Versuch zu Versuch variiren kann. Die Summe wird als Coefficient einer Reihenentwickelung dargestellt. Ist nämlich $F_r(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass A bei dem r^{ten} Versuche den Werth n habe, so drückt der Coefficient von $t^{m\omega}$ in dem Product

$$(\Sigma F_1(n)\, t^{n\omega})\; (\Sigma F_2(n)\, t^{n\omega}) \dots (\Sigma F_\mu(n)\, t^{n\omega}),$$

wo sich jede Summe Σ über die beim einzelnen Versuche möglichen Resultate erstreckt, die Wahrscheinlichkeit aus, dass die gefragte Summe $= m$ sei. Setzt man dann

$$t^\omega = e^{i\Theta},$$

multiplicirt mit $e^{m i\Theta}$ und integrirt zwischen $-\pi$ und π, so erhält man diesen Coefficienten. Nun hat man noch für m die zwischen

den gegebenen Grenzen liegenden Zahlen zu setzen und zu su miren; die Summe ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Sind alle Werthe von A gleich wahrscheinlich und für a Versuche gleich, so geht die gesuchte Grösse über in

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(\mu h - c)\, x \left(\frac{\sin gx}{gx}\right)^\mu \frac{\sin \varepsilon x}{x} \partial x,$$

wo $c \pm \varepsilon$ die verlangten Grenzen der Summe, $h \pm g$ die bekann Grenzen von t, μ die Anzahl der Versuche ist. Bei der A werthung des Integrals kann man c, ε, h, g als ganze Zahlen trachten, da man in x den gemeinsamen Nenner aufnehmen ka Auch ist $\sin \varepsilon x \cos(\mu h - c)\, x$ nur Summe zweier Werthe ersten Factors, daher reducirt sich das zu Berechnende auf

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin gx}{gx}\right)^\mu \frac{\sin \varepsilon x}{x} \partial x,$$

und dieses lässt sich in einer endlichen Reihe darstellen. Hi von werden besondere Fälle untersucht, und die Werthe ei Anzahl ähnlicher Integralausdrücke abgeleitet. Den gleich Reihenausdruck gewinnt der Verfasser direct für die genau Wahrscheinlichkeit auf anderm Wege. Er geht von folgen allgemeineren Betrachtung aus. Die Wahrscheinlichkeit jed Werthes der positiven Variabeln $t_1, t_2, \ldots t_n$ sei gegeben; Product der Wahrscheinlichkeiten ist dann die Wahrscheinlichk des gleichzeitigen Stattfindens aller n Werthe; dieses wird einer Function der Variabeln multiplicirt und dann summirt ül alle Werthcombinationen, für welche $s = \Sigma t$ zwischen gegebe Grenzen liegt. Die Differenzen der Werthe werden als unendl klein betrachtet, so dass sich die Summe als ein n-faches Integ darstellt. Es handelt sich um Bestimmung von dessen Grenz Die Bedingung für s lässt sich einführen durch Substitution $s - t_2 - \ldots t_n$ für t_1, derzufolge s mit seinen gegebenen Gren letzte Integrationsvariable wird. Nachdem successive die Gr zen der vorausgehenden Integrationen nach $t_2, t_3 \ldots$ festgest sind, werden verschiedene Specialisirungen eingeführt, bis Aufgabe mit der durch den Ausdruck P identisch wird. Integration selbst hat keine Schwierigkeit, und das Resultat

kommt unmittelbar die Form obiger Reihe. Das gleiche Resultat wird dann auf einem dritten Wege gewonnen, und schliesslich eine leichte Folgerung gezogen. H.

W. A. Whitworth. Chance. Messenger (2) I. 163-166.

Eine Anzahl gewöhnlicher Wahrscheinlichkeitsfragen werden aufgestellt und in eleganter Weise gelöst. Das Princip ist: anstatt zu fragen: „Wie viel Mal wird das Unternehmen fehlschlagen, bis dass es einmal gelingt?“ zu fragen: „Wie viel Versuche müssen gemacht werden, ehe das Unternehmen glückt?“ Glr. (O.)

T. Hopkinson. On the calculation of empirical formulae. Messenger (2) II. 65-67.

Es wird eine Methode aufgestellt, um die Coefficienten in einer empirischen Formel aus einer Anzahl von Experimenten zu bestimmen, wenn die Genauigkeit der Beobachtung nicht zur Anwendung einer so mühsamen Methode räth, wie die der kleinsten Quadrate ist. Die Methode soll in den Fällen gebraucht werden, in denen es nicht gebräuchlich ist, ein graphisches Verfahren zu benutzen und die Curve zu zeichnen. Der von ihr in Anspruch genommene Vorzug ist, dass sie von persönlichen Gleichungen frei ist, nämlich unabhängig von der Laune des Benutzenden. Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. Remarks on certain portions of Laplace's proof of the method of least squares. Phil. Mag. 1872.

Ein grosser Theil des vierten Capitels von Laplace's „Théorie des probabilités“ ist der Auffindung eines Gesetzes gewidmet für den mittleren Fehler bei einer grossen Zahl von Beobachtungen, deren Fehler alle einem und demselben Gesetze unterworfen sind. Eine grosse Vereinfachung dieses Theils der Laplace'schen Untersuchung wurde unter gleichzeitiger Verallgemeinerung von Leslie Ellis gegeben. Die vorliegende Arbeit leitet das gewöhn-

liche Resultat nach einer Methode her, welche der Untersuchung von Ellis ähnlich ist, aber die Rechnung eleganter und symmetrischer gestaltet. Csy. (M.)

J. W. L. GLAISHER. Remarks on a theorem in Laplace's probabilities. Messenger (2) II. 62-64.

Der Satz steht im letzten Paragraphen des 3ten Capitels von Laplace's Théorie analytique des probabilités (Nat. éd. p. 299) und bezieht sich auf sogenannte „Durchschnittscurven" (mean curves). Der Schluss beschäftigt sich mit einigen Fragen der Wahrscheinlichkeit, deren Lösung nicht leicht zu sein schien.

Glr. (O.)

J. W. L. GLAISHER. On the law of facility of errors of observations and on the method of least squares. Monthl. Not. XXXII. 241-242, Mem. of R. Astr. Soc. XXXIX. II. 75-124.

Die Abhandlung beginnt mit der Besprechung einer Arbeit von Dr. Cleveland Abbe, publicirt in dem „American Journal of Science and Arts" für den Juni 1871, die nachweisen will, dass Prof. Robert Adrain aus New-Brunswick die Methode der kleinsten Quadrate veröffentlicht hat, nachdem er sie selbst unabhängig von Andern entdeckt. Herr Glaisher unterzieht die Arbeit Dr. Adrain's einer gründlichen Prüfung und findet sie weit entfernt von Strenge, da das Raisonnement von zu leichter und wenig zwingender Natur ist, um zu dem Glauben zu führen, dass Herr Adrain, gleich Legendre, die Zweckmässigkeit, Gleichungen mit der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln, zuerst bemerkt und sich dann bemüht haben solle, diesen Weg mittelst der Theorie der Wahrscheinlichkeiten zu rechtfertigen.

Hauptzweck der Arbeit ist nun die Prüfung und Vergleichung der verschiedenen Darstellungen, die von dem Gesetz der Wahrscheinlichkeit gegeben sind. Nachdem der Verfasser den Weg gezeigt, auf dem Legendre die Methode ursprünglich dargestellt hat, werden die anderen speciell geprüft und in folgende Gruppen geordnet: 1) Gauss' ursprüngliche Untersuchung; im Anschluss daran Encke's, de Morgan's und Leslie Ellis' Bemerkungen über

das Princip des arithmetischen Mittels; 2) Laplace's Methode; im Anschluss daran Poisson's und Ellis' Vereinfachungen und Jvory's kritische Untersuchungen; 3) Gauss' zweite Darstellung und deren Zusammenhang mit der von Laplace; 4) Sir John Herschel's Beweis mit Ellis' und Boole's Kritik; 5) Prof. Tait's und ähnliche Beweise (Quetelet's etc.); 6) Donkin's Beweis. Ausserdem sind von Jvory 4 Darstellungen der Methode gegeben, von denen hier nur eine specieller besprochen wird, da die andern bereits von Ellis discutirt worden sind. Auch Abhandlungen von Bessel und Crofton werden hinzugezogen. Das Princip der arithmetischen Mittel, das entweder als Axiom oder als Resultat eines Beweises betrachtet ist, glaubt der Verfasser als unhaltbar bewiesen. Laplace's Methode, in der Erweiterung von Ellis, wird mit einigen Veränderungen reproducirt. Poisson's allgemeiner Beweis (Connaissance des Temps 1827) wird bewiesen als entstehend aus einem vielfachen Integral, welches mit Hülfe des Princips von Lejeune-Dirichlet ausgewerthet wird. Der ungeschickte Uebergang von endlichen zu unendlich kleinen Fehlern ist so vermieden. Der exacte Sinn, in dem Laplace's System von Factoren die wahrscheinlichsten Werthe von zu bestimmenden Grössen giebt, wird speciell dargethan. Sodann wird auf den von Laplace angenommenen Fall eingegangen, wenn die Wahrscheinlichkeiten $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)\cdots$ als bekannt vorausgesetzt werden und die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten gefunden werden sollen, und auch auf den andern Fall, wo $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)\cdots$ sowohl als auch die wahrscheinlichsten Werthe gefunden werden sollen. Im einen Falle, wo die Beobachtungen und die Gewichte derselben gegeben sind, findet man die Werthe, im andern, wo die Beobachtungen gegeben, die Gewichte und Werthe.

Die Methode der kleinsten Quadrate giebt in der That nur die erste Annäherung an die wahren Werthe, welche jedoch die Möglichkeit giebt, sowohl das Gewicht der Beobachtungen zu bestimmen, wie auch eine zweite Annäherung zu erhalten u. s. f. Ein Kriterium, wie das von Professor Pierre, es sei besser, eine Beobachtung ganz zu verwerfen, als ihr ein gleiches Gewicht mit der besten beizulegen, scheint im Princip unbegründet.

Die eigentliche Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate giebt einer nicht normalen Beobachtung ein sehr kleines Gewicht. Laplace's erste Darstellung des Gegenstandes wird seiner zweiten und also auch Gauss' zweiter Darstellung vorgezogen. Die beiden Betrachtungen des Gegenstandes von Laplace (in der ersten Darstellung) und von Gauss führen zu einem Satz über vielfache Integrale, der bewiesen wird.

Als Endresultat der Discussion aller Darstellungen der Methode ergiebt sich, dass die einzig correcte und philosophische Anschauung vom Gegenstande die ist, welche einen Fehler als entstanden betrachtet durch ein Aggregat vieler kleinerer Fehler, die auf unabhängigen Quellen beruhen und willkürlichen Gesetzen der Wahrscheinlichkeit unterworfen sind. Daher hat man nach Laplace's Analyse (obwohl er selbst sie nicht so angewandt hat) allgemein das Gesetz $e^{-h^2x^2}$ für individuelle wirkliche Fehler. Aus diesem Gesetz folgt auf einmal die Methode der kleinsten Quadrate, so dass, wenn die Zahl der Beobachtungen gross ist, ein doppelter Grund für dieselbe spricht. Die Abhandlung schliesst mit Bemerkungen über die Folgen, die eintreten würden, wenn das Gesetz der Wahrscheinlichkeit $e^{-m\sqrt{x^2}}$ wäre, eine Form, welche nicht allein sehr natürlich zu sein scheint, sondern welche auch wirklich von Laplace in einer seiner Abhandlungen als wahr angenommen wurde. Glr. (O.)

L. Lorenz. Udjevning af Jagttagelses fyl. Zeuthen Tidsskr. (3) II. 1.

Der Verfasser sucht eine allgemeine Lösung des Problems der Ausgleichung der Beobachtungsfehler zu geben. Wenn man nicht weiss, welche Functionen der Elemente die beobachteten Grössen sind, und man über die Form dieser Functionen Voraussetzungen machen muss, so giebt der Verfasser einen Weg an, zu beurtheilen, welche von mehreren Hypothesen man als die bessere zu betrachten hat. Der Aufsatz hat zu einer Polemik zwischen dem Verfasser und Herrn Zachariae Veranlassung gegeben. (Cfr. dasselbe Journal p. 97, 125, 182.)

Hn. (Wn.)

J. E. Hilgard. On the verification of the probability function. Rep. Brit. Ass. 1872.

Csy.

Drobisch. Ueber Mittelgrössen und die Anwendbarkeit derselben auf die Berechnung des Steigens und Sinkens des Geldwerthes. Leipz. Ber. XXIV. 25-48.

H.

W. Karup. Theoretisches Handbuch der Lebensversicherung. Leipzig 1871. Fritsch.

Das Handbuch zeichnet sich durch Vielseitigkeit der Auffassung seiner Aufgabe, Sorgfältigkeit in deren Lösung, Klarheit und Leichtfasslichkeit der Darstellung bei logischer Bestimmtheit aus, so dass es die verschiedensten Anforderungen, sowohl die des Mathematikers, der in die Praxis, wie die des Praktikers, der in die Theorie eingeführt sein will, und die des Historikers und Statistikers zu befriedigen vermag. Nach einer einleitenden Darlegung des Zubehörs der sogenannten Versicherungswissenschaft bildet die Geschichte des Lebensversicherungswesens den ersten Theil des Werkes (siehe Abschn. I. Cap. 1. p. 27). Hierauf folgt der aus den zwei Abschnitten über die Construction der Mortalitätstafel und über Zinseszinsrechnung bestehende theoretische Theil. Der erstere schliesst die Wahrscheinlichkeitslehre innerhalb der Grenzen, wo sie von Anwendung ist, in sich. Bemerkenswerth ist, dass die Mortalitätstafel nach Berücksichtigung aller Sterblichkeitsdifferenzen und deren Ursachen, doch schliesslich als ein einziges gleichmässig auf alle Umstände anzuwendendes Resultat in die Praxis eingeführt wird. Der Verfasser erkennt nur einen Fortschritt in der Vermehrung und correcteren Verwerthung der empirischen Data an, und bezeichnet die von Deparcieux aufgestellte Tafel als die vorzüglichste und gegenwärtig angenommene. Sie giebt für jedes Altersjahr a aus einer in einem Jahre geborenen Gesellschaft die Anzahl der Gestorbenen τ_a und Ueberlebenden λ_a, dann die mittlere und wahrscheinliche Lebensdauer vom betreffenden Alter an, unter letzterer

die Zeit verstanden, in welcher sich der Bestand auf die Hälfte reducirt, ferner die Sterbenswahrscheinlichkeit $\frac{\tau_a}{\lambda_a}$ und die Lebenswahrscheinlichkeit $\frac{\lambda_{a+1}}{\lambda_a}$, beides für das laufende Jahr an. Die Darlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie übersteigt nicht die engsten Grenzen des Elementaren. Im dritten Abschnitt werden nach Erklärung der Zinseszinsrechnung die zahlreich combinirten Fälle der Lebensversicherung durchgegangen, wobei nur die unterscheidenden Angaben in Begriff, Modus und Anwendung zu machen waren, und schliesslich die nöthige Anleitung zur Berechnung der Einsätze (Prämien) gegeben. H.

W. J. C. MILLER. Solution of question 1843. Educ. Times XVI. 50.

Drei Punkte werden beliebig innerhalb eines Kreises angenommen; finde die Wahrscheinlichkeit, dass der Kreis durch diese ganz innerhalb des gegebenen Kreises liege. Hi.

W. S. B. WOOLHOUSE. Solution of question 3164. Educ. Times XVI. 50–53.

Unzählige Punkttriaden werden innerhalb eines Kreises beliebig angenommen, die jede durch die Formeln schwarz oder roth bezeichnet werden, je nach dem der Kreis durch die drei Punkte ganz innerhalb oder theilweise ausserhalb des gegebenen Kreises liegt. Zeige, dass die grösste Dichtigkeit der schwarzen und die geringste der rothen Punkte in der Entfernung von zwei Drittel des Radius vom Mittelpunkt des gegebenen Kreises liegt.
Hi.

ELIZABETH BLACKWOOD. On experimental probability. Educ. Times XVI. 55-56.

G. S. CARR, H. MC. COLL, S. WATSON and others. Solution of question 3515. Educ. Times XVI. 93.

Wenn P und Q beliebige Punkte innerhalb eines Kreises sind, zeige dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kreis

mit Mittelpunkt P und Radius PQ ganz innerhalb des gegebenen Kreises liege, $\frac{1}{8}$ ist. Hi.

S. Watson. Solution of question 2621. Educ. Times XVI. 25.

Wenn vier Punkte auf einer Kugelfläche beliebig angenommen werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle auf einer Halbkugel liegen, $= \frac{7}{8}$. Hi.

Hugh Mc. Coll. Probability Notation. Educ. Times XVI. 29-31.

Das Symbol $p(r)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses, welches in einer Tabelle als r^{tes} gegeben ist, und $p(:r)$ die Wahrscheinlichkeit des Nichteintretens, so dass $p(r)+p(:r)=1$.

Das Symbol $p(m_a \cdot n_{:c} : r_e)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit des Eintretens vom m^{ten} und n^{ten} und des Nichteintretens vom r^{ten} Ereigniss. Die unteren Zahlen a, $:c$, e, welche nicht absolut nöthig sind, sollen ausdrücken, dass das Eintreten des m^{ten} und n^{ten} und das Nichteintreten des r^{ten} Ereignisses das Eintreten des a^{ten} und e^{ten} und das Nichteintreten des c^{ten} Ereignisses zur Folge hat. Der Ausdruck $a>b=c>d$ soll bedeuten, dass jede der beiden Bedingungen $a>b$, $c>d$ die andere einschliesst.

Dies wird angewandt zur Lösung der Aufgabe 3385: „In einem Rechtecke wird eine beliebige Gerade durch einen beliebigen Punkt gezogen; was ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Gerade zwei gegebene gegenüberliegende Seiten schneidet?“ und der Aufgabe 3440: „Eine Gerade wird beliebig über ein Fenster gezogen, welches 4 gleiche rechteckige Scheiben hat; was ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Gerade eine, zwei oder drei Scheiben trifft?“

(Andere Lösung der letzten Aufgabe von S. Watson auf p. 66.) Hi.

Hugh Mc. Coll and G. S. Carr. Solution of question 3408 (by Elizabeth Blackwood.) Educ. Times XVI. 103.

Ein Punkt wird beliebig in einem Fenster angenommen, welches 9 gleiche quadratförmige Scheiben hat und durch diesen Punkt wird eine Gerade in beliebiger Richtung gezogen. Finde die Wahrscheinlichkeit, dass diese Gerade 1, 2, 3, 4 oder 5 Scheiben trifft. Hi.

A. Martin and St. Watson. Solution of question 3451. Educ. Times XVI. 64-65.

Die mittlere Fläche aller Kreise, die innerhalb eines gegebenen Dreiecks gezogen werden können, ist ein Zehntel der Fläche des eingeschriebenen Kreises. Hi.

H. Mc. Coll. Solution of question 3342. Educ. Times XVI. 68.

Ein Punkt ist beliebig im Innern eines Dreiecks genommen und Senkrechte von ihm auf die Seiten gezogen. Beweise, dass $3\,lg\,2 - 2$ die Wahrscheinlichkeit giebt dafür, dass die drei Senkrechten die Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks sein können. Hi.

Weitere Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeit sind von den Herren G. S. Carr, Mc. Coll, J. Hopkinson, St. Watson, Sylvester, Miller etc. in Educ. Times XVI. XVII. behandelt.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

Th. Wittstein. Anfangsgründe der Analysis. Hannover. Hahn.

Dieses Lehrbuch, welches die erste Abtheilung des 3ten Bandes der „Elementarmathematik" des Verfassers bildet, ist für die Schule berechnet und zeichnet sich ebenso sehr durch Strenge und Einfachheit der Entwickelungen, wie durch eine erschöpfende Behandlung gewisser Gebiete aus, welche in den bekannten Werken dieser Art nur dürftig bedacht zu werden pflegen. Es ist in 12 Abschnitte eingetheilt, und die Analysis wird darin in zwei Theile gesondert, nämlich in die Theorie der reellen Zahlen, welche im ersten Abschnitte, und die Theorie der complexen Zahlen, welche im 9ten Abschnitte begründet wird. Der Zinseszins- und Rentenrechnung sowie der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein weit grösserer Raum als üblich gewidmet, was in Anbetracht ihrer Wichtigkeit für die Praxis als eine sehr dankenswerthe Zugabe zu begrüssen ist. Was die theoretische Ausführung im Einzelnen betrifft, so hat es der Verfasser verstanden, trotzdem, dass die Anwendung der Differentialrechnung, wie bei einer Schul-Analysis zu erwarten, ausgeschlossen blieb, in den Entwickelungen dem gegenwärtigen Standpunkt der Wissenschaft

gerecht zu werden. So werden die Exponentialreihen und di logarithmischen Reihen im unmittelbaren Zusammenhang mit d Binomialreihe abgeleitet, und die trigonometrischen Function werden durch die Definition der complexen Zahlen auf natu gemässe Weise in die Analysis eingeführt. Bemerkenswerth i ferner die ausführlichere Behandlung der Interpolation der Pr gressionen, sowie ein leicht fassliches lediglich auf der Betrac tung der Differenz-Reihen beruhendes Verfahren zur Auflösu der numerischen Gleichungen. Schliesslich sei noch auf ein in einer Elementar-Analysis gewiss nicht erwarteten höchst ei fachen Beweis für den Satz, dass jede algebraische Gleichu eine Wurzel habe, hingewiesen, welchen der Verfasser zuerst Grunert's Archiv XI. 1848 gegeben hat. Hr.

J. Thomae. Sur les limites de la convergence et de divergence des séries infinies à termes positifs.
Brioschi Ann. (2) V. 121-129.

Der Verfasser beweist zunächst auf elementarem Wege d Dirichlet'schen Satz, dass

$$\lim_{\sigma=0} \sum_0^\infty{}_n \frac{a\sigma}{(an+b)^{1+\sigma}} = 1$$

ist, ausgehend von der offenbar convergenten Reihe:

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{(an+b)^\sigma},$$

deren Grenzwerth für unendlich abnehmende positive σ beiläufi gleich $\frac{1}{2}$ gefunden wird. Aus der Convergenz der Reihe

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n^{1+\sigma}}$$

für alle positiven σ schliesst man, dass eine unendliche Reihe

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n + \cdots$$

absolut convergent ist, wenn von einem gewissen Werthe $n =$ an bis in's Unendliche für ein beliebig kleines positives σ $A_n n^{1+}$ unter einer bestimmten endlichen Grenze bleibt. Geschieht die erst für $\sigma = 0$, so ist die Reihe, falls sie aus lauter positive Gliedern besteht, divergent. Damit sind jedoch nach einer B merkung des Verfassers, die sich bereits in seinem Buche: Abri

einer Theorie der complexen Functionen p. 40 (II. Aufl. p. 9) ausgesprochen findet, die Grenzen für die Kleinheit von σ noch nicht genügend bezeichnet, da die Ordnungen des Verschwindens einer Function ein stetiges Grössengebiet bilden, für dessen Bestimmung die gemeinen reellen Zahlen nicht ausreichen ($\frac{1}{ln}$ verschwindet für $n = \infty$ in einer Ordnung, die kleiner als jede denkbare gewöhnliche Zahl ist, ohne Null zu sein). Indem nun der Verfasser noch Ordnungszahlen in Betracht zieht, die durch ein- und vielfache Logarithmen ausgedrückt werden, gelangt er zu folgendem allgemeinen Satze, der den obigen als besonderen Fall enthält: „Die unendliche Reihe

$$A_0 + A_1 \cdots + A_n + \cdots$$

ist absolut convergent, wenn es eine ganze positive Zahl m und eine noch so kleine positive Zahl σ giebt, für die

$$A_n \cdot n \cdot lg \cdot n\, lg^{(2)} n \cdots lg^{(m-1)} n \cdot [lg^{(m)} n]^{1+\sigma}$$

stets unter einer endlichen Grenze bleibt. Ist Letzteres jedoch nur der Fall, wenn $\sigma \overline{\gtrless} 0$ genommen wird, dann ist die Reihe, falls alle Glieder positiv sind, divergent.“ Hr.

J. Thomae. Bemerkung über Fourier'sche Reihen. Schlömilch Z. XVII. 78-82.

Nach derselben Methode, nach welcher Dirichlet (Liouville's J. (1) VII. 1862) den Abel'schen Satz bewiesen hat: „Die Reihe $\Sigma A_n r^n$ convergirt, wenn r gegen 1 convergirt, gegen dieselbe Grenze, wie die Reihe ΣA_n“ beweist der Verfasser folgende Erweiterung: „Ist $S(\varphi) = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$ eine trigonometrische Reihe, also

$$A_n = \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi,$$

und ist diese Reihe im Allgemeinen gleichmässig convergent, so ist

$$S(r,\varphi) = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \cdots + A_n r^n + \cdots$$

in dem Intervalle $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ und $r = 0$ bis $r = 1$ eine im Allgemeinen stetige Function von r und φ.“ M.

G. Cantor. Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Clebsch Ann. V. 123-133.

Der Satz betrifft die Eindeutigkeit der Darstellung einer Function durch eine trigonometrische Reihe; die Gültigkeit des Satzes war vom Verfasser (Borchardt J. LXXII. 139, siehe F. d. M. II. p. 218) selbst für den Fall bewiesen, dass für eine endliche Anzahl von Werthen des Arguments entweder auf die Convergenz oder die Uebereinstimmung der Reihensummen verzichtet wird. Die Ausdehnung besteht darin, dass für eine unendliche Anzahl von Werthen des Arguments in Intervalle $0-2\pi$ auf die Convergenz oder auf die Uebereinstimmuug der Reihensummen verzichtet wird, ohne dass die Gültigkeit des Satzes aufhört. Das Verständniss nicht allein des Beweises, sondern auch nur des Wortlautes des zu beweisenden Theorems setzt Erörterungen über den Begriff von Zahlen im weiteren Sinne voraus, welche sich in Kürze nicht wiedergeben lassen. Hr.

P. du Bois-Reymond. Ueber Auflösung von Gleichungen und Summation von Reihen durch bestimmte Integrale.
Borchardt J. LXXIV. 281-294.

Der Verfasser leitet die Lagrange'sche Reihe, sowie die allgemeinen Formeln von Parceval, Jacobi, Cauchy für die Auflösung von Gleichungen und Summation von Reihen durch bestimmte Integrale aus dem Cauchy'schen Fundamentaltheorem

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)\, dz}{z-\zeta}$$

ab. Insbesondere stellt er die Grenzen der Gültigkeit für die Lagrange'sche Reihe mit aller Strenge fest. Fs.

J. W. L. Glaisher. On semi-convergent series.
Quart. J. XII. 52-59.

Wenn sich eine semi-convergente Reihe als Resultat einer wiederholten theilweisen Integration ergiebt, so kann bei ihrem Gebrauch keine Ungewissheit stattfinden, weil ein gegebener Ausdruck des Restes (in Form eines Integrals) da ist; und wie immer die Zahl der eingeschlossenen Glieder sein mag, das Resultat ist, wenn der Rest in Rechnung gezogen wird, arithmetisch

ichtig für alle Werthe der Variabeln. Das scheinbare Räthsel, ass die Glieder erst convergiren und dann divergiren, scheint ine einfache Folge des Umstandes zu sein, dass der Rest als Function von n (der Zahl der Glieder) betrachtet, einen Minimumwerth für einige Werthe von n hat, wie auch immer der Werth der Variabeln ist.

Nachdem der Verfasser diese Betrachtung vorausgeschickt hat, zeigt er, wie man die Bernoulli'schen Reihen in endlichen Differenzen, nämlich

$$\Sigma\varphi x = C + \int\varphi(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \frac{B_1}{1.2}\varphi' x - \frac{B_2}{1.2.3.4}\varphi''' x \text{ etc.}$$

durch theilweise Integration erhalten kann, wobei sich dann ein Ausdruck für den Rest ergiebt. Sein Resultat ist:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\varphi(c) + \varphi(c+1) + \cdots + \varphi(x-1) + \tfrac{1}{2}\varphi(x)\\ &= \int_c^x \varphi(v)\,dv + \frac{B_1}{1.2}[\varphi'(x) - \varphi'(c)] \cdots\\ &\quad + (-)^{n-1}\frac{B_n}{1\cdot 2\cdots 2n}[\varphi^{2n-1}(x) - \varphi^{2n-1}(c)]\\ &\quad + (-)^{n-1}\,2\int_c^x \left\{\frac{\sin 2\pi v}{(2\pi)^{2n+1}} + \frac{\sin 4\pi v}{(4\pi)^{2n+1}}\cdots\right\}\varphi^{2n+1}(v)\,dv.\end{aligned}$$

Cly. (O.)

A. DE MORGAN. Note on: „A theorem relative to neutral series" in Vol. XI. part. II. Trans. of Cambridge XI. p. III. 447-460. 1871.

Eine Abhandlung über neutrale und divergente Reihen, die sich an eine frühere des Verfassers in denselben Transactións (siehe F. d. M. II. p. 127) anschliesst und erst nach des Verfassers Tode publicirt ist. Das Wort „terminus" wird als der Werth oder die Form definirt, der sich ein Ausdruck nähert, wenn sich x der Einheit durch Wachsen nähert. Wenn in einer Reihe eine unendliche Zahl von Gliedern fortwährend wächst, und dann eine Reihe convergirender Glieder folgt, so wird die Reihe als eine von unendlich verzögerter Convergenz (infinitely deferred convergence) bezeichnet, mag das letzte Glied der Diver-

genz auch unendlich gross sein oder nicht. Eine Reihe vo verschwindender Divergenz (evanescent divergence) ist ein Au druck von der Form $0 \cdot (a+b+c+\cdots)$, wo $a+b+c+\cdots$ dive gent oder auch von unendlich verzögerter Convergenz ist. M solchen Reihen beschäftigt sich die Abhandlung. Der Verfass untersucht auch, unter welchen Beschränkungen neutrale Reih durch gewisse arithmetische Werthe, wie z. B. die von Leibı $1-1+1-\cdots$ durch $\frac{1}{2}$, ersetzt werden können, und setzt den Z sammenhang mit dem Princip der verschwindenden Converge auseinander. Glr. (O.)

F. J. Studnička. Ueber Euler's Formel, nach welch convergente Reihen in rascher convergirende u gewandelt werden. Casopis I. 33-34. (Böhmisch).

Hat man die Reihe

$$s = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots,$$

wobei $u_1 > u_2 > u_3 \cdots$, zu transformiren, so bilde man zunächst

$$2s = u_1 + (u_1 - u_2) - (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) - \cdots$$

und führe die Bezeichnung

$$\varDelta^{m+1} u_k = \varDelta^m u_k - \varDelta^m u_{k+1}$$

ein. Man erhält hierdurch

$$2s = u_1 + \varDelta u_1 - \varDelta u_2 + \cdots = u_1 + \varDelta (u_1 - u_2 + u_3 - \cdots)$$

oder

$$2s = u_1 + \varDelta s.$$

Unter entsprechender Benutzung des Operationssymbols $\varDelta$ folgt dann hieraus

$$s = \frac{u_1}{2-\varDelta},$$

und wenn die angezeigte Division ausgeführt und die Bedeutun des Symbols $\varDelta$ restituirt wird, die bekannte Euler'sche Formel

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varDelta^k u_1}{2^{k+1}}.$$

W.

J. Grolous. Études sur les nombres, les séries et l équations. Inst. XL. 253-256.

Ist R_n die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl durch eine ›r Primzahlen P_1, $P_2, \cdots P_n$ theilbar ist, so ist

$$R_n = \frac{1}{P_1} + \frac{1-R_1}{P_2} + \frac{1-R_2}{P_3} + \cdots \frac{1-R_{n-1}}{P_n}.$$

Der Verfasser lenkt hier die Aufmerksamkeit auf die Unabhängigkeit des Ausdrucks von der Reihenfolge der P und zieht laraus Consequenzen auf ähnliche recurrirende Ausdrücke, die ›benso unabhängig sind. Ferner folgt sehr leicht, dass, wenn P_n die n^{te} der Primzahlen 2, 3, 5, ⋯ bezeichnet,

$$\frac{1}{P_1} + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1-R_{n-1}}{P_n} = 1$$

st. Ebenso leicht findet man durch successive Addition:

$$q + \sum_{n=1}^{n=\infty} q(1-R_n) = 1,$$

wo q willkürlich, und R_n die Summe der vorhergehenden Terme ausdrückt; nur hört ausserhalb der Grenzen $q = 0$ und $q = 2$ die Convergenz auf, was der Verfasser unterlassen hat zu bemerken. Bei gleicher Bedeutung von R_n werden die Reihen untersucht, deren allgemeines Glied die Form $\varphi(R_n)$ hat, und folgende Sätze gefunden. R bezeichnet die Summe der unendichen Reihe.

Für $\varphi(R_n) = \alpha + \beta R_n$ ist

$$R_n + \frac{\alpha}{\beta} = \left(R_1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)(1+\beta)^{n-1}; \; R = -\frac{\alpha}{\beta} \text{ für } 0 < -\beta < 2.$$

Ist die Reihe $\varphi(R_n)$ convergent, so ist R eine Wurzel der Gleichung $\varphi(R) = 0$.

Die Bedingung, unter der die Reihe $A\varphi(R_n)$ convergirt und zur Summe hat, ist

$$-2 < \lim A \frac{\varphi(R_n)}{R_n - \varrho} < 0 \text{ oder auch } -2 < \varphi'(\varrho) < 0.$$

Auf die gleichzeitige Bedeutung der Wurzel ϱ als Grenzwerth nes recurrirenden Ausdrucks und als Wurzel der Gleichung $(\varrho) = 0$ wird nun ein Approximationsverfahren zur numeri›en Auflösung beliebiger Gleichungen gegründet, welches sich loch nicht nach fester Formel vollziehen lässt, sondern wieder›te freie Wahl nach Abschätzung erfordert. H.

D. Bierens de Haan. Jets over quadratur by benadering. Versl. en Mededeel. (2) VI. 185-208.

Eliminirt man successive $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(5)}(x)$, $f^{(7)}(x)$, $f^{(9)}(x)$ aus der Entwickelung von $f(x+h)-f(x) = \Delta f(x)$ nach dem Taylor'schen Satze, indem man $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(4)}(x)$ etc. entwickelt, so hat man:

$$\Delta\Big[fx - \frac{h}{2}f'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x) - \frac{h^4}{720}f^{(4)}(x)$$

$$+\frac{h^6}{30240}f^{(6)}(x) - \frac{h^8}{1209600}f^{(8)}(x)\Big] = hf'(x) + f^{(11)}(x) + \text{etc.}$$

Wendet man dasselbe Verfahren auf diese Formeln an, wie auf die Taylor'sche Reihe, so findet man eine andere, die nur ungrade Potenzen von h enthält. Man findet so den Näherungswerth des Restes in jeder dieser Entwickelungen, wenn man von dem Werth des Restgliedes der Taylor'schen Reihe in Form eines bestimmten Integrals ausgeht. Bei dieser Rechnung ergeben sich verschiedene Reductionen, deren allgemeinen Grund aufzusuchen von Interesse wäre. Wendet man die beiden Hauptformeln successive auf die Werthe $x = a,\ a+h,\ a+2h \cdots$ $a+(n-1)\,h = b-h$ an und addirt alle Resultate, so findet man den Werth des Integrals:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Mn. (Wn.)

M. Marie. Détermination du périmêtre de la région de convergence de la série de Taylor et des portions des différentes conjuguées comprises dans cette région, ou construction du tableau général des valeurs d'une fonction que peut fournir le développement de cette fonction suivant la série de Taylor. C. R. LXXV. 469 —472.

Auszug aus einer Abhandlung, in welcher die Untersuchungen des Verfassers über algebraische Functionen im J. von Liouville 1856—61 fortgesetzt sind. St.

F. St. Marie. Détermination du point critique, où est limitée la région de convergence de la série de Taylor. C. R. LXXV. 1485-1486.

Es sei $f(xy) = 0$. Es handelt sich um die Entwickelung von y nach Potenzen von x in der Umgebung von $x_0 = \alpha_0 + \beta_0 i$ mit dem entsprechenden Werthe von y, $y_0 = \alpha_0' + \beta_0' i$. Man setze $x = \alpha + \beta_0 i$ und lasse α allein sich ändern, dann wird $y = \alpha' + \beta' i$ eine complexe Function von α allein, mit verschiedenen Zweigen, deren einer auch den Ausgangspunkt x enthält. Nach der schon erwähnten dem Verfasser eigenthümlichen Darstellung des Imaginären construirt er statt der complexen Function die reellen Curvenzweige, die man erhält, indem man $x = \alpha + \beta_0$, $y = \alpha' + \beta'$ setzt. Es sind nur diejenigen kritischen Punkte zu betrachten, welche bei der erwähnten Darstellung zwischen dem Zweige, der $x_0\, y_0$ enthält, und den beiden Nachbarzweigen sich befinden. Sei $x = a_n + b_n i$, $y = a_n' + b_n' i$ ein solcher kritischer Punkt, in welchem p Punkte zusammenfallen mögen, dann variire man b_n allein bis zu β_0 und construire nach der erwähnten Darstellung die p Curvenzweige, die vom kritischen Punkte ausgehen. Trifft keiner derselben denjenigen der vorhin construirten Curvenzweige, welcher $x_0\, y_0$ enthält, so bleibt dieser kritische Punkt ausser Betracht. Von den übrig bleibenden kritischen Punkten ist derjenige zu nehmen, dessen Differenz von $\alpha_0 + \beta_0 i$ den kleinsten Modul hat; und die Entwickelung von y nach Potenzen von $x - x_0$ ist so lange convergent, als der Modul von $x - x_0$ kleiner ist, als der gefundene Modul. Hr.

J. M. U. Wilkinson. Further note on Taylor's theorem. Messenger (2) I. 135-137.

Antwort auf Herrn Cayley's Notiz: „Further note on Lagrange's demonstration of Taylor's theorem; siehe Messenger (2) I. 105 u. 106, F. d. M. III. p. 106. Glr. (O.)

Cayley. Further note on Taylor's theorem. Messenger (2) I. 137.

Antwort Herrn Cayley's auf die obige Note Herrn Wilkinson's und seine Schlussbemerkung. Glr. (O.)

G. Forbes. Illustration of Taylor's theorem. Messenger (2) II. 106-107.

Glr.

Capitel 2.

Besondere Reihen.

G. Dostor. Sommation directe et élémentaire des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers. Grunert Arch. LIV. 70-78.

Nichts Bemerkenswerthes. Hr.

H. Brocard. Démonstration élémentaire des formules relatives à la sommation des piles de boulets. Nouv. Ann. (2) XI. 169-172.

Einfache Entwickelung der bekannten Formeln für die Summe der Kugeln in Haufen. Pr.

W. Batschinsky. Theorie der arithmetischen und anderer verwandten Reihen. Leipzig. Schmaler und Pech.

Es werden in elementarer Weise die Summen der mit gleichen oder abwechselnden Zeichen versehenen p^{ten} Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe aus den Summen der $p-1^{ten}$, $p-2^{ten}$ $\cdots o^{ten}$ Potenzen der Glieder derselben arithmetischen Reihe entwickelt. Darauf folgt die Berechnung der Summen

$$\sum_{u=1}^{u=n} \frac{u(u+1)\cdots(u+m)}{(m+1)!} \text{ und } \sum_{u=1}^{u=n} \frac{m!}{u(u+1)\cdots(u+m-1)}$$

und schliesslich die Herleitung zweier Reihen für π.

Hr.

SIACCI. Intorno ad una serie ed ad una funzione dei coefficienti binomiali. Battaglini G. X. 349-360.

Gelegentlich der Entwicklung von $f\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ in eine nach 'otenzen von x fortschreitende Reihe beweist der Verfasser durch 'oefficientenvergleichung einige Eigenschaften der Bernoulli'schen ahlen, der Binomialcoefficienten und anderer combinatorischer usdrücke. Fs.

. W. L. GLAISHER. On a deduction from von Staudt's property of Bernoulli's numbers. Proc. of L M. S. IV. 212 -214.

Der Verfasser hat bei Berechnung der Werthe der Euler'schen Constante bemerkt, dass in dem Decimalausdruck der ersten 29 Bernoulli'schen Zahlen die wiederkehrenden Perioden von B_n, $\frac{B_n}{2^{2n}}$ oder $2^{2n} B_n$ dieselben sind. Er hat also gefunden, dass der allgemeine Satz die unmittelbare Folge einer Eigenschaft der Bernoulli'schen Zahlen ist, die in Crelle's J. XXI. 372 (1840) gegeben worden ist. Cly. (O.)

I. W. L. GLAISHER. On the constants which occur in certain summations by Bernoulli's series. Proc. of L. M. S. IV. 48-56.

In den Anwendungen der Reihen

$$\Sigma u_x = C + \int u_x dx - \tfrac{1}{2} u_x + \frac{B}{1\cdot 2}\frac{du_x}{d_x} - \frac{B_n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{d^3u_x}{du^3} + \cdots$$

uss die Constante C für alle verschiedenen Formen von u_x be-nders bestimmt werden; speciell für $u_x = x^{-1}$ ist es Euler's onstante 0,577216 ... Indem der Verfasser allgemein $\Phi(m)$ r $u_x = x^{-m}$ (so dass $\Phi(-1)$ = Euler's Constante) schreibt, giebt in seiner Tafel I. die Werthe von $\Phi\left(-\frac{1}{m}\right)$ und $\Phi\left(-1-\frac{1}{m}\right)$ · die ganzen Zahlen von $m = 1$ bis $m = 20$. Er bemerkt, dass dieser Tafel $\Phi\left(-1-\frac{1}{m}\right) = m +$ einem Decimalbruch, und dass

es dieser Bruchtheil ist, der mit m bis 0,577216 als Grenze wächst. Es folgen drei andere Tafeln für verwandte Functionen.

Cly. (O.)

E. DE HUNYADY. Solution de la question 979. Nouv. Ann. (2) XI. 39-44.

Bestimmung der Coefficienten $A_1, A_2, A_3 \cdots A_n$ in der Function: $y = A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \cdots + A_n \cos nx$, so dass für $x = \frac{\pi}{n+1}$ $y = y_1$; für $x = \frac{2\pi}{n+1}$ $y = y_2 \cdots$ für $x = \frac{n\pi}{n+1}$ $y = y_n$ wird. ($y_1, y_2, y_3 \cdots y_n$ sind gegebene Grössen).

Pr.

W. WALTON. On the expression for cosinus of multiple angles in terms of powers of cosinus and conversely. Quart. J. XII. 168-171.

Cly.

W. WALTON. On the expansion of functions in trigonometrical series. Quart. J. XII. 146-148.

Die Arbeit enthält einen Beweis der Formel mit Hülfe der Relation

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots \text{ in inf.} = \tfrac{1}{2}(\pi - x),$$

wo x einen Werth von 0 bis $\pi - 0$ hat, 0 aber eine positive unendlich kleine Grösse, nicht Null bezeichnet. Cly. (O.)

O. SCHLÖMILCH. Gelegentliche Bemerkung. Schlömilch XVII. 520.

Bezeichnet Q das arithmetische, R das geometrische Mittel der Zahlen

$$a, a+b, a+2b, \ldots a+(n-1)b,$$

so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q}{R} = \tfrac{1}{2} e.$$

M.

J. W. L. Glaisher. On functions with recurring derivatives. Prof. of L. M. S. IV. 113-116.

Betrifft die Functionen

$$1+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^6}{1\cdot2\cdots6}+\cdots,$$

$$\frac{x}{1}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{x^7}{1\cdot2\cdots7}+\cdots,$$

$$\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{x^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}+\cdots,$$

für die Werthe $n=3$ und die ähnlichen Functionen für $n=$ irgend einer ganzen Zahl grösser als 3, welche den Functionen $\cos x$, $\sin x$ ($n=2$) entsprechen. Sie können nämlich ausgedrückt werden als lineare Functionen der Exponenten von x, wx, w^2x etc., wenn w die n^{te} Wurzel der Einheit ist. Diese Functionen wurden zuerst von Olivier (Crelle J. II. 1827) betrachtet. Cly. (O.)

A. Winckler. Ueber die Entwicklung und Summation einiger Reihen. Wien. Ber. LXIV., II. Abth. Dec. 1871.

Der erste Gegenstand vorliegender Arbeit betrifft die Entwickelung bestimmter Integrale in einer Form, welche in der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet wird. Es wird nämlich mit Anwendung der Formel

$$\int f(x)\,dx=\int u\cdot dx=u\cdot\frac{u}{u'}-\int u\,d\frac{u}{u'}$$

und durch fortgesetzte theilweise Integration:

$$\int u\,dx=\frac{u^2}{u'}(1-z_1+z_2-\cdots+(-1)^{n-1}z_{n-1})+(-1)^n\int uz^n dx,$$

wo

$$z_1\,dx=d\frac{u}{u'},\cdots z_n\,dx=d\frac{u}{u'}\cdot z_{n-1}$$

ist. Daraus ergiebt sich eine Formel für das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, welche sich, abgesehen vom Restgliede, schon bei Laplace (Théorie anal. des probabilités, I. 2. ch. 1) findet. Dadurch, dass man in den aufeinanderfolgenden theilweisen Inte-

grationen verschiedene Anordnungen eintreten lässt, erhält man verschiedene andere Entwickelungen des gegebenen Integrals von wesentlich allgemeinerer Form.

Der zweite Gegenstand betrifft die Anwendung der Formel für den n^{ten} Differentialquotienten einer Function auf die Summation gewisser endlicher Reihen. Ist nämlich $y = f[\varphi(x)] = \psi(x)$, so lautet jene Formel:

$$\Sigma\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{\varphi^{(n)} x}{n!}\right)^{i_n}\frac{f^{(i_1+i_2+\cdots+i_n)}(u)}{i_1!\, i_2!\cdots i_n!} = \frac{\psi^{(n)} x}{n!},$$

für alle positiven ganzen Zahlen $i_1, i_2 \cdots i_n$, die der Bedingung $\Sigma n i_n = n$ genügen. Setzt man $f(u) = e^u$, $u = -\log(1-x)$, so ergiebt sich die merkwürdige Summenformel, welche Jacobi in seinem Aufsatze: „Zur combinatorischen Analysis“ Crelle XXII betrachtet hat. Aehnliche bemerkenswerthe Formeln ergeben sich durch die Substitution

$$f(u) = \log(1+u) \text{ und } u = e^x - 1,$$

oder

$$f(u) = e^u$$

oder

$$= \log(u+\alpha) \text{ und } u = \sum_1^m \alpha_m x^m,$$

oder

$$f(u) = u^{\frac{b}{a}} \text{ und } u = \frac{1}{(1-x)^a},$$

oder

$$f(u) = \frac{u^2}{1-(1-c)u^2} \text{ und } u = \frac{x}{\sqrt{x^2-2ax+1}},$$

oder

$$f(u) = e^{bu} \text{ und } u = \frac{1}{\sqrt{x^2-2ax+1}}, \text{ etc. —}$$

Drittens leitet der Herr Verfasser durch zweifache Darstellung des Integrals

$$\int_{a_1}^{b_1} u_0\, dx_1 \int_{a_2}^{b_2} u_1\, dx_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} u_{x-1} \overset{(x)}{f}(u_x)\, dx_n, \quad u_n = x x_1 x_2 \ldots x_n$$

die Formel her:

$$\sum_{\lambda=0\ldots\infty}(b_1^{\lambda+n}-a_1^{\lambda+n})\ldots(b_n^{\lambda+1}-a_n^{\lambda+1})\frac{x^{\lambda+n} f^{(\lambda+n)}(0)}{(\lambda+n)!} = \Sigma\varepsilon\frac{f(c_1 c_2 \ldots c_n x)}{c_1^0 c_2^1 c_3^2 \ldots c_n^{n-1}}$$

worin $c_1 c_2 \ldots c_n$ irgend ein Glied der Entwickelung des Products

$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$ bedeutet und $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem jenes Glied positiv oder negativ ist. Durch m-malige Differentiation ergiebt sich aus der obigen Formel eine zweite:

$$\sum_{\lambda=0\dots\infty} (b_1^{\lambda+n} - a_1^{\lambda+n}) \dots (b_n^{\lambda+1} - a_n^{\lambda+1}) \frac{x^{\lambda-m+n}}{(\lambda-m+n)!} f^{(\lambda-m+n)}(0)$$
$$= \Sigma \varepsilon c_1^m c_2^{m-1} \dots c_n^{m-n+1} f(c_1 c_2 \dots c_n x).$$

Beide Formeln geben also die Summen der beiden unendlichen Reihen links in endlicher Form; und zwar lässt sich die Summe dieser Reihen auch dann noch durch eine lineare Zusammensetzung von Werthen der Function $f(x)$ mit verschiedenen Werthen des Argumentes x ausdrücken, wenn Gruppen von Zwischengliedern in einer bestimmten Anzahl und Ordnung weggelassen werden. M.

J. W. L. GLAISHER. Solution of question 3722. Educ. Times XVII. 101.

Beweise, dass

$$\Sigma\Sigma \frac{1}{(x+i)(x+j)} = -\pi^2,$$

wenn i und j alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ (einschliesslich Null) durchlaufen, aber so, dass i und j nie denselben Werth gleichzeitig annehmen. x darf keine ganze Zahl sein. Hi.

P. DU BOIS-REYMOND. Summation der Reihe mit dem Gliede $\frac{p \sin pu}{h^2+p^2}$. Clebsch Ann. V. 399-400.

Setzt man

$$\frac{\pi}{2} f(u) = \Sigma \frac{p \sin pu}{h^2+p^2} = \Sigma \sin pu \int e^{-h\varrho} \sin p\varrho \, d\varrho,$$

so ergiebt sich durch Zerlegung des bestimmten Integrals

$$f(u) = \frac{e^{h\pi} e^{-hu} - e^{-h\pi} e^{hu}}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}}.$$

Dieses Beispiel zeigt, wie man die Fourier'sche Reihe benutzen kann, um aus den gegebenen Coefficienten die Function herzustellen. M.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1.

Allgemeines. (Lehrbücher etc.)

H. CALDERWOOD. Philosophy of the infinite. 3d. ed. London. Macmillan. 8°.

RICARD. Études sur le calcul différentiel. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

B. WILLIAMSON. Differential calculus with numerous examples. London. Longmans. 8°.

Hi.

J. HOÜEL. Cours de calcul infinitésimal, professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Seconde Partie suivie d'un Appendice sur la Théorie des quantités complexes. Paris. Gauthier-Villars. Bordeaux. Vve Chaumas.

Dem ersten Theil dieses Werkes, über den wir im vorigen Bande p. 113 sq. berichtet haben (siehe auch p. XXXIV.), hat der Herr Verfasser noch zwei Paragraphen hinzugefügt: 1) über die näherungsweise Berechnung der bestimmten Integrale, und 2) über die Entwickelung impliciter Functionen mit Hülfe der Lagrange'schen Reihe. — Der vorliegende zweite Theil der Infinitesimal-

ıung enthält in 30 Vorlesungen hauptsächlich die Theorie
)ifferentialgleichungen, und in einem Anhang 12 Vorlesungen
die Elemente der Theorie der complexen Grössen. Der
Verfasser beginnt mit den Bedingungen der Integrabilität
Differentiale erster Ordnung mit mehreren unabhängigen
nderlichen, und ihrer Integration; giebt dann die Bildung
Differentialgleichung erster Ordnung durch Elimination eines
ürlichen Parameters, die Definition des allgemeinen Integrals,
ingulären und der fremden Lösung, und die Deutung dieser
rentialgleichungen und ihrer Lösungen an zahlreichen geo-
schen Beispielen; zeigt ebenso die Bildung der Differential-
hungen höherer Ordnung durch Elimination mehrerer will-
chen Constanten; und beweist das allgemeine Theorem, dass
Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen zwei Variabeln
allgemeines Integral hat, d. h. dass man mit Hülfe dieser
hung ein Polygon construiren kann, dessen Grenze eine
ꞔ ist, welche n willkürlich gewählten Bedingungen genügt.
ist der Inhalt der Vorlesungen 1 bis 4, welche gleichsam
Einleitung in die Theorie der Differentialgleichungen bilden.
folgen die hauptsächlichsten Methoden für die Integration
)ifferentialgleichungen erster Ordnung, in denen eine Tren-
der beiden Variabeln möglich ist, und die Integration der
ren Differentialgleichungen erster Ordnung. Es wird das
tionstheorem mehrerer transcendenter Functionen, u. a. von
n x, hergeleitet als Anwendung der Integration der Differen-
eichungen. Die Theorie des Multiplicators der Differential-
hungen erster Ordnung wird an zahlreichen Beispielen er-
rt. Hieraus werden die Differentialgleichungen erster Ord-
und höheren Grades in $\frac{dy}{dx}$ gebildet, und ihre Integration
ı Auflösung nach $\frac{dy}{dx}$, oder durch Differentiation oder durch
ıdere Transformation an mehreren Beispielen gezeigt. Die
ılären Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung,
Enveloppen der durch das allgemeine Integral dargestellten
enschaar, werden durch Construction der Fläche gewonnen,

deren Niveaulinien die eingehüllten zu Projectionen haben, und es werden die unterscheidenden Criterien für die singulären Lösungen und die particulären Integrale gegeben. Nach der Entwickelung einiger Fälle, in denen sich die Integration der Differentialgleichungen höherer Ordnung vollständig durch Quadraturen bewirken lässt, giebt der Herr Verfasser die Fälle, wo man die Ordnung der Differentialgleichung erniedrigen kann (Vorles. 5—10.). Hierauf folgt das Studium der allgemeinen Eigenschaften der linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, in denen das zweite Glied fehlt; die Integration der linearen Differentialgleichungen ohne zweites Glied mit constanten Coefficienten, und solcher, welche sich auf diese zurückführen lassen; und die Auseinandersetzung der Methoden d'Alembert's, Lagrange's und Cauchy's für die Herleitung des particulären Integrals der Gleichung mit zweitem Glied aus dem allgemeinen Integral der entsprechenden Gleichung ohne zweites Glied mit denselben Coefficienten, und für die Erniedrigung der Ordnung der ersteren Gleichung (Vorles. 11—13). Dem analog wird die Theorie der simultanen Differentialgleichungen entwickelt (Vorl. 14—16), und mit der Behandlung des Falles, wo in der zur Bestimmung von z gegebenen Relation $dz = pdx + qdy$, die Functionen p und q explicite die Variable z selbst enthalten, und seiner Folgen, schliesst die Theorie der totalen Differentialgleichungen (Vorl. 17). Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen beginnt mit der Bildung solcher durch Elimination der willkürlichen Functionen; es werden die Differentialgleichungen der Haupt-Flächengattungen entwickelt, es wird die Anwendung auf die Theorie der einhüllenden Flächen gemacht, und die Bildung der nicht linearen partiellen Gleichungen erster Ordnung gezeigt (Vorl. 18—20). Nach der allgemeinen Discussion der partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln wird gezeigt, wie das Problem der Integration der linearen partiellen Gleichungen zurückzuführen ist auf die Integration eines Systems simultaner Gleichungen erster Ordnung mit gewöhnlichen Differentialen. Dann folgt die Integration der nicht linearen partiellen Gleichungen erster Ordnung für zwei unabhängige

riable, und schliesslich die Betrachtung der Eigenschaften der earen partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung orles. 21—24). Die folgenden 3 Vorlesungen enthalten die ieorie der Variationsrechnung; und zwar die Variation eines stimmten Integrals, die Bildung der Differentialgleichungen ır Bestimmung der unbekannten Functionen und Anwendungen f kürzeste Linien und isoperimetrische Probleme (Vorl. 25—27). Folgenden entwickelt der Verfasser den Ausdruck des Krümgsmaasses einer Fläche durch die in dem Bogenelement $= \sqrt{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)}$ enthaltenen Functionen E, F, G d deren Ableitungen nach u, v und zeigt die Unveränderlichit dieses Krümmungsmaasses bei der Deformation der Fläche; igt die Eigenschaften der durch geodätische Linien gebildeten guren, und wendet die entwickelten Methoden auf das Studium r Flächen zweiter Ordnung an (Vorl. 28—30). Hiermit schliesst Infinitesimalrechnung. — Der Anhang enthält die Elemente r Theorie der complexen Grössen. Auf einige Vorbemerkungen ır arithmetische und algebraische Operationen überhaupt folgt e analytische Darstellung im Raume einer und im Raume eier Dimensionen, die Definition der sechs Grundoperationen t complexen Grössen, und das Fundamentaltheorem aus der ieorie der Gleichungen (Vorl. 1—4). Vorl. 5 behandelt die xponentialfunctionen, die Kreisfunctionen, die Logarithmen und e cyclometrischen Functionen, und Vorl. 6 die allgemeinen genschaften der Functionen einer complexen Variabeln. Hierf werden die Integrale längs geschlossener Linien behandelt, Integrale um einen Punkt und die Darstellung einer synechen Function als ein solches Integral, sowie die Reihenentkelung nach Cauchy und Laurent (Vorl. 7 u. 8). Demnächst gt das Studium einer eindeutigen Function in der Umgebung ies Null- oder Unendlichkeitspunktes (Vorl. 9). Die letzten ei Vorlesungen (10—12) enthalten die Reihen von Bürmann d Lagrange, die Berechnung der bestimmten Integrale und wendungen der Theorie der complexen Grössen auf die analysche Geometrie. M.

ABEL SOUCHON. **Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral.** 2 vol. Paris, Arthur Bertrand.

Der erste Band, die Differentialrechnung, zerfällt in 3 Bücher: 1) Principes généraux du Calcul différentiel, 2) Applications analytiques, 3) Applications géométriques. Der zweite Band, die Integralrechnung, enthält 5 Bücher: 1) Principes généraux du Calcul intégral, 2) Applications géométriques du Calcul intégral, 3) Intégration des équations différentielles, 4) Calcul des variations, 5) Calcul des différences finies. Eine ausführliche Critik findet sich in Darboux Bull. III. 33—35. M.

P. GILBERT. **Cours d'analyse infinitésimale. Partie élémentaire.** Louvain, Reters. Paris, Gauthier-Villars.

Die Principien der Infinitesimalrechnung und die gewöhnlichen Anwendungen auf Analysis und Geometrie sind in diesem Handbuch mit grosser Strenge entwickelt. Jedem Capitel ist eine grosse Zahl gut gewählter Beispiele beigefügt. Als besonders bemerkenswerth ist zu bezeichnen der Beweis der Gleichungen

$$\lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^2 u}{dx\,dy} = \frac{d^2 u}{dy\,dx},$$

und verschiedene andere Anwendungen des Theorems: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ dem mittleren Werthe von $\frac{dy}{dx}$, z. B. auf die Untersuchung der wahren Werthe unbestimmter Ausdrücke. Endlich sei erwähnt der Beweis der Existenz des Integrals von Differentialgleichungen erster Ordnung, Der ganze Theil, der die Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie enthält, scheint dem Berichterstatter besser und vollständiger als in andern Handbüchern von gleichem Umfange. Mn. (Wn.)

F. JOACHIMSTHAL. **Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung.** Leipzig. Teubner.

Siehe Abschn. IX. Cap. 3. A.

Th. Kötteritzsch. Recension über K. Spitz's ersten Cursus der Differential- und Integralrechnung. Schlömilch Z. XVII. 36-38.

Siehe F. d. M. III. p. 114.

G. Boole. Calculus of finite differences 2e ed. by J. F. Moulton. London. Macmillan. 8°.

Hi.

Debacq. Deux classes de nombres. Mondes (2) XXIX. 308-310.

Debacq. Les infiniment petits de Leibniz sont susceptibles d'une définition précise. Premiers principes du calcul infinitésimal. Mondes (2) XXIX. 486-488.

In einer der früher besprochenen Arbeiten (siehe F. d. M. I. p. 24. II. p. 298) hatte der Verfasser zwei Classen von Zahlen aufgestellt, nämlich commensurable und incommensurable. In der ersten Note bespricht er Einwürfe dagegen, die er zum Theil für berechtigt anerkennt, und die ihn dazu führen, diese Classen lieber zu bezeichnen als Zahlen „exprimable par un monôme arithmétique“ und „non exprimable par un monôme arithmétique.“ In der zweiten Note giebt er zunächst den am Schluss der ersten versprochenen Beweis des Satzes, dass die Reihe der Zahlen mit einer incommensurabeln Grösse beginne, dass es also incommensurable Grössen gebe, kleiner als jede beliebige commensurable. Sodann geht er zu dem Begriff des unendlich Kleinen von verschiedener Ordnung über, verweist jedoch in Betreff der Begründung seiner Ansichten auf seine im ersten Bande angeführte Brochüre.

O.

Capitel 2.

Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

E. Combescure. Sur quelques points du calcul inverse des différences. C. R. LXXIV. 454-458.

Versteht man unter der partiellen Differenz $\Delta_i f = f_i$ das Increment der Function $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ entsprechend dem constanten Increment Δx_i, so ist die Bedingung, unter der für gegebene $f_1, f_2, \dots f_n$ ein Integral f existirt, dass für jede Combination (i, j)

$$\Delta_i f_j = \Delta_j f_i$$

sei, und das vollständige Integral lautet:

$$f = \Sigma_1 f_1 + \Sigma_2 f_2^{(0)} + \Sigma_3 f_3^{(00)} + \dots \Sigma_n f_n^{(00\dots)} + \varphi,$$

wo der obere Index 0, 00, 000,... bezeichnet, dass das erste, die beiden ersten, die 3 ersten, etc. Argumente der Function ihre Anfangswerthe haben, wo ferner die Summation Σ_i stattfindet von $x_i^{(00)}$ an durch alle Vielfachen des Increments Δx_i bis x_j, und wo φ eine willkürliche, $n$fach periodische Function von n Variabeln ausdrückt für die Periodenlängen Δx_1, $\Delta x_2, \dots \Delta x_n$.

Eine zweite Bemerkung betrifft die von Laplace (Théorie analytique des probabilités p. 80) integrirte Gleichung

$$(y_{x+1,x'} - 2y_{x,x'} + y_{x-1,x'}) - (y_{x,x'+1} - 2y_{x,x'} + y_{x,x'-1}) = 0.$$

Durch die Substitution

$$\frac{x+x'}{2} = \xi, \quad \frac{x-x'}{2} = \eta$$

geht sie über in

$$\Delta_\xi \Delta_\eta y = 0,$$

woraus sich das allgemeinste Integral ergiebt:

$$y = \varphi(\xi, \eta) + \psi(\xi, \eta),$$

wo φ periodisch in Bezug auf ξ, ψ auf η ist. Laplace findet nach seiner Methode das speciellere Integral

$$y = \varphi(x+x') + \psi(x-x').$$

Die Gleichung von Poisson (J. de l'éc. pol. cah. 1)

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} + p\frac{\partial y}{\partial x} + qy_1 + my = n,$$

wo p, q, m, n Functionen von x, und $y_1 = y_{x+1}$, $y = y_x$, reducirt sich durch die Substitution

$$y = ze^{-\int q dx}$$

auf die Form

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} + p\frac{\partial y}{\partial x} + my = n,$$

doch schreibt der Verfasser dieser Vereinfachung, welche durch die ganze Rechnung hindurch Anwendung hat, nur in einzelnen Fällen Erfolg für die Lösung zu. H.

F. J. STUDNIČKA. Beiträge zum Operationscalcul. Prag. Ber. 1871. 2. Abth. 39-43.

Ist Δ^m wie üblich das Zeichen für die Differenzen m^{ter} Ordnung, a_k das k^{te} Glied einer Zahlenreihe $a_0 a_1 \dots$, so werden mit Hülfe der symbolischen Gleichungen:

$$\Delta^m a_{k+1} = \Delta^m a_k(1+\Delta); \quad \Delta^{m+1} a_k = \Delta^m a_k(a-1)$$

folgende Formeln abgeleitet:

$$1. \quad \Delta^m a_{k+n} = \Delta^m a_k(1+\Delta)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} \Delta^{m+i} a_k,$$

$$2. \quad \Delta^{m+n} a_k = \Delta^m a_k(a-1)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} \Delta^m a_{k+n-i},$$

$$3. \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} \Delta^m a_{k+i} = \Delta^m a_k \frac{(1+\Delta)^n - 1}{\Delta} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \Delta^{m+i},$$

$$4. \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} \Delta^{m+i} a_k = \Delta^m a_k \frac{(a-1)^n - 1}{a-x} = \sum_{i=1}^{i=n} A_{n-i} \Delta^m a_{k+n-i},$$

wo

$$A_{n-i} = (-1)^{i-1}\left\{\binom{n}{i-1} - 2\binom{n}{i-2} + 2^2\binom{n}{i-3} - \cdots + (-1)^{i-1}2^{i-1}\right\},$$

$$5. \quad \sum_{i=0}^{i=n} \Delta^{m+i} a_{k+i} = \sum_{i=0}^{i=n} \Delta^{m+i} a_{k+i+1} - \sum_{i=0}^{i=n} \Delta^{m-i+1} a_{k+i}.$$

Hr.

F. J. STUDNIČKA. Intorno al calcolo delle operazione. Battaglini G. X. 76-79.

Einige Formeln aus der Differenzenrechnung.

Fs.

P. GILLERT. Sur l'emploi des imaginaires dans la cherche des différentielles d'ordre quelconque.
Bull. de Belg. XXXIII. 108-113.

Der Verfasser giebt folgende zwei Beispiele:

1) Wenn

$z = x + yi$, $x = r\cos u$, $y = r\sin u$, $dx = \varrho\cos\varphi$, $dy = \varrho$ sin
so ist

$$d^n lz = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{z^n}dz^n$$

$$= \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \cdot [\cos n(\varphi - u) + i\sin n(\varphi - u)]$$

$$= d^n l\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{-1}\, d^n \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\cdot$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar die Ausdrücke für

$$d^n l\sqrt{x^2+y^2} \text{ und } d^n \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Man gelangt zu einer Entwickelung dieser Differential-A drücke in Form eines Polynoms, das nach Potenzen von dx un geordnet ist, wenn man ausgeht von

$$d^n lz = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{r^n}e^{-nui}\left(dx + dy\, e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^n.$$

2) Man setze

$a = \alpha + i\beta$, $z = x + iy$, $\alpha + x = r\cos u$, $\beta + y = r\sin u$
in der Formel

$$\frac{d^n(a+z)^m}{dz^n} = m(m-1)\cdots(m-n+1)\,(a+z)^{m-n},$$

setze dann die reellen und imaginären Theile für sich gleich gelangt man zu bemerkenswerthen Formeln, namentlich für gende Fälle:

1) $\alpha = \beta = 0$, $x = 1$,

2) $\alpha = \beta = 1$, $y = -x$, $m = n$.

3) $m = 2n$, $\alpha = \beta = 1$, $y = -x$.

Man kann das zweite Glied der allgemeinen Formel e falls nach Potenzen von dx und dy ordnen.

Mn. (Wn.)

E. Hess. Zur Theorie der Vertauschung der unabhängigen Variabeln. Schlömilch Z. XVII. 1-12.

Zur Lösung des Problems, aus gegebenen Functionen

$$y = \varphi(x) \text{ und } F(y) = F(\varphi x) = f(x)$$

die n^{te} Ableitung $F^n(x)$ durch die Derivirten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ auszudrücken, benutzt man bekanntlich das System linearer Gleichungen

$$1) \begin{cases} f_1 = X_{1,1}\, F_1, \quad f_2 = X_{2,1}\, F_1 + X_{2,2}\, F_2, \cdots \\ f_n = X_{n,1}\, F_1 + X_{n,2}\, F_2 + X_{n,3}\, F_3 + \cdots + X_{n,n-1}\, F_{n-1} + X_{n,n}\, F_n, \end{cases}$$

wo

$$f_i = \frac{\partial^i f(x)}{\partial x^i}, \quad F_k = \frac{\partial^k F(y)}{\partial y^k},$$

und wenn die Derivirten von $\varphi(x)$ analog mit φ_r bezeichnet werden,

$$X_{s,t} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot t} \sum_{i=1}^{s=t+1} \binom{s}{i_1}\binom{s-i_1}{i_2}\cdots\binom{s-i_1-i_2-\cdots-i_{t-2}}{i_{t-1}} \varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\cdots\varphi_{i_t}.$$

Man vergleiche die Arbeiten von Koppe, U. Meyer und Schlömilch (Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis). Herr Hess stellt nun aus dem System 1) F_n in Form einer Determinante dar und verwandelt, mit Hülfe einer für die $X_{s,t}$ gewonnenen Recursionsformel, die Elemente dieser Determinante so, dass in jeder Colonne aufeinanderfolgend nur die in bestimmte Zahlencoefficienten multiplicirten Derivirten φ_1, $\varphi_2, \cdots$ übrig bleiben, und so schliesslich eine äusserst einfach aus den Elementen φ_n und f_n gebildete Determinante resultirt. Zum Schlusse wird diese Lösung angewendet auf die Darstellung der Facultätencoefficienten positiver Exponenten durch Determinanten, und auf die Darstellung der Coefficienten der Bürmann'schen und Lagrange'schen Reihe. M.

R. Lipschitz. Entwickelung eines Zusammenhanges zwischen den quadratischen Formen von n Differentialen und den Abel'schen Transcendenten. Borchardt J. LXXIV. 160-171.

Siehe Abschn. VII. Cap. 2.

W. Denzler. Ueber die Zerlegung echt gebrochener Functionen in Partialbrüche. Wolf Z. VII. 282-293.

O.

B. Williamson. Conditions for a maximum or a minimum in a function of any number of variables. Quart. J. XII. 48-51.

Cly.

C. J. M. Wehlén. Om functioners af en obervende variabel maxima och minima. Stockholm.

Elementare Untersuchung. Bg.

A. Rutgers. Dissertatie over differentialen van gebroken orde en haar gebruik by de afleiding van bepaalde integralen.

A. Rutgers. Sur les différentielles à indices quelconques. Arch. Neerl. VII. 27-37.

Von diesen beiden Arbeiten war nur die zweite, die ein Auszug der ersten ist, dem Referenten zugänglich. Der Verfasser giebt darin verschiedene Anwendungen der folgenden von Liouville aufgestellten Formeln:

$$\int_0^\infty f(x+y)\, y^{p-1}\, dy = (-1)^p\, \Gamma(p)\, D_x^{-p} f(x)\, dx^{-p},$$

$$D_x^p \int_0^\infty e^{-xy}\, dy = \int_0^\infty D_x^p e^{-xy} dy;\quad D^p(x^{-m}) = (-1)^p \frac{\Gamma(m+p)}{\Gamma(m)} x^{-(m+p)}.$$

Darin ist p eine beliebige positive Zahl. Hieraus findet der Verfasser verschiedene bemerkenswerthe bestimmte Integrale, indem er

$$y = x\,\frac{t^r - z^r}{z^r - s^r}$$

setzt, und successive als Grenzen nimmt

$$0 \text{ und } s,\ 0 \text{ und } 1,\ -1 \text{ und } +1.$$

Sodann wird die Formel bewiesen

$$D^{-s} y\, dx^{-s} = D^{-(s+a)}\, D^a y\, ds^{-(s+a)},$$

und auch von dieser werden Anwendungen auf bestimmte Integrale gemacht. Mn. (Wn.)

J. W. L. Glaisher. Solution of question 3520. Educ. Times XVI. 93.

Beweis, dass

$$\left(\frac{d}{dq}\right)^{2i}\cdot e^{\frac{q^2}{p^2}} = p\left(-\frac{2d}{pdp}\right)^i \frac{e^{\frac{q^2}{p^2}}}{p}.$$

Hi.

J. J. Walker. Solution of question 3542 (by A. Hanlon). Educ. Times XVII. 29-30.

Die Normale zu finden, welche den kleinsten Bogen von einem Kegelschnitt abschneidet. Hi.

J. J. Walker, A. G. Carr and Laverty. Solution of question 3564 (by Cayley). Educ. Times XVII. 72-73.

Den kleinsten Kreis zu bestimmen, der drei gegebene Punkte einschliesst. Hi.

Capitel 3.

Integralrechnung.

Ch. Hermite. Sur l'intégration des fonctions rationnelles. Nouv. Ann. (2) XI. 145-149.

Ch. Hermite. Sur l'intégration des fractions rationnelles. Ann. de l'Éc. Norm. (2) I. 215-218.

Von dem Integrale einer rationalen gebrochenen Function $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ kann man den algebraischen Theil erhalten, ohne die Gleichung $F(x) = 0$ in ihre Wurzeln aufzulösen.

Man bringe $F(x)$ auf die Form:

$$F(x) = A^{\alpha+1}.B^{\beta+1}\dots L^{\lambda+1},$$

so dass die Gleichung $A\cdot B\dots L = 0$ nur einfache Wurzeln hat,

so wird

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{P}{A^{\alpha+1}} + \frac{Q}{B^{\beta+1}} + \cdots + \frac{S}{L^{\lambda+1}},$$

wo $P, Q, \cdots S$ ganze Functionen sind. Genügen nun die Polynome G und H der Gleichung

$$AG - A'H = s\left(A' = \frac{\partial A}{\partial x}\right),$$

so werden zwei Reihen von Polynomen:

$$\nu_0\ \nu_1 \ldots \nu_{\alpha-1},\ P_1\ P_2 \ldots P_\alpha$$

durch die recurrenten Gleichungen

$$\begin{aligned}(\alpha - i)\,\nu_i &= HP_i - AQ_i \\ P_{i+1} &= GP_i - A'Q_i - \nu'_i\end{aligned} \qquad i = 0, 1, 2 \ldots \alpha - 1$$

bestimmt, worin die Polynome $Q_0, Q_1, Q_2 \cdots$ ganz willkürlich sind.

Damit folgt durch Elimination von G und H

$$P_i - AP_{i+1} = A\nu_i' - (\alpha - i)A'\nu_i = A^{\alpha-i+1}\left(\frac{\nu_i}{A^{\alpha-i}}\right)',$$

$$\frac{P_i}{A^{\alpha-i+1}} = \frac{P_{i+1}}{A^{\alpha-i}} + \left(\frac{\nu_i}{A^{\alpha-i}}\right)'$$

und durch Summirung von $i = 0$ bis $i = \alpha - 1$:

$$\frac{P}{A^{\alpha+1}} = \frac{P_\alpha}{A} + \left(\frac{\nu}{A^\alpha}\right),$$

wo

$$\nu = \nu_0 + A\nu_1 + A^2\nu_2 + \cdots + A^{\alpha-1}\nu_{\alpha-1}$$

ist, so dass $\frac{\nu}{A^\alpha}$ der algebraische Theil des Integrals

$$\int \frac{P}{A^{\alpha-1}}\,dx$$

ist.

Bei der Berechnung des Integrals

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\alpha+1}}$$

nach der beschriebenen Methode werden die willkürlichen Q sämmtlich gleich Null gesetzt. Hr.

G. Zolotareff. Sur la méthode d'intégration de M. Tchébychef. Clebsch Ann. V. 560-581.

Tchébychef hat im Bull. de l'Académie de St. Pétersbourg

. 1860 (siehe auch Liouville J. 1864 p. 225) eine Integrations-
ethode für das Differential

$$\frac{(x+A)\,dx)}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}$$

ne Beweis veröffentlicht, nach der man für den Fall, dass das
tegral sich für einen gewissen Werth von A in endlicher Form
rstellen lässt, den geschlossenen Ausdruck des Integrals finden,
andern Falle die Unmöglichkeit eines solchen Ausdruckes für
den Werth von A erkennen kann. $\alpha\beta\gamma\delta$ bedeuten rationale
ahlen. Das vorgeschriebene Verfahren bestand in Folgendem:

1) Reduction des Differentials auf die Form

$$\frac{(z+B)\,dz}{\sqrt{z^4+lz^3+mz^2+nz}}.$$

2) Prüfung, ob der Radikand zerlegbar ist in (z^2+pz)
$z^2+rz+s)$, so dass $s\,(p^2-pr+s)$ gleich einer Quadratzahl ist,
nd wenigstens eine der Ungleichheiten stattfindet:

$$pr-2s>0,\ 4s-r^2>0.$$

3) Wenn dies der Fall und p nicht $=r$, dann weitere Re-
luction des Differentials durch die Substitution

$$\frac{(p-r^2)\,(z^2+pz)}{(r-p)z+s}=z,$$

nd Wiederholung dieses Verfahrens, falls die Bedingungen in
) erfüllt bleiben, bis $p_i=r_i$. In diesem Falle gelangt man un-
ittelbar für einen gewissen Werth von A zum gesuchten end-
hen Ausdruck in logarithmischer Form.

4) Im entgegengesetzten Falle gelangt man zu einem Diffe-
ntialausdruck, in welchem die Bedingungen 2) nicht mehr
mmtlich erfüllt sind; man geht alsdann von dem Differential

$$\frac{(z+B)\,dz}{\sqrt{z^4+lz^3+mz^2+nz}}$$

$$\frac{(z_1+B')\,dz}{\sqrt{z_1^4+l_1z_1^3+m_1z_1^2+n_1z_1}}$$

er, wo $l_1\ m_1\ n_1$ aus $l\ m\ n$ nach bestimmten Formeln berech-
t werden, und durch successive Anwendung derselben Formeln
einem Differential derselben Form mit den Zahlen $l_\mu\ m_\mu\ n_\mu$,

bis man entweder für diese Zahlen zu Brüchen gelangt oder bis zum Eintritt der Gleichheiten $l_{\mu+\nu} = l_\mu$, $m_{\mu+\nu} = m_\mu$, $n_{\mu+\nu} = n_\mu$. Der erste Fall bietet das Criterium für die Unmöglichkeit eines endlichen Ausdruckes für irgend einen Werth von A, im 2ten Falle wird der gesuchte Ausdruck angegeben. Die Anzahl der aufeinander folgenden Systeme $l\ m\ n$ überschreitet nicht die Anzahl der ganzen Lösungen gewisser Gleichungen, von der Herr Tchébychef beweist, dass sie begrenzt ist. Herr Zolotareff liefert nun für die Methode des Herrn Tchébychef einen ausführlichen Beweis, dessen Hauptmomente hier nur angedeutet werden können. Zunächst wird die Jacobi'sche Gleichung (Werke Bd. III.)

$$0 = (ax^2 + 2bx + c)z^2 + 2(a'x^2 + 2b'x + c')z + (a''x^2 + 2b''x + c'')$$

dazu benutzt, um durch passende Bestimmung der Coefficienten sowohl die vorgeschriebene Reduction in 1) als die in 4) auszuführen, und somit zu den von Herrn Tchébychef angegebenen Recursionsformeln für die Systeme $l\ m\ n$ zu gelangen. Alsdann wird nachgewiesen, dass das Stattfinden der Bedingungen in 2) mit dem Grade λ der Function P in der Gleichung

$$\int \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{R(z)}} = \log\,[P + Q\sqrt{R(z)}] + \text{const.}$$

zusammenhängt, wo P und Q der Gleichung $P^2 - Q^2 R(z) = \epsilon$ genügen, und P so gewählt ist, dass es den kleinst möglichen Grad hat. λ ist nur dann grade, wenn die Bedingungen in 2) erfüllt sind, und die in 3) vorgeschriebenen Substitutionen bewirken, wofern nicht im Verlauf $p_i = r_i$ wird, dass das Integral auf ein anderes reducirt wird, welches sich durch $\log\,[P' + Q'\sqrt{(Rz)}]$ ausdrückt, wo der Grad von P' ungrade ist. Endlich wird der Beweis für die Periodicität der Systeme $l_\mu\ m_\mu\ n_\mu$, sowie dafür, dass $l_\mu m_\mu n_\mu$ ganz sind, wenn $l_0\, m_0\, n_0$ ganz sind, im Falle, dass der endliche Ausdruck für das Integral existirt, mit Hülfe der Relationen geführt, welche zwischen den Grössen $\partial_{\mu+1}\ \partial'_{\mu+1}\ \partial''_{\mu+1}$ und $\partial_\mu\, \partial'_\mu\, \partial''_\mu$ bestehen, wo $\partial_\mu\ \partial'_\mu\ \partial''_\mu$ die Wurzeln der Gleichung: $z_\mu^3 + l_\mu z_\mu^2 + m_\mu z_\mu + n_\mu = 0$ bedeuten, indem die Verhältnisse derselben in elliptischen Functionen ausgedrückt werden, deren Modul von μ unabhängig, und deren Argument $2^\mu a$ ist. Hr.

Ch. Hermite. Sur l'intégration des fonctions circulaires. Proc. of L. M. S. IV, 164-175.

Bezieht sich auf die Form

$$\int f(\cos x,\ \sin x)\, dx,$$

wo f eine rationale Function bezeichnet.

Cly. (O.)

G. Minchin. Elementary demonstration of a fundamental theorem. Quart. J. XII. 172-175.

Der Satz betrifft die Transformation eines Products von Differentialen $dx_1\ dx_2 \dots dx_n$ in einem vielfachen Integral.

Cly. (O.)

M. Solin. Ueber graphische Integration. Prag. Abh. (6) V.

Es ist eine Curve gegeben, deren auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene Gleichung $y' = f'(x)$ sei. Es soll die Curve gezeichnet werden, der die Integralgleichung $y = f(x)$ entspricht. Man theile die Curve in eine Anzahl so kleiner Bogen, dass man dieselben mit genügender Annäherung als Gerade betrachten kann. Die Abscissen der Endpunkte dieser Bogen seien om, $om_1, \dots$, die der zugehörigen Ordinaten on', $on'_1 \dots$ Ist ferner o' ein Punkt auf der xAxe mit der Abscisse -1, dann bestimmen die Strahlen $o'n'$, $o'n'_1 \dots$ die Tangentenrichtungen in denjenigen Punkten der Integralcurve, deren Abscissen bezüglich om, $om_1 \dots$ sind. Da nun die innerhalb je zweier aufeinanderfolgender Ordinaten enthaltenen Bogen der Integralcurve in Folge obiger Voraussetzung als Parabelstücke betrachtet werden können, deren Axe die Richtung der Ordinaten hat, so wird die Projection des Durchschnittspunkts zweier aufeinanderfolgender Tangenten auf der xAxe in der Mitte zwischen den Projectionen der Berührungspunkte liegen. Auf diesem Wege erhält man, nachdem noch der Wahl der Constante entsprechend zur Abscisse om die zugehörige Ordinate on angenommen ist, als approximative Darstellung der Integralcurve ein derselben um-

schriebenes Polygon, auf dessen Seiten die Berührungspunkte verzeichnet sind. Die Punkte der Curve, für welche $f'(x)$ unendlich wird, lassen sich hierbei nicht erreichen. Der Verfasser giebt hiernach die graphische Darstellung von $\int \frac{\cos x}{x} dx$. Ist $y' = \varphi(x,y)$ gegeben, so wird eine Reihe benachbarter Werthe $y' = h$, $y' = h_1 \cdots$ angenommen, wodurch die Curvenschaar $\varphi(x,y) = h$, $\varphi(x,y) = h_1 \cdots$ erhalten wird, in deren Schnittpunkten mit der Integralcurve die Tangenten der letzteren mit den Strahlen $o'n'$, $o'n'_1 \cdots$ gleiche Richtung haben, wenn $n', n'_1 \cdots$ die Endpunkte der auf der Ordinatenaxe vom Anfangspunkte abgetragenen Strecken $h, h_1 \cdots$ bedeuten, und o' der oben bezeichnete Punkt ist. Betreffs der Lage des Durchschnittspunktes der aufeinanderfolgenden Tangenten wird, mehr nach Analogie mit dem vorhergehenden Fall als auf Grund analytischer Betrachtungen, angenommen, dass er in der Mitte der Strecke sich befinde, welche auf der einen Tangente von zwei benachbarten Curven φ abgeschnitten wird. Ist ein Punkt der Integralcurve gegeben, so hat man durch ihn eine Curve φ zu ziehen und von ihm als Berührungspunkt ausgehend, die Lage der einen Tangente zu verzeichnen, wodurch dann die der übrigen mit bestimmt ist, und man erhält so ein Polygon als approximative Darstellung eines particulären Integrals. Die Gesammtheit der Polygone, die man erhält, wenn man von allen Punkten einer Curve φ ausgeht, stellt approximativ das allgemeine Integral dar.

Es folgt dann die graphische Integration von

$$dz = M dx + N dy$$

für den Fall der Integrabilität; sie wird unmittelbar auf die vorhergehende Lösung zurückgeführt. Hr.

Duprez. L'intégrateur. Mondes (2) XXVII. 10-12.

Siehe F. d. M. III. 123. O.

J. W. L. Glaisher and J. J. Walker. Solution of question 3600 (by W. Roberts). Educ. Times XVII. 42.

Wenn

$$u = \int_0^1 \frac{e^{ax^2} dx}{1+x^2},$$

so ist

$$4a\left(\frac{du}{da} + u\right)^2 = 4e^a u - \pi.$$

Hi.

Capitel 4.

Bestimmte Integrale.

0. SCHLÖMILCH. Ueber einige Integrationen längs geschlossener Wege. Schlömilch Z. XVII. 347-350.

Das Integral $\int \frac{F(z) \cdot dz}{e^z - e^{-z}}$ wird längs des Umfanges eines der beiden Rechtecke mit den Eckpunkten o, a, $a \pm bi$, $\pm bi$, genommen, der Punkt o jedoch durch einen um ihn mit dem Radius r beschriebenen Quadranten ausgeschlossen. Unter der Voraussetzung, dass $F(z)$ innerhalb und auf dem Umfang beider durch die positive x-Axe getrennten Rechtecke synektisch bleibt, und $b^2 < \pi^2$ ist, wird der Werth obigen Integrals gleich Null. Die Ausführung der Integration ergiebt für ein verschwindendes r eine von r unabhängige Gleichung, welche dahin specialisirt wird, dass

$$b = \frac{\pi}{2}, \quad a = \infty$$

gesetzt, und F der Bedingung unterworfen wird, dass

$$\lim \{e^{-(a+iy)} F(a+iy)\} = 0, \text{ für } a = \infty.$$

Die Substitutionen $F(z) = e^{-hz}$ und $F(z) = e^{-kz^2}$ führen zu folgenden Formeln:

$$\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin ky}{\sin y} dy = 2 \cos \frac{k\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-kx} \cdot dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$= 2 \cos \frac{k\pi}{2} \int_0^1 \frac{t^k}{1+t^2} \cdot dt, \; k > -1,$$

und

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx^2}\cos\pi kx}{e^x+e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{4}e^{-\frac{1}{4}\pi^2 k},\ k>0.$$

Aus der ersten wird noch unmittelbar die Formel

$$\int_0^1 \frac{t^\lambda+t^{-\lambda}}{1+t^2}\cdot dt = \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}\lambda\pi},\ -1<\lambda<1$$

abgeleitet und daran ein neuer Beweis für die Formel

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin\mu\pi}$$

geknüpft. Hr.

D. Bierens de Haan. Over eenige nieuwe herleidingsformulen bij de theorie van bepaalde integralen. Verh. v. Amst. 1871. 4-64.

Die Arbeit enthält zahlreiche Resultate hinsichtlich der Theorie der bestimmten Integrale. Dieselben werden abgeleitet durch die Reihenentwickelung eines unter dem Integrationszeichen stehenden Factors. Es sei

$$f_1(x) = \sum_1^a A_n \sin nsx,\ f_2(x) = B_0 + \sum_1^a B_n \cos nsx,$$

$$f_3(x) = \sum_1^c C_m \sin mtx,\ f_4(x) = D_0 + \sum_1^c D_m \cos mtx,$$

so kann man

$$\int_p^q \varphi(x)\,f_1(x)\,f_3(x)\,dx,\ \int_p^q \varphi(x)\,f_1(x)\,f_4(x)\,dx,$$

$$\int_p^q \varphi(x)\,f_2(x)\,f_3(x)\,dx,\ \int_p^q \varphi(x)\,f_2(x)\,f_4(x)\,dx$$

durch ziemlich einfache Integrale ausdrücken, die unter dem Integrationszeichen nur $\varphi(x)\,dx$ multiplicirt mit einem Sinus oder Cosinus enthalten. Die Formeln enthalten nur einfache Reihen, wenn

$$f_3(x) = \sin(ux),\ f_4(x) = \cos(ux)$$

ist. Der zweite Paragraph enthält zunächst die speciellen Formeln, die man erhält für

$$p = 0,\ q = \infty,\ \varphi(x) = \frac{q}{q^2-x^2} \text{ oder } \frac{x}{q^2-x^2}.$$

Die „Nouvelles Tables d'Intégrales définies“ des Verfassers geben in diesem Falle die Hülfsformeln über bestimmte Integrale, die man anzuwenden hat, und man gelangt so zu einer grossen Zahl sehr allgemeiner Resultate, wenn man nur vorsichtig verfährt, und gewisse Ausdrücke, die unbestimmt werden, vermeidet. Es wird speciell gesetzt

$$f_1(x) = \frac{r \sin sx}{1-2r\cos sx+r^2}, \quad f_2(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos sx+r^2}$$

$$f_2(x) = \frac{(1-r^2)\, r\cos 3x}{1-2r\cos sx+r^2}.$$

In diesem Falle sind die Reihen unendlich. Die so gefundenen Integrale können dann noch viel allgemeinere ergeben, wenn man einen sinus eines Vielfachen von x durch $f_3(x)$, einen cosinus durch $f_4(x)$ ersetzt, was auf eine Summation der Terme hinausläuft, die in endlicher oder unendlicher Zahl vorhanden sind. Der dritte Paragraph enthält Anwendungen auf folgende Fälle:

$$f_3(x) = \left(2\cos\frac{tx}{2}\right)^a \sin\frac{atx}{2}, \quad f_4(x) = \left(2\cos\frac{tx}{2}\right)^a \cos\frac{atx}{2},$$

$$f_3(x) = \frac{u\sin tx - u^{c+1}\sin(c+1)tx + u^{c+2}\sin ctx}{1-2u\cos tx+u^2},$$

$$f_4(x) = \frac{1-u\cos tx - u^{c+1}\cos(c+1)tx + u^{c+2}\cos ctx}{1-2u\cos tx+u^2}.$$

Um hier nur eine Idee von den Resultaten des Verfassers zu geben, erwähnen wir folgende Formel:

$$\int_0^\infty \cos^a x \frac{\sin ax \sin sx}{1-2r\cos sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{r-\cos qs}{1-2r\cos qs+r^2}\cos^a q \sin aq;$$

hier darf man $2a$ höchstens gleich s nehmen. Mn. (Wn.)

J. W. L. Glaisher. On the reduction of functional transcendents. Messenger (2) I. 153-163.

Fortsetzung von des Verfassers Arbeit: „On a theorem in definite integration (Quart. J. X. 347 356., F. d. M. II. 151).

Sie bezieht sich hauptsächlich auf Boole's Satz in den „Phil. Trans.“ für 1857. Der Zweck der Arbeit wird am Besten aus einigen speciellen Resultaten ersehen. Bezeichnet man mit f ein allgemeines Functionssymbol und mit coth die hyperbolische Cotangente, so ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\cot x)}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\coth a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)\,du}{u^{2t}\coth^2 u}.$$

Giebt man dem f specielle Formen, so hat man

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(c\cot x)}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-c\coth a},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-c^2\cot^2 x}}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{c^2\coth^2 a}\,Erf(\coth a),$$

wo

$$Erf\,a = \int_a^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \text{ etc.}$$

Eine Eigenthümlichkeit einiger der erhaltenen Integrale ist es, dass die Function unter dem Functionszeichen ihre Form mit den Grenzen verändert, über die sich die Integration erstreckt: daher ist das Resultat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\cot\sqrt{x}\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,dv$$

ein Satz für die Vergleichung der Transcendenten:

$$\int_0^{\infty} f\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\cot\sqrt{x}\right)dx + \int_0^{\infty} f\left(-x + \frac{1}{\sqrt{x}}\coth\sqrt{x}\right)dx$$
$$= \int_0^{\infty} f(v)\,dv + \int_0^{\infty} f(-v)\,dv.$$

Glr. (O.)

R. Pendlebury. On the squares of transcendents. Messenger (2) I. 131-135.

Das Product zweier bestimmter Integrale wird in einzelnen Fällen als ein einfaches bestimmtes Integral in folgender Weise ausgedrückt. Das Product der Integrale wird als Doppelintegral ausgedrückt und dann dies Doppelintegral transformirt, indem

man $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ setzt und eine der Integrationen ausführt, womit es dann also auf ein einfaches Integral reducirt ist: z. B.

$$(Erfa)^2 = e^{-a^2} \int_1^\infty \frac{e^{-a^2x^2}}{1+x^2}\, dx,$$

wo

$$Erfa = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. On Fourier's (double integral) theorem. Messenger (2) II. 20-25.

Fourier's Satz, dass

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty da\, du\, \cos u\,(a-x)\; v\varphi(a),$$

wird in einer Art bewiesen, analog derjenigen, die Boole im 21. Bande der „Irish Transactions" benutzt hat. Nur geht der Verfasser von der discontinuirlichen Function

$$\int_0^\infty \frac{\sin a\varphi}{v}\, dv$$

aus, statt von

$$\operatorname{tg}^{-1} \frac{a-x}{k}.$$

Dies vereinfacht die Ableitung. Der Verfasser schliesst mit Bemerkungen über andere Beweise desselben Satzes.

Glr. (O.)

H. Frombeck. Ueber Fourier'sche Integrale und Analogien derselben. Wien. Ber. LXV. 133-189.

Der Verfasser beschäftigt sich lediglich mit bestimmten Integralen, welche wegen Discontinuität des Differentialfactors sinnlos werden, deren Werth demungeachtet nach einem angeblichen Princip der „Aequivalenz des Unendlichkleinen" (sowie des Unendlichgrossen) ermittelt wird, wobei denn die antiquirte Definition des Hauptwerthes eines discontinuirlichen Integrals

„die einzig annehmbare und richtige Definition des letzteren selbst" sein soll. Also

$$\int_{-b}^{+b} \frac{dx}{x} = 0,$$

und zwar so bewiesen:

$$\int_{-b}^{b} \frac{dx}{x} = \int_{0}^{b} \frac{dx}{x} - \int_{0}^{b} \frac{dx}{x},$$

aber

$$\infty - \infty = 0,$$

diese Aequivalenz ein „nothwendiges Princip der Integralrechnung." Indem wir auf ein weiteres Eingehen verzichten, bemerken wir noch, dass die meisten Formeln der sehr formelreichen Abhandlung aus der offenbar falschen Gleichung:

$$\lim \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos \mu\vartheta}{\vartheta} F(\vartheta)\, d\vartheta = 0,\ \mu = \infty$$

abgeleitet werden, welche für alle reellen α und β sowohl, wie für irgend welche beliebige Functionen $F(\vartheta)$ gelten soll.

Hr.

W. Walton. On the evaluation of the definite integral $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}$, where $a < 1$. Quart J. XII. 39-40.

Die Untersuchung geschieht unabhängig von anderen Resultaten über bestimmte Integrale und enthält sich des Gebrauchs imaginärer Grössen.

Cly. (O.)

J. W. L. Glaisher. Note on certain definite integrals. Quart J. XII. 165-167.

Bezieht sich auf das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{1+x}$$

und andere Formeln in der obigen Arbeit von Walton. (Quart. J. XII. 39.)

Cly. (O.)

W. Walton. On the evaluation of a pair of definite integrals. Quart. J. XII. 181-184.

Diese sind

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)} \frac{\cos}{\sin} \left\{\left(x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)\sin\alpha\right\} dx.$$

Cly. (O.)

W. Walton. On the evaluation of the integral $\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{-m}}{(1+x)\log x} dx$, where m is >0 and <1.
Quart. J. XII. 184-185.

Cly.

J. W. L. Glaisher. Notes on definite integrals.
Messenger (2) II. 71-79.

Die Noten beziehen sich hauptsächlich auf die drei Integrale:

$$\text{(I.)} \quad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} e^{-\sqrt{(a^2b^2)}}$$

$$\text{(II.)} \quad \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a^2}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\text{(III.)} \quad \int_0^\infty e^{-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a^2}} e^{-2\sqrt{a^2b^2}},$$

auf die Art ihrer Auswerthung und ihre Discontinuitäten. Das Integral II. wird aus I. durch Differentiation nach a^2 abgeleitet, indem

$$(a^2+x^2)^{-n} = e^{-\frac{nx^2}{a^2}} a^{-2n},$$

wenn n unendlich ist. Zum Schluss wird ein elementarer Beweis des Boole-Cauchy'schen Satzes gegeben, dass nämlich

$$\int_0^\infty x^{2i} \varphi\left(x-\frac{a}{x}\right) dx$$

$$= \sum_{m=0}^{m=i} a^{i-m} \frac{(2m+1)(2m+2)\cdots(i+m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdot(i-m)} \int_0^\infty \varphi(v)\, dv.$$

Glr. (O.)

E. Catalan. Nóte sur une formule de Mr. Botesu de Jassy (Roumanie). Bull. de Belg. XXXIV. 424-428.

1. Die kleine Arbeit enthält verschiedene bemerkenswerthe Resultate über bestimmte Integrale. Man erhält dieselben, indem man von folgender Formel des Herrn Botesu ausgeht:

$$\Sigma \frac{1}{n+k} = l2 - \sum_{0}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}{2^{p+1}(2n+1)\cdots(2n+p-1)}.$$

Benutzt werden ferner folgende bekannte Formeln, worin C die Euler'sche Constante bezeichnet und $\varphi(\infty) = 0$ ist.

$$1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = ln + \varphi(n) + C.$$

$$(1.)\qquad \varphi(n) = -\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} + \frac{1}{lx}\right) x^{n-1}\, dx.$$

2. Man findet leicht, wenn $F(q) = q + q^2 + q^4 + q^8 + \cdots$

$$\varphi(n) - \varphi(2n) = \int_0^1 \frac{x^{2n}\, dx}{1+x},\quad \varphi_n = \int_0^1 \frac{dq}{1+q}[F(q^n) - q^n]$$

$$(2.)\qquad E_1\varphi_1 + E_5\varphi_5 + E_9\varphi_9 + \cdots = \int_0^1 \frac{dq}{1+q}[f(q) - \psi(q)],$$

wo

$$f(q) = E_1 F(q) + E_5 F(q^5) + E_9 F(q^9) + \cdots$$
$$\psi(q) = E_1 q + E_5 q^5 + E_9 q^9 + \cdots$$

Hier ist E_n der Ueberschuss der Zahl der Theiler von n von der Form $4m+1$ über die Zahl der Theiler von der Form $4m-1$. In der Theorie der elliptischen Functionen wird bewiesen, dass

$$\psi(q) = f(q) - f(q^2) = \frac{(1-k')K}{4\pi},\quad f(q) = \frac{K}{2\pi} - \tfrac{1}{4}.$$

Die Formel (1) giebt eine andere Formel für $E_1\varphi_1 + E_5\varphi_5 + \cdots$, die, mit der vorhergehenden combinirt, auf die merkwürdige Relation führt:

$$\int_0^1 \left[2\frac{1-qk'}{1-q^2} + \frac{1-k'}{qlq}\right] K dq = \pi l2.$$

3. Aus der Relation (1) und der bekannten Entwickelung von $\alpha^{-1} - (e^{\alpha}-1)^{-1}$ leitet man, wenn man $x = e^{-\alpha}$ setzt, ab:

$$\varphi_n = \frac{1}{2n} - 2\int_0^{\infty} \frac{tdt}{1+t^2}\,\frac{1}{e^{2\pi n t}-1} = \int_0^1 \frac{dq}{1+q}(q^{2n} + q^{4n} + q^{8n} + \cdots).$$

Der erste dieser Werthe, dem ursprünglichen Ausdruck für $\varphi(n)$ gleichgesetzt, führt auf folgendes bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{1+t^2}\left[\frac{1}{e^{2\pi nt}-e^{-2\pi nt}}-\frac{1}{e^{2\pi(n+1)t}-e^{-2\pi(n+1)t}}\right]$$

$$=\frac{1}{8n(n+1)(2n+1)}.$$

Diese Note von Catalan bezieht sich auf seine Untersuchungen über θ-Functionen: „Recherches sur quelques produits indéfinis" in den Memoiren der Brüsseler Academie. Mn. (Wn.)

G. F. W. Baehr. Sur les racines des équations $\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\,d\omega = 0$, $\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\sin^2\omega\,d\omega = 0$.

Arch. Néerl. VII. 351-358, Versl. en Mededeel. (2) 1872. 325-333.

Setzt man $x\cos\omega = z$ und zerlegt das Integral in mehrere andere, bei denen das Intervall der Grenzen $\frac{\pi}{2}$ ist, so findet man, dass die Wurzeln der ersten Gleichung die Form haben $n\pi+\theta\cdot\frac{\pi}{2}$, die der zweiten die Form $n\pi+(1+\theta)\frac{\pi}{2}$. Darin bezeichnet n eine ganze Zahl, θ eine Zahl zwischen 0 und 1. Das erste Glied y der ersten Gleichung genügt der Differentialgleichung $y''+y'\cdot x^{-1}+y=0$. Für $x=\infty$ ist $y=\cos\infty$. Daraus folgt, dass θ mit $\frac{1}{n}$ unbegrenzt abnimmt. Mn. (Wn.)

A. Cayley. Note on the integrals $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$ and $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$.

Quart J. XII. 118-126.

Walton hat diese Integrale nach einer Methode untersucht, die der von Laplace für das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

(abhängig von der Gleichheit

$$\iint e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\iint re^{-r^2}\,dr\,d\theta)$$

analog ist, und ist dabei zu dem Schluss gekommen, dass die Integrale entweder ihre berechneten Werthe $\left(\text{jedes}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\right)$ haben, woraus dann $\sin\infty = 0$, $\cos\infty = 0$ folgt, oder statt dessen unbestimmt sind.

Der Verfasser beweist, dass hier in der Untersuchung ein Fehler vorliegt. In dem Analogon zu der Gleichheit von Laplace, nämlich

$$\iint \frac{\cos}{\sin}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint r\,\frac{\cos}{\sin}\,r^2 dr dt,$$

wo auf der linken Seite $-\infty$, $+\infty$ die Grenzen für die Variabeln sind, ist es auf der rechten Seite nicht zulässig, die Grenzen $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ und $r = 0$, $r = \infty$ zu nehmen. Die rechte Seite ist allerdings ein Integral, über die Fläche einer geschlossenen Curve ausgedehnt, welche zuletzt unendlich wird, aber der Werth des Integrals hängt von der Form dieser Fläche ab, so dass, wenn man z. B. zuerst ein Quadrat, dann einen Kreis voraussetzt, und die Seite des Quadrates wie den Radius des Kreises unendlich werden lässt, sich der Werth in beiden Fällen bestimmten Grenzen nähert, die jedoch untereinander verschieden sind. Cly. (O.)

D. Besso. Sopra alcuni integrali doppy. Battaglini G. X 79-93.

Die Arbeit enthält einige Transformationen doppelter Integrale in einfache, welche zur Ermittelung mehrerer bestimmter Integrale benutzt werden. Fs.

D. Besso. Sopra alcuni integrali definiti. Battaglini G. X. 119-128.

Der Integrallogarithmus, der Integralsinus und der Integralcosinus werden benutzt, um einige bestimmte Integrale in endlicher Form zu erhalten. Fs.

G. Torelli. Sopra alcuni serie. Battaglini G. X. 129-132.

Für das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega\, d\omega}{\sin\omega} = \int_0^1 dk \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}}$$

entwickelt der Verfasser mehrere Zahlenausdrücke in Form unendlicher Reihen. Fs.

D. Besso. Sulla serie

$$\sum_n{}_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^\mu}.$$

Battaglini G. X. 160-165.

Der Verfasser summirt die Reihen

$$\sum_n{}_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^\mu}, \quad \sum_n{}_0^\infty \frac{(-1)^{n-1}\sin(nx)}{n^\mu}, \quad \sum_n{}_0^\infty \frac{(-)^{n-1}\cos(nx)}{n^\mu}$$

und entwickelt einige Beziehungen zwischen Reihen von einer dieser Formen, die sich nur durch verschiedene Werthe der Zahl μ unterscheiden. Fs.

L. Gegenbauer. Auswerthung bestimmter Integrale. Wien. Ber. LXIII. II. Abth. Nov. 1871.

Unter der Voraussetzung, dass die Reihen

$$\varphi(\varrho) = a_0 + a_1\varrho + a_2\varrho^2 + a_3\varrho^3 + \cdots$$
$$\psi(\varrho) = b_0 + b_1\varrho + b_2\varrho^2 + b_3\varrho^3 + \cdots$$

noch gültig sind für $\varrho = e^{axi}$ und e^{-axi}, bildet der Verfasser die nach cos und sin der Vielfachen, von ax fortschreitenden Reihen $\varphi(e^{axi})$ und $\varphi(e^{axi})\cdot\psi(e^{-axi})$. Diese beiden Gleichungen werden nun nach einander mit den Ausdrücken

$$e^{-q^2x^2}dx, \; \frac{\sin rx}{q^2+x^2}dx, \; \frac{\cos rx}{q^2+x^2}dx, \; \sin rx\frac{xdx}{q^2+x^2}, \; \cos rx\frac{xdx}{q^2+x^2},$$
$$e^{-\frac{x}{\omega}}x^{p-1}dx \text{ (für } \lim\omega=\infty\text{), und } e^{pxi}dx$$

multiplicirt, und in den 5 ersten Fällen von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$, im sechsten von $x=0$ bis $x=\infty$, und im letzten Falle von $x=0$ bis $x=2\pi$ integrirt. Dadurch ergeben sich mehrere Formeln, die zur Auswerthung bestimmter Integrale dienen; ihre Verwendbarkeit wird an einigen Beispielen gezeigt. M.

J. W. L. Glaisher. On the evaluation in series of certain definite integrals. Rep. Brit. Ass. 1872.

Setzt man

$$U = 1 - \frac{2a^2}{n-2} + \frac{(2a^2)^2}{(n-2)\,(n-4)\underline{|2}} - \cdots$$

$$V = 1 + \frac{2a^2}{n+2} + \frac{(2a^2)^2}{(n+2)\,(n+4)\underline{|2}} + \cdots,$$

so ist das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty v^{n-1} \cdot e^{-v^2 - \frac{a^2}{v^2}} \cdot dv = \tfrac{1}{2} \left\{ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot U + a^n \Gamma\left(-\frac{n}{2}\right) \cdot V \right\},$$

wenn $n = 2i + 1$.

Mit Hülfe der Formel

$$\Gamma(m) \cdot \Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi}$$

lassen sich daraus andere interessante Formeln herleiten.

Csy. (M.)

J. W. L. Glaisher. On the function that stands in the same relation to Bernouilli's numbers that the Gamma function does to fractionals. Rep. Brit. Ass. 1872.

Bezeichnet B_n die n^{te} Bernouillische Zahl, so hat man

$$B_n = \frac{2\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n)}{(2\pi)^{2n}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots \right\},$$

und als Ausdruck für B_n, je nachdem n ganz oder gebrochen

$$B_n = \frac{2\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^{2n}} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots \right),$$

oder

$$B_n = \frac{2\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^n} \cdot \frac{(2^2-1)^n\;(3^2-1)^n\;(5^2-1)^n \cdots}{(2^{2n}-1)\,(3^{2n}-1)\,(5^{2n}-1) \cdots},$$

wo 2, 3, 5... die Reihe der Primzahlen ist. Csy. (M.)

W. Walton. Note on one of Euler's integrals. Quart. J. XII. 192.

Das Integral ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(\sin x)\, dx = \tfrac{1}{2}\pi \log(\tfrac{1}{2}).$$

Cly. (O.)

A. Panek. Ueber einige bestimmte Integrale. Casopis I. 197-202.

Der Verfasser stellt für einige theilweise bekannte unendliche trigonometrische Reihen bestimmte Integrale her, und berechnet auf Grund der erhaltenen Formeln einige Functionen der Zahl π. W.

W. Walton. On the connexion between certain theorems in definite integrals. Quart J. XII. 126-129.

Bezieht sich auf Integrale von der Form

$$\int_0^\pi \frac{\cos \lambda x \, dx}{(1-2a\cos x+a)^n}.$$

Cly. (O.)

F. Chio. Théorème relatif à la différentiation d'une intégrale définie par rapport à une variable comprise dans la fonction sous le signe $\int$ et dans les limites de l'intégrale, étendu au calcul aux différences et suivi de quelques applications. Turin, Imprimerie Royale, 1871.

Ein Referat über diese Arbeit giebt Herr Darboux im Bull. III. 68—69. M.

A. Rutgers. Dissertatie over differentialen van gebroken ordre en haar gebruik by de afleiding van bepaalde integrales.

A. Rutgers. Sur les différentielles à indices quelconques. Arch. Néerl. VII. 27-37.

Siehe Abschn. VI. Cap. 2. p. 124.

J. W. L. Glaisher. Solution of question 3429. Educ. Times XVI. 23.

Zu beweisen, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^4+\frac{a^4}{x^4}\right)+4(3a)^{\frac{1}{2}}\left({}^3-\frac{a^3}{x^3}\right)-14a\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\, dx = \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{4})\, e^{21a^2}.$$

Das Resultat folgt aus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{a}{x}-\sqrt{3a}\right)^4} dx = \Gamma(\tfrac{1}{4}).$$

Hi.

J. W. L. GLAISHER. Solution of question 3539.
Educ. Times XVII. 20.

Zeige, dass

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{ue^x}+e^{-ue^x}} = -Ei(-u)+Ei(-3u)-Ei(-5u)+\cdots,$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{ue^x}-e^{-ue^x}} = -Ei(-u)-Ei(-3u)-Ei(-5u)-\cdots,$$

wo Ei das Exponentialintegral

$$Ei(-u) = \int_\infty^u \frac{e^{-x}}{x}\, dx$$

bedeutet.

Hi.

J. W. L. GLAISHER. Solution of question 3643.
Educ. Times XVII. 45-47.

Beweise, dass

$$\int_0^\infty e^{\frac{\cos ax-b}{1-2b\cos ax+b^2}} \sin\left\{\frac{\sin ax}{1-2b\cos ax+b^2}\right\}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\left(e^{\frac{1}{1-b}}-1\right)$$

$$\int_0^\infty e^{\frac{\cos ax-b}{1-2b\cos ax+b^2}} \cos\left\{\frac{\sin ax}{1-2b\cos ax+b^2}\right\}\frac{dx}{c^2+x^2} = \frac{\pi}{2c}\cdot e^{\frac{1}{e^{ac}-b}}$$

wenn a und c positiv, und b numerisch < 1.

Hi.

J. W. L. GLAISHER. Solution of question 3599.
Educ. Times XVII. 55-56.

Beweise, dass

$$\left(\gamma\int_{p^2}^\infty pdp\right)^{2i} e^{-2pq}\cos 2pq = q\left(-\frac{d}{qdq}\right)^{2i}\frac{e^{-2pq}\cos 2pq}{q}$$

$$\left(\gamma\int_{p^2}^\infty pdp\right)^{2i} e^{-2pq}\sin 2pq = q\left(-\frac{d}{qdq}\right)^{2i}\frac{e^{-2pq}\sin 2pq}{q}.$$

Hi.

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

BOOLE. Differential equations. 3rd. ed. London. Macmillan. 8°.

Hi.

)UQUET. Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles totales simultanées du premier ordre. Darboux Bull. III. 265-274.

Es wird gezeigt, dass die Methode von Briot und Bouquet r den Beweis der Existenz von synektischen Integralen eines 'stems von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen ster Ordnung auch für den Fall eines Systems von totalen ifferentialgleichungen anwendbar ist. Vom Verfasser wird, ıchdem in den ersten beiden Abschnitten der Fall einer einzigen leichung erst mit zweien, dann mit beliebig vielen unabhängi-ɜn Variablen behandelt ist, der Fall des Systems:

$$(1.)\quad \begin{aligned} du_1 &= P_1\,dz_1 + P_2\,dz_2 + \cdots + P_n\,dz_n \\ du_2 &= Q_1\,dz_1 + Q_2\,dz_2 + \cdots + Q_n\,dz_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ du_m &= S_1\,dz_1 + S_2\,dz_2 + \cdots + S_n\,dz_n \end{aligned}$$

betrachtet, unter der Voraussetzung, dass die Functionen P, $Q, \cdots S$ für die Werthe von $z_1 \cdots z_n$, $u_1 \cdots u_m$ innerhalb der bezüglichen Bereiche $r_1 \cdots r_n$, $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ synektisch und die Bedingungen er Integrabilität erfüllt sind. Es seien $A_1 \cdots, A_n$ die Maximalwerthe ər Moduln von $P_1 \cdots P_n$, $B_1 \cdots B_n$ die von $Q_1 \cdots Q_n$ u. s. f. nerhalb der bezeichneten Bereiche, und $\frac{\mu_1}{r_1} > A_1 \cdots \frac{\mu_1}{r_n} > A_n$, $\frac{\mu_2}{r_1} > B_1 \cdots \frac{\mu_2}{r_n} > B_n$ u. s. f. Bildet man dann dem Gleichungsystem (1) gemäss für $u_1 \cdots u_m$ Reihen, welche nach ganzen Poənzen von $z_1 \cdots z_n$ fortschreiten und mit den letzteren Variablen leichzeitig verschwinden, so erkennt man leicht, dass die 'oefficienten der Glieder in den einzelnen Reihen kleinere Moduln haben, als die positiven Coefficienten der entsprechenden

Glieder der Entwickelungen der Functionen $v_1 \cdots v_n$, welche folgendem System von totalen Differentialgleichungen genügen:

$$dv_1 = \mu_1 \frac{\frac{dz_1}{r_1} + \frac{dz_2}{r_2} + \cdots + \frac{dz_n}{r_n}}{\left(1 - \frac{v_1}{\varrho_1}\right)^m \left(1 - \frac{z_1}{r_1} - \frac{z_2}{r_2} - \cdots - \frac{z_n}{r_n}\right)},$$

$$\vdots$$

$$dv_m = \mu_m \frac{\frac{dz_1}{r_1} + \frac{dz_2}{r_2} + \cdots + \frac{dz_n}{r_n}}{\left(1 - \frac{v_m}{\varrho_m}\right)^m \left(1 - \frac{z_1}{r_1} - \frac{z_2}{r_2} - \cdots - \frac{z_n}{r_n}\right)}.$$

Die Gleichungen lassen sich einzeln integriren, und zwar haben die Integrale, welche mit z verschwinden, die Form:

$$\frac{\varrho}{m+1}\left\{1 - \left(1 - \frac{v}{\varrho}\right)^{m+1}\right\} = -\mu \log\left(1 - \frac{z_1}{r_1} - \cdots - \frac{z_n}{r_n}\right).$$

v bleibt offenbar synektisch, so lange $z_1 \cdots z_n$ innerhalb der Kreise mit den Radien $s_1 \cdots s_n$ bleiben, die der Bedingung genügen:

$$\frac{s_1}{r_1} + \frac{s_2}{r_2} + \cdots + \frac{s_n}{r_n} < 1 - e^{-\frac{\varrho}{(m+1)\mu}}$$

$$(\text{für } v = v_1, v_2 \cdots v_m, \mu = \mu_1, \mu_2 \cdots \mu_n).$$

Die Reihen für die Functionen u bleiben daher innerhalb derselben Grenzen convergent. Es sei noch erwähnt, dass im ersten Abschnitt p. 266 sich die Bemerkung findet, die Lösungen einer totalen Differentialgleichung mit den zwei unabhängigen Variabeln z_1, z_2 und der abhängigen u, falls die Bedingungsgleichung der Integrabilität nicht identisch erfüllt wird, seien unter den Functionen u zu suchen, welche durch die Auflösung dieser Gleichung nach u gegeben sind, während bekanntlich in diesem Falle gar keine Lösungen u als Functionen der Independenten z_1, z_2 existiren. Eine ähnliche irrthümliche Bemerkung findet sich p. 272 betreffs einer totalen Differentialgleichung mit mehr als 2 Independenten. Hr.

P. Mansion. Note sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. Bull. de Belg. XXXIV. 149-169.

?. GILBERT. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. XXXIV. 142-145.

Das allgemeine Integral

$$y = F(x, c)$$

der Differentialgleichung

$$y = f(x, y')$$

kann geschrieben werden:

$$y = f[x, F'(x, c)],$$

und jede Relation $y = \varphi(x)$ kann, wenn $\chi(x)$ passend bestimmt ist, die Form annehmen:

$$y = f[x, F'(x, \chi(x))].$$

Daraus folgt:

$$\varphi'(x) - F'(x, c) = \frac{\delta f}{\delta F'} \cdot \frac{\delta F'}{\delta \chi} \cdot \frac{\delta \chi}{\delta x}.$$

Damit $y = \varphi(x)$ die singuläre Lösung der linearen Differentialgleichung wird, ist somit im Allgemeinen erforderlich, dass

$$\text{(a)} \qquad \frac{\delta f}{\delta F'} = 0 \text{ oder } \frac{\delta y}{\delta y'} = 0$$

sei, wenigstens falls die singuläre Lösung nicht von der Form $x =$ const. ist. Eine Ausnahme findet nur statt, wenn $F''(x,c)$ unendlich ist. Die Einwände von Darboux (C. R. LXXI. 267, siehe F. d. M. II. p. 558) gegen die Regel, die zur Aufsuchung der singulären Lösungen gewöhnlich in den Lehrbüchern gegeben wird, treffen nicht diese Auseinandersetzung, die im Wesentlichen identisch ist mit der von Houtain (Des solutions singulières, Bruxelles, Lesigne 1854). Dagegen sind die Bemerkungen von Darboux (C. R. LXX. 1328 und LXXI. 267, siehe F. d. M. II. p. 558) zutreffend bei Differentialgleichungen von der Form

$$\text{(1)} \qquad [y' - \varphi(x, y)]^2 = \chi(x, y).$$

Im Allgemeinen führt die oben aufgestellte Regel hier auf $\chi(x, y) = 0$, was keine singuläre Lösung ist; sondern diese Gleichung stellt den Ort der Punkte dar, wo $y'' = 0$ ist, wie man sieht, wenn man den Werth von y' bildet. Indessen geben Gleichungen von der Form:

$$[\pi(x, y) - c]^2 = \psi(x, y)$$

häufig eine Differentialgleichung von der Form (1), deren singuläre Lösung durch die allgemeine Regel gegeben wird. (Catalan C. R. LXXI. p. 50, siehe F. d. M. II. p. 558.)

Der Verfasser erkennt, dass die Bedingung $\frac{\delta y}{\delta y'} = 0$ nicht bloss nothwendig, sondern auch hinreichend ist für die singulären Lösungen. Mn. (Wn.)

A. Cayley. On the theory of the singular solutions of differential equations of the first order. Messenger II. 6-12

Der Verfasser untersucht, was für andere Oerter in den singulären Lösungen einer Differentialgleichung $\varphi(x, y, p) = 0$ (die als einwerthig angenommen wird für (x, y), nicht nur einen (x, y)-Factor hat und unzerlegbar in Bezug auf p ist) erscheinen können, als die man durch die gewöhnlichen Methoden erhalten hat. Die Enveloppe wird als die einzig wahre singuläre Lösung betrachtet, aber daneben kann ein Ort von Knoten erscheinen, ein Ort von Spitzen oder ein „tac-locus", d. h. ein Ort von solchen Punkten, auf deren einem zwei der Curven, durch den Punkt einander berühren. Glr. (O.)

J. de Jong. De integreerende factor en de integreerende vergelyking. Leiden. 1871. Academ. Preisschrift.

J. de Jong. De l'équation intégrante. Arch. Néerl. VII. 140-145.

In der zweiten Arbeit, die dem Referenten allein zugänglich war, ist der Hauptinhalt der ersten analysirt. Die Betrachtung der integrirenden Gleichung ist nur für lineare Gleichungen von Nutzen. Ist eine lineare Differentialgleichung die integrirende Gleichung zu einer zweiten, so ist die zweite die integrirende Gleichung der ersten. Der Verfasser leitet verschiedene bekannte Resultate ab, die sich auf einfache lineare Gleichungen beziehen, z. B. auf solche mit constanten Coefficienten.

Mn. (Wn.)

OMÉ. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Borchardt J. LXXIV. 193-218.

Herr Fuchs hatte (Borchardt J. LXVI. 139 und LXVIII. 359) die Form der linearen Differentialgleichung festgestellt, lche nothwendig und hinreichend ist, damit ihre sämmtlichen egrale in der Umgebung eines singulären Punktes $x = a$ mit er Potenz von $(x - a)$ multiplicirt nicht mehr unendlich wern. Der Verfasser giebt zunächst für die Nothwendigkeit der wähnten Form einen neuen Beweis, welcher unter Zuhülfehme eines ebenfalls von Herrn Fuchs (Borchardt J. LXVIII. 3 V.) gegebenen Satzes und einiger daraus abgeleiteten Resule mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ geführt wird, da nämh für die Differentialgleichung erster Ordnung die betreffende orm sich unmittelbar ergiebt (§§ 1—4). Der Verfasser sucht rauf das Resultat dahin zu verallgemeinern, dass er die Form estimmt, welche die Differentialgleichungen haben müssen, wenn 'eniger als n (die Ordnungszahl der Differentialgleichung) und war wenigstens $n-h$ linear-unabhängige Integrale obige Beschaffenheit haben sollen. Die Bedingungen jedoch, welche der 'erfasser hierfür auf dem vorher eingeschlagenen Wege findet § 5), sind, wie der Verfasser selbst nachweist, keineswegs hineichend. Es lässt sich nun behaupten, dass falls die Coefficienten der Differentialgleichung in der Umgebung von $x = a$ die daselbst angegebenen Bedingungen erfüllen, die etwa vorandenen Integrale von der verlangten Beschaffenheit die Form $(x-a)^r \varphi$ annehmen, wo r eine Wurzel einer Gleichung $n-h^{\text{ten}}$ Grades ist. Falls nicht unter den Wurzeln r gleiche oder bloss m ganze Zahlen von einander verschiedene vorkommen, so erält man für die φ $n-h$ vollständig bestimmte, nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihenentwickelungen, welche formell der Differentialgleichung genügen, die aber im Allgemeinen ebensowohl convergent als divergent sein können. Die convergenten unter ihnen liefern die gesuchten Integrale. Die Modificationen, welche in dem Falle gleicher oder bloss um anze Zahlen verschiedener Wurzeln eintreten, werden noch zum chluss erörtert. Hr.

A. Mayer. Ueber unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. Clebsch Ann. V. 448-470.

Siehe Abschn. VI. Cap. 6.

W. H. L. Russell. On linear differential equations. Parts. VI. and VII. Proc. of London XX. 14-21.

Fortsetzung der früheren Untersuchungen (siehe Fortschr. d. M. III. 146). Cly. (M.)

D. Bierens de Haan. La méthode d'Euler pour l'intégration de quelques équations différentielles linéaires démontrée à l'aide de l'équation intégrante. Arch. Néerl. VII., Versl. en Mededeel. (2) VI. 122-139.

Die lineare Gleichung mit constanten Coefficienten

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + E\frac{d^4y}{dx^4} + \cdots = 0$$

wird unmittelbar integrabel, wenn man sie mit einem Factor φ multiplicirt, so dass

$$A\varphi - B\frac{d\varphi}{dx} + C\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \cdots = 0$$

ist. Aus beiden Gleichungen folgt:

$$0 = B\frac{d\varphi y}{dx} + C\cdot\frac{d}{dx}\left(\varphi\frac{dy}{dx} - y\frac{d\varphi}{dx}\right) + D\left(\varphi\frac{d^3y}{dx^3} + y\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right)$$
$$+ E\left(\varphi\frac{d^4y}{dx^4} - y\frac{d^4\varphi}{dx^4}\right) + \cdots$$

Setzt man die Coefficienten von $B, C, D, E \cdots = 0$, so folgen, wie der Verfasser zeigt, die so erhaltenen Gleichungen aus der ersten und dritten Gleichung, und diese geben den Werth von φ.

Die Note enthält ferner eine ähnliche Discussion in Bezug auf die lineare Gleichung von der Form:

$$Ay + Bx\frac{dy}{dx} + Cx^2\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots,$$

worin A, B, C Constanten sind. Hinsichtlich einer allgemeinen

scussion der Euler'schen Methode in ihrer Anwendung auf ieare Gleichungen verweist der Verfasser auf die oben erähnte Arbeit von Jong (siehe p. 148).

Mn. (Wn.)

. Mansion. Note sur la première méthode de Brisson pour l'intégration des équations linéaires aux différences finies ou infiniment petites. Mém. cour. de Belg. XXII. 1-32.

Brisson und später Boole haben lineare Differentialgleichungen nter folgender Form geschrieben:

$$(D-a_1)\ (D-a_2)\dots(D-a_n)\ y = F(x),$$

ro D die Ableitung nach x bedeutet, a_1, a_2 ... Constante. Diese erlegung des ersten Gliedes der Gleichung in symbolische actoren ist erlaubt, weil in dem Falle, um den es sich hier handelt, D sich gerade so verhält wie ein Factor. Der Verfasser ntwickelt die elementarsten Anwendungen dieser Bezeichnungsrt auf die Integration linearer partieller oder gewöhnlicher)ifferentialgleichungen mit constanten Coefficienten und der entprechenden Differenzengleichungen. Ausserdem zeigt er, dass as erste Glied linearer Differential- oder Differenzengleichungen ich als Product symbolischer Factoren von der Form $D-a$ geschrieben werden kann, wenn die Coefficienten variabel sind. ist in diesem Falle eine Function von x, die man erst beimmen kann, wenn man das allgemeine Integral der Gleichung nnt.

Mn. (Wn.)

Mansion. Sur la méthode de Brisson pour intégrer les équations différentielles à coefficients constants. Nouv. Ann. (2) XI. 118-122.

Die hier auseinandergesetzte Methode Brisson's ist von uchy in den Exercices Mathém. I. II. p. 175 veröffentlicht, und ı Boole (A treatise on différential equations 2e edition p. 391 55) zum zweiten Male gefunden worden. Wir können uns tt der Wiedergabe auf die in dieser Zeitschrift besprochene beit des Herrn Grelle beziehen (Schlömilch Z. XV., F. d. M.

II. p. 160), in welcher im Wesentlichen die in Rede stehende Methode entwickelt ist. Hr.

A. SEYDLER. Bemerkung zur Integration einiger linearen Differentialgleichungen. Casopis I. 195-196. (Böhmisch.)

Der Verfasser behandelt zwei lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung

$$\sum_{k=n}^{k=0} a_k\, y^{(k)} = 0, \quad \sum_{k=n}^{k=0} b_k\, y^{(k)} = 0,$$

welche ein gemeinschaftliches particuläres Integral y_1 besitzen, das dann selbstverständlich ein solches für die Gleichung

$$\sum_n^0 (a_k X + b_k Y)\, y^{(k)} = 0$$

ist, wo X, Y, Functionen von $x, y, y', y'' \cdots$ sind. Wenn sie nur x enthalten, d. h. wenn die letzte Gleichung auch linear ist, kann man mittelst der Variation der Constanten eine neue lineare Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung herstellen. Die Bedingung, dass die ersten zwei Gleichungen ein gemeinschaftliches Integral besitzen, wird eine die Constanten a_k, b_k enthaltende Gleichung sein, welche man aus den beiden ersten Gleichungen durch Elimination von y, y', $y'' \cdots$ erhält. Wenn a_k, b_k constant sind, ist das Integral von der Form $e^{\alpha x}$, wobei α den Gleichungen n^{ten} Grades

$$\sum_n^0 a_k\, \alpha^k = 0, \quad \sum_n^0 b_k\, \alpha^k = 0$$

genügen muss. Aus diesen beiden Gleichungen kann man sich die Gleichung für a_k, b_k und den Werth für α bestimmen. Für $n = 2$ kann man, die (für diesen Fall einfache) Bedingungsgleichung vortheilhaft verwenden. Es wird also

$$Y_1 = e^{\alpha x}$$

ein particuläres Integral von

$$(a_2 X + b_2 Y)\, y'' + (a_1 X + b_1 Y)\, y' + (a_0 X + b_0 Y)\, y = 0$$

sein, wenn α den Gleichungen genügt:

$$a_2\, \alpha^2 + a_1\, \alpha + a_0 = 0$$
$$b_2\, \alpha^2 + b_1\, \alpha + b_0 = 0,$$

woraus folgt

$$\alpha = \frac{(a_0\, b_1)}{(a_2\, b_0)} = \frac{(a_2\, b_0)}{(a_1\, b_2)}.$$

Von den sechs Grössen a, b sind also fünf willkürlich, während man für die sechste aus der letzten für alle quadratischen Gleichung zwei Werthe erhält. Wenn wir nun in unserer Differentialgleichung $y = ue^{\alpha x}$ setzen, ergiebt sich:

$$(a_2\, X + b_2\, Y)\, u'' + [(a_1 + a_2\, \alpha)\, X + (b_1 + 2b_2\, \alpha)\, Y]\, u' = 0,$$

welche Gleichung unmittelbar integrirt werden kann. Der letzten Bedingungsgleichung kann auch dadurch Genüge geleistet werden, dass

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = m;$$

unsere Differentialgleichung hat dann den Factor $(X + m\, Y)$, nach dessen Absonderung man eine lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten erhält.

Eine sehr elegante Form gewinnt die Bedingungsgleichung

$$\frac{(a_0\, b_1)}{(a_2\, b_0)} = \frac{(a_2\, b_0)}{(a_1\, b_2)}$$

für den Fall, dass X und Y trigonometrische Functionen sind, z. B. $X = \cos x, \quad Y = \sin x.$

Setzen wir ferner

$$a_k = m_k \cos v_k, \; b_k = m_k \sin v_k,$$

so geht die Differentialgleichung über in:

$$m_2 \cos (v_2 + x)\, y'' + m_1 \cos (v_1 + x)\, y' + m_0 \cos (v_0 + x)\, y = 0,$$

welche das particuläre Integral $y = e^{\alpha x}$ haben wird, wenn

$$\frac{\sin^2 (v_0 - v_2)}{m_1^2} = \frac{\sin (v_1 - v_0)}{m_2} \cdot \frac{\sin (v_2 - v_1)}{m_1}$$

ist. Zugleich hat man

$$\alpha = \frac{m_1 \sin (v_1 - v_0)}{m_2 \sin (v_0 - v_2)} = \frac{m_0 \sin (v_0 - v_2)}{m_1 \sin (v_2 - v_1)}.$$

Als Beispiel möge die Gleichung dienen:

$$(3 - x)\, y'' - (9 - 4x)\, y' + (6 - 3x)\, y = 1,$$

in welcher $X = 1$, $Y = x$ wirklich den geforderten Bedingungen genügen; ferner ist $\alpha = 1$, somit $y = ue^x$, woraus folgt:

$$(3-x)\ u''-(3-2x)\,u'=0,$$

$$u'=C'e^{2x}\,(3-x)^3,\quad u=C+C'\int e^{2x}\,(3-x)^3\,dx,$$

und schliesslich

$$y=Ce^{x}+C'\,e^{3x}(18.3-150x+4.2x^2-4x^3).$$

W.

ORLOFF. Sur les équations différentielles réciproques. Bull. de Belg. (2) XXXIII. 113-122.

P. GILBERT. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (
XXXIV. 105-106.

Der Verfasser lenkt von Neuem die Aufmerksamkeit a
eine Transformation, die schon von Monge, Morgan, Chas
(vergl. rapport sur les progrès de la géométrie p. 91) u
Legendre (siehe Lacroix, Calc. intégr. II. 558. No. 744) ben
ist. Sie besteht in Folgendem. Hat man die Gleichungen

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \text{ oder } f\left(x,y,z,\frac{dz}{dx},\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

und setzt

$$\frac{dy}{dx}=p,\ \omega=y-px \text{ oder } \frac{dz}{dx}=p,\ \frac{dz}{dy}=q,\ \omega=z-px-q$$

so wird man auf die neuen Gleichungen geführt:

$$f\left(\frac{d\omega}{dp},\ p\frac{d\omega}{dp}-\omega,\ p\right)=0,$$

$$f\left(\frac{d\omega}{dp},\ \frac{d\omega}{dq},\ p\frac{d\omega}{dp}+q\frac{d\omega}{dq}-\omega,\ p,q\right)=0.$$

Der Verfasser behandelt nach dieser Methode, die, wie r
sieht, auf der Theorie der Enveloppen beruht, die homog
Gleichung erster Ordnung, die verallgemeinerte Clairaut's
Gleichung

$$z=apq,\ z=px+qy+f(p,q),$$

und endlich

$$z=x\varphi(p,q)+y\psi(p,q)+f(p,q),$$

deren Transformirte linear ist. Die Methode lässt sich
Gleichungen höherer Ordnung ausdehnen, wie schon Boole [Trea
on differential equations II. p. 376] bemerkt hat.

Mn. (Wn.)

A. GENOCCHI. Intorno ai casi d'integrazione sotta forma finita. Atti di Torino VII. 682-685.

In einer früheren Abhandlung hat der Verfasser einige Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung betrachtet und auf sie die Methoden von Liouville angewandt, um zu erkennen, ob sie unter endlicher Form integrabel sind. In der vorliegenden Abhandlung benutzt er ebenfalls Methoden von Liouville. Die Gleichungen, für welche er die Integrabilitäts-Bedingungen aufgestellt hat, sind:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x(a+bx^\mu)\frac{dy}{dx}+(c+gx^\mu)\,y=0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}\right)y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=\left(ax^{2\mu}+bx^{\mu-1}+\frac{c}{x^2}\right)y,$$

$$\frac{dy}{dx}+y^2+\frac{g}{x}\,y=ax^{2\mu}+bx^{\mu-1}+\frac{c}{x^2},$$

$$x^3\frac{dy}{dx}+x^2(ay^2+by+c)+x(a'y+b')+c'=0.$$

Jg. (O.)

J. W. L. GLAISHER. On a differential equation allied to Riccati's. Quart J. XII. 129-137.

Die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2}\pm a^2u-i\,\frac{(i+1)}{x^2}\,u=0,$$

welche in der Physik, speciell bei der Bestimmung der Gestalt der Erde vorkommt, wird durch bestimmte Integrale gelöst.

Cly. (O.)

J. W. L. GLAISHER. On the relations between the particular integrals in Cayley's solution of Riccati's equation. Phil. Mag. 1872. Csy.

A. Clebsch. Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene Gött. Nachr. 1872. 429-449, Clebsch Ann. VI. 200-215.

Siehe Abschn. II. Cap. 3. p. 64.

Ellen Rhodes. Solution of question 3475. (By J. F. Moulton.) Educ. Times XVI. 102.

Finde die Differential- und die Functionalgleichung der Flächen, welche die Familie von Flächen $z+a=xy$ überall rechtwinklig schneidet. Hi.

Capitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

V. G. Imschenetsky. Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. (Traduit du russe par J. Hoüel.) Grunert Arch. LIV. 209-360.

Der Hauptgegenstand dieser Abhandlung ist derselbe, den Ampère im 17. u. 18. Hefte des J. de l'Éc. Pol. behandelt hat. Der Verfasser hat nicht nur die schwierige Aufgabe, von diesen berühmten Untersuchungen Ampère's eine klare und übersichtliche Darstellung zu geben, mit vielem Geschick gelöst, sondern dieselben auch durch Anwendung neuerer Methoden vervollständigt und namentlich die Theorie der Ampère'schen Gleichung

$$(1.)\quad H\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2K\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+L\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+M+N\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2\right]=0$$

durch eigene Forschung wesentlich gefördert.

Bei der Ausdehnung des Aufsatzes und der Wichtigkeit, die derselbe für jeden besitzt, der sich über die Integrationsmethoden

r partiellen Differentialgleichungen 2ter Ordnung unterrichten ill — mit Ausschluss der Integration durch Reihen und durch stimmte Integrale bringt der Aufsatz eigentlich Alles, was auf esem Gebiete bisher*) geleistet worden ist — dürfte eine iedergabe des Inhaltes in kurzen Worten weder ein einfaches nd leichtes, noch auch gerade ein sehr zweckmässiges Unterehmen sein. Statt eines Ueberblickes möge daher hier ein Inaltsverzeichniss folgen. Der Versuch, in dieser Form eine Uebericht über die behandelten Gegenstände zu geben, wird um so ehr gerechtfertigt erscheinen, als der Abhandlung selbst kein haltsverzeichniss beigegeben ist, und auch die einzelnen Paraaphen keine Ueberschriften tragen. Die eingeklammerten ellen sprechen persönliche Meinungen des Referenten aus.

Inhalt.

Vorwort. Kurze Angabe des allgemeinen Inhaltes.

Cap. I. Ueber die Integralgleichungen der partiellen Differentialgleichungen.

§ 1. Die verschiedenen Arten von Integralgleichungen.

§ 2. Beispiel. Die Art, in der Lagrange die allgemeine sung durch die Methode der Variation der Constanten aus der llständigen Lösung abzuleiten suchte. Anwendung derselben ethode auf die Zwischenintegrale. Hindernisse, die sich der bleitung von vollständigen Zwischenintegralen aus der volländigen Lösung entgegenstellen. Es existiren überhaupt nicht nmer Zwischenintegrale.

§ 3. Die willkürlichen Grössen, die in der allgemeinen Integralgleichung auftreten, müssen die Eigenschaft besitzen, dass hre Anzahl wächst bei wiederholter Differentiation der Gleichung. Die beiden Ausdrucksweisen willkürlicher Grössen, welche dieser Bedingung genügen: Willkürliche Functionen und partielle Quadraturen.

§ 4. Ueber die Art, in welcher aus einer allgemeinen Integralgleichung ohne partielle Quadraturen durch fortgesetzte

*) Das Original erschien 1868 in den Mém. de Kasan.

Differentiation neue willkürliche Grössen entstehen. Homogene und heterogene Differentialquotienten der allgemeinen Lösung.

§ 5. Bei einer partiellen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung muss die allgemeine Integralgleichung ohne partielle Quadraturen m willkürliche Functionen enthalten.

§ 6. Wie man, unter Voraussetzung der Existenz einer allgemeinen Integralgleichung ohne partielle Quadraturen, aus der Form der gegebenen partiellen Differentialgleichung 2ter Ordnung Schlüsse ziehen kann auf die Natur der Argumente der beiden willkürlichen Functionen, die in der allgemeinen Integralgleichung vorkommen müssen. Die quadratische Gleichung, von der diese Argumente abhängen. Ausdehnung auf partielle Differentialgleichungen 3ter Ordnung.

Cap. II. Integration der einfachsten Formen von partiellen Differentialgleichungen 2ter Ordnung.

§ 7. Die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung von der Form:

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2S\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

wo R, S, T nur von x und y abhängen, eine allgemeine Integralgleichung mit zwei willkürlichen Functionen desselben Argumentes besitzt. Zurückführung dieser Classe von Gleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen 2ter Ordnung.

§ 8. Wichtigkeit der Gleichungen von der Form

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

Dieselben besitzen ein allgemeines Zwischenintegral mit einer willkürlichen Function von y, wenn sie linear sind in Bezug auf

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial x},$$

und wenn überdies die Coefficienten der Gleichung der Euler-schen Integrabilitätsbedingung genügen. Die Ermittelung der allgemeinen Integralgleichung hängt dann nur noch ab von der successiven Integration einer totalen Differentialgleichung zwischen 3 Variabeln und einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1ter Ordnung.

§ 9. Eine recurrirende Methode Imschenetsky's, die unter ıständen auch dann zur allgemeinen Integration der Gleichungen:

$$G\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + H\frac{\partial z}{\partial x} + K = 0$$

ıren kann, wenn die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt ist.

§ 10. Die Laplace'sche Methode zur Integration der Glei-.ungen:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + Nz = M$$

ird als specieller Fall aus der vorhergehenden abgeleitet.

§ 11. Ableitung eines von Legendre (Acad. des sciences .787) ohne Beweis angegebenen Verfahrens, welches auch die ıllgemeine lineare Gleichung 2ter Ordnung der Laplace'schen Methode zugänglich macht.

Cap. III. Integration der Ampère'schen Gleichung (1).

§ 12. Ableitung der charakteristischen linearen Systeme durch die Methoden von Ampère, Monge und Boole (von denen die letzte jedoch kaum wiederzuerkennen ist). Bedingungen, unter denen sich die Ampère'sche Methode überhaupt auf solche partielle Differentialgleichungen 2ter Ordnung ausdehnen lässt, die ganz und rational sind in Bezug auf die zweiten Differentialquotienten.

§ 13. Integration der Gleichung (1) in dem Falle, wo die beiden charakteristischen partiellen Differentialgleichungen ein Jacobi'sches System bilden.

§ 14. Simultane Integration dieser beiden Charakteristiken, enn sie kein Jacobi'sches System bilden.

(Die Untersuchungen der §§ 13 u. 14 lassen sich sehr vernfachen, wenn man an Stelle der Boole'schen Methode, die der erfasser anwendet und die unnöthige Integrationen erfordert, .r simultanen Integration der beiden Charakteristiken die neuen Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen er Ordnung benutzt).

§ 15. Die Transformationen von Legendre und von Ampère.

§ 16. Die Monge'sche Methode zur Integration der Gleichung !), wenn jedes der beiden charakteristischen Systeme von to-

talen Differentialgleichungen weniger als 3 Integrale besitzt. Merkwürdige Eigenschaft dieser Systeme. (Warum sich dieser Ampère'sche Satz hier mitten zwischen Exposition und Anwendung der Monge'schen Methode eingefügt findet, ist uns nicht ganz verständlich, da derselbe, wenn er überhaupt benutzt wird, jedenfalls erst im folgenden Paragraphen in Betracht kommen kann.)

§ 17. Ampère's Methode zur Integration der Gleichung (1), falls dieselbe ein allgemeines Zwischenintegral besitzt.

Cap. IV. Imschenetsky's Anwendung der Variation der Constanten zur Transformation und Integration der Gleichung (1). Uebergang von einer partikulären Lösung mit 3 willkürlichen Constanten zur allgemeinen Lösung.

§ 18. Mit Hülfe einer partikulären Lösung, die 3 willkürliche Constanten enthält, kann man die Gleichung (1) zurückführen auf eine partielle Differentialgleichung 2ter Ordnung, die linear ist in Bezug auf die zweiten partiellen Differentialquotienten der neuen unbekannten Function. Stellt man dieselbe Transformation mit einer willkürlich gewählten Function z von x, y und 3 willkürlichen Constanten an, so erhält stets die transformirte Gleichung dieselbe Form, wie die ursprüngliche.

§ 19. Erläuterung der Methode an einem Beispiel.

§ 20. Wenn man solche partikuläre Lösungen der Gleichung (1) zu Grunde legt, die aus Integralen der charakteristischen Systeme abgeleitet worden sind, so erhält stets die transformirte Gleichung eine noch beträchtlich einfachere Form.

§ 21. Beispiele. Am zweiten werden die Vorzüge der Imschenetsky'schen Methode vor der von Ampère erläutert.

§. 22. An einem Beispiele wird gezeigt, wie man mitunter auch eine partikuläre Lösung mit nur 2 willkürlichen Constanten zur Ableitung der allgemeinen Lösung verwenden kann.

§ 23. Recapitulation der gewonnenen Resultate. Bemerkungen über die beste Art, die Methode anzuwenden, wenn die charakteristischen totalen Systeme mehr als ein Integral besitzen.

Mr.

S. Lie. Neue Integrations-Methode partieller Gleichungen erster Ordnung zwischen n Variabeln. Forh. af Christ. 1872. 28-34.

Durch Betrachtungen über n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten wird eine neue Integrations-Methode begründet. Nach derselben verlangt die Integration einer Gleichung

$$F(zx_1 \cdots x_{n-1} p_1 \cdots p_{n-1}) = 0$$

nur die Bestimmung eines Integrals von je einem Systeme von $2n-3$, $2n-5$, $\cdots$ 5, 3, 1 gewöhnlichen Differential-Gleichungen.

L.

S. Lie. Zur Theorie der Differential-Probleme. Forh. af Christ. 1872. 132-133.

Kurze Andeutungen hinsichtlich mehrerer neuer Theorien. Zugleich wird die Aufmerksamkeit darauf gerichtet, dass diejenigen Integrations-Theorien, welche Herr Mayer und der Verfasser gleichzeitig im Frühlinge 1872 gaben, das Problem der 3 Körper darauf zurückführen, ein Integral von je einem Systeme von 6, 4, 2 gewöhnlichen Differential-Gleichungen zu finden.

L.

S. Lie. Kurzes Résumé mehrerer neuer Theorien. Forh. af Christ. 1872. 24-27.

Sollen die Gleichungen

$$z' = F_0(zx_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n); \;\; x'_i = F_i(zx_1 \cdots p_n) \,|\, i = 1 \cdots n$$

eine Berührungs-Transformation definiren, so ist es nothwendig und hinreichend, dass

$$[F_i F_k] = 0; \;\; i = 0,\ 1, \cdots n; \;\; k = 0,\ 1 \cdots n.$$

Es ist naturgemäss, den Monge'schen Begriff: Charakteristik einer partiellen Differential-Gleichung, zu erweitern. Kennt man eine Lösung mit drei Parametern der Monge-Ampère'schen Gleichung

$$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

so kann man eine Berührungs-Transformation angeben, welche die Gleichung auf die lineare Form

$$ar + bs + ct + d = 0$$

bringt. Diese Bemerkung macht die Ampère'sche Theorie dieser Gleichungen sehr einfach u. s. w. L.

S. LIE. Zur Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen. Forh. af Christ. 1872. 133-135.

Sind $f_1 \cdots f_r$ gegebene Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, und ist es immer möglich $(f_i - f_k)$ als Function von den f auszudrücken, so bilden die linearen Gleichungen

$$(f_1\, \varphi) = 0 \cdots (f_r\, \varphi) = 0$$

ein vollständiges System. Sind $\varphi_1 \cdots \varphi_{2n-r}$ die betreffenden gemeinsamen Lösungen, so kann bekanntlich $(\varphi_i\, \varphi_k)$ immer als Function von den φ ausgedrückt werden. Die beiden Functionen-Gruppen f und φ stehen in einem vollständigen Reciprocitäts-Verhältnisse. Es giebt eine Zahl, etwa m, Functionen F von $f_1 \cdots f_r$, welche

$$(f_1\, F) = 0, \cdots (f_r\, F) = 0$$

genügen. Die beiden Zahlen r und m sind die einzigen Eigenschaften der Gruppe f, die bei beliebigen Berührungs-Transformationen invariant bleiben. Hierauf gründen sich wichtige Integrations-Theorien. L.

A. MAYER. Zur simultanen Integration linearer partieller Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1872. 315-320.

A. MAYER. Ueber unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. Clebsch Ann. V. 448-470.

S. LIE. Ueber eine neue Integrations-Methode partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Gött. Nachr. 1872. 321-326.

A. MAYER. Die Lie'sche Integrations-Methode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Gött. Nachr. 1872. 467-472.

A. Mayer. Zur Theorie der vollständigen Lösungen und der Transformation der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Gött. Nachr. 1872. 405-420.

S. Lie. Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine Classification derselben. Gött. Nachr. 1872. 473-489.

1) Die erste der citirten Arbeiten macht nur Mittheilung von lem Hauptresultat der folgenden Abhandlung.

2) Der zweite Aufsatz giebt eine neue Integrations-Methode ir diejenigen Systeme linearer partieller Differentialgleichungen, uf welche Jacobi die partiellen Differentialgleichungen 1ter Ordng überhaupt, und Clebsch das Pfaff'sche Problem zurückeführt hat. Diese sogenannten Jacobi'schen Systeme lassen sich uf die Form bringen:

$$(\alpha) \qquad A_1(f) = 0,\ A_2(f) = 0, \cdots A_{m-1}(f) = 0,$$

o allgemein:

$$A_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + a^i_m \frac{\partial f}{\partial x_m} + a^i_{m+1} \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \cdots a^i_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

nd die Coefficienten a_k^λ solche Functionen von $x_1\, x_2 \cdots x_n$ sind, ass für jedes f identisch ist:

$$(\beta) \qquad A_h[A_i(f)] = A_i[A_h(f)].$$

Der Verfasser zeigt, dass die Auffindung aller gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (α) von der vollständigen Integration ines einzigen Systems von $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialleichungen abhängt, und dass zur Ermittelung einer gemeinsamen Lösung schon die Kenntniss irgend eines Integrales dieses ystems hinreicht. Aus der Verbindung des letzteren Satzes mit er Jacobi'schen Methode folgt dann, dass die vollständige Lösung iner gegebenen partiellen Differentialgleichung 1ter Ordnung mit unabhängigen Variabeln, in der die unbekannte Function selbst cht vorkommt, nur die Entdeckung eines Integrales von je nem System von

$$2n-2,\ 2n-4, \cdots 4,\ 2$$

wöhnlichen Differentialgleichungen erfordert. Dessgleichen giebt sich, wenn man den Satz anwendet auf diejenigen linearen

ren Systeme, auf welche durch Clebsch die Integration der totalen Differentialgleichung

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \cdots + X_{2n}\, dx_{2n} = 0$$

zurückgeführt worden ist, dass es zur vollständigen Lösung des Pfaff'schen Problems genügt, ein Integral von je einem System von

$$2n-1,\ 2n-3, \cdots 3, 1$$

gewöhnlichen Differentialgleichungen zu finden.

Den Ausgangspunkt der Arbeit bildet die allgemeine Bemerkung, dass aus jeder gemeinsamen Lösung der $m-1$ partiellen Differentialgleichungen (α), wenn man dieselbe einer willkürlichen Constanten gleichsetzt, ein Integral des Systems von $n-m+1$ totalen Differentialgleichungen hervorgeht:

$$(\gamma) \qquad dx_k = a_k^1\, dx_1 + a_k^2\, dx_2 + \cdots a_k^{m-1}\, dx_{m-1}, \quad k = m, m+1, \cdots$$

und umgekehrt, wobei es noch ganz dahingestellt bleibt, ob die Identitäten (β) bestehen, oder nicht. Es werden daher zunächst an Stelle der partiellen Differentialgleichungen (α) die totalen (γ) betrachtet, jedoch nur unter Voraussetzung der Identitäten (β). Die Untersuchung ergiebt (§§ 2 u. 7), dass alsdann das System (γ) ein unbeschränkt integrables ist, d. h. (§ 1) ebensoviel unabhängige Integrale als Gleichungen besitzt. Zur Auffindung dieser Integrale erscheint zuerst die vollständige Integration von $m-1$ Systemen von je $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen nöthig (§ 2). Durch Anwendung eines Transformationsprincips, das in seiner einfachsten Form zuerst von Hr. P. du Bois-Reymond (Borchardt J. LXX. siehe F. d. M. II. p. 162) zur Integration der durch eine Gleichung integrirbaren totalen Differentialgleichungen benutzt worden ist, gelingt es aber (§§ 3 u. 7), die Integration der Gleichungen (γ) und damit zugleich auch (§ 4) die Auffindung aller gemeinsamen Lösungen des Jacobi'schen Systems (α) zurückzuführen auf die vollständige Integration eines einzigen Systems von $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen und hieraus endlich wird (§ 5) der Satz gefolgert, dass man aus einem beliebigen Integrale dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen immer auch eine gemeinsame Lösung der Gleichungen (α) ableiten kann. Die Anwendungen desselben auf die Integration

er partiellen Differentialgleichungen 1ter Ordnung und auf das faff'sche Problem sind in § 6 enthalten.

3) Durch geometrische Betrachtungen, angestellt an Räumen ıit n Dimensionen, ist Hr. Lie auf eine neue Integrationsmethode er partiellen Differentialgleichungen 1ter Ordnung geführt worden, ie, ungleich einfacher und übersichtlicher als alle anderen, ı Bezug auf die Anzahl von Integrationen, die sie fordert, genau asselbe leistet, wie die unter 2) besprochene Methode. Diese ie'sche Methode, deren Grundzüge bereits am 10. Mai 1872 der cademie zu Christiania (siehe das Referat p. 161) vorgelegt urden, besteht in der fortgesetzten Wiederholung eines und esselben fundamentalen Satzes, eines Theorems, das sich, wenn ir uns, zu leichterer Vergleichung beider Methoden, hier auf olche partielle Gleichungen beschränken, in denen die unkannte Function selbst nicht vorkommt, so aussprechen lässt:

Die Integration einer partiellen Differentialgleichung 1ter Ordnung mit n unabhängigen Variabeln kann mit Hülfe eines beiebigen Integrales von einem System von $2n-2$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt werden auf die Integration iner ebensolchen Gleichung mit nur $n-1$ unabhängigen Variabeln.

Man braucht nur diesen Satz immer von Neuem anzuwenden, ım sofort zu übersehen, dass nach demselben zur vollständigen Lösung einer Gleichung mit n unabhängigen Variabeln in der hat nur erforderlich ist, die Kenntniss eines Integrales von je inem System von

$$2n-2,\ 2n-4, \ldots 4, 2$$

ewöhnlichen Differentialgleichungen.

Der Satz selbst ist nur ein specieller Fall des folgenden lgemeineren Theoremes von Lie:

Besitzen q partielle Differentialgleichungen 1ter Ordnung ischen n Variabeln eine gemeinsame vollständige Lösung mit $-q$ willkürlichen Constanten, so lässt sich die simultane Inteation dieser Gleichungen zurückführen auf die vollständige ösung einer einzigen partiellen Differentialgleichung 1ter Ordng zwischen $n-q+1$ Variabeln.

Ueber das Raisonnement, durch welches der Verfasser zu

diesen wichtigen Sätzen gelangt, enthält die vorliegende Not nur sehr spärliche Andeutungen. Eine ausführliche Skizzirun desselben findet man in der oben erwähnten Mittheilung an d. Academie zu Christiania.

4) In der eben besprochenen Note hat Hr. Lie noch nic die algebraischen Formeln für sein Fundamentaltheorem gegeben Die vorliegende Mittheilung füllt diese Lücke aus und deutet zugleich an, wie man mit Hülfe zweier Sätze aus der Note 5) ganz ohne geometrische Betrachtungen zum Beweis des Theorems gelangen kann, womit also ein rein analytischer Weg zur Ab leitung der Lie'schen Methode selbst vorgezeichnet ist.

5) In der hinterlassenen Abhandlung „Ueber die vollstän digen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung 1ter Ordnung", welche den „Vorlesungen über Dynamik" beigefügt ist, behandelt Jacobi unter anderen die Aufgabe, aus einer gegebenen vollständigen Lösung beliebige andere vollständige Lösungen abzuleiten, wenn die partielle Differentialgleichung die gesuchte Function selbst nicht enthält. Der Regel, die dort p. 492 gegeben wird, entspricht in gewissem Sinne das Theorema VIII der Jacobischen Nova methodus (Borchardt J. LX) über die Transformation solcher partieller Differentialgleichungen. Bei genauerem Anblick dieser beiden Sätze erkennt man aber sehr bald, dass der eine wie der andere vielfachen, und was das Misslichste ist, nicht im Voraus angebbaren Ausnahmen unterworfen ist. Die vorliegende Note ersetzt daher diese Jacobi'schen Regeln durch andere von ganz allgemeiner Gültigkeit. Sie dehnt dieselben überdies aus auf partielle Differentialgleichungen, in denen die unbekannte Function selbst vorkommt, und enthält namentlich die allgemeine Lösung der Aufgabe, aus irgend einer vollständigen Lösung jede andere vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung abzuleiten. Dagegen ist es dem Verfasser nicht gelungen, auch für die allgemeineren Transformationen, welche Jacobi in §61 der Nova methodus betrachtet, die fundamentale Aufgabe allgemein zu lösen, wie aus der vollständigen Lösung der transformirten Gleichung eine vollständige Lösung der ursprünglichen erhalten werden könne. Ausführliche Beweise sind der Mittheilung nicht beigegeben

6) **Dieser Aufsatz** zerfällt in drei von einander ganz unabhängige Theile.

Im **ersten**, welcher das Verhältniss der Lie'schen Methode zu der in 2) auseinandergesetzten bespricht, deutet der Verfasser an, in wie weit beide Methoden denselben Weg gehen und wo sie sich von einander abzweigen.

Der zweite Abschnitt giebt in gedrängter Kürze einen Ueberblick über eine Reihe von neuen allgemeinen Betrachtungen, die, ausgehend von einer Untersuchung der partiellen Differentialgleichungen hinsichtlich derjenigen Eigenschaften, die durch Berührungstransformationen nicht geändert werden, zu einer Ausdehnung der Begriffe: partielle Differentialgleichung 1[ter] Ordnung, vollständige Lösung etc. und hierdurch schliesslich zu dem Satze führen, dass es unter den partiellen Differentialgleichungen mit $n+1$ Variabeln ausser der Classe der linearen noch $n-1$ andere Classen giebt, deren Lösung durch die vollständige Integration eines Systems von nur n gewöhnlichen Differentialgleichungen erhalten werden kann. Auch hier hat die Betrachtungsweise einen vorwiegend geometrischen Character. Nach jenen Begriffserweiterungen lässt sich auch eine Gleichung zwischen den Variabeln allein, ohne partielle Differentialquotienten, als eine partielle Differentialgleichung auffassen und die vollständige Lösung einer partiellen Differentialgleichung zwischen $n+1$ Variabeln braucht nicht nothwendig aus einer einzigen Gleichung zwischen diesen Variabeln und n willkürlichen Constanten zu bestehen, sondern kann auch, je nachdem, durch 1, 2, ... n Gleichungen definirt sein, in denen aber immer n willkürliche Constanten vorkommen müssen. An einem Beispiel wird gezeigt, wie man jedes solche System von Gleichungen als vollständige Lösung einer partiellen Differentialgleichung ansehen, und wie man von dieser Lösung zu beliebigen anderen Lösungen übergehen kann. Der Verfasser hebt noch hervor, dass sich diese erweiterte Auffassung bei dem allgemeinen Problem der Transformation der partiellen Differentialgleichungen, von dem die Note 5) nur specielle Fälle vollständig absolvirt, mit innerer Nothwendigkeit von selbst aufdränge.

Der dritte Theil endlich bringt Bemerkungen über den so-

genannten ungünstigsten Fall. Diese Bemerkungen sind als ein erstes Anzeichen der wichtigen Erscheinung zu betrachten, dass man nicht einer einzigen Methode das ausschliessliche Privilegium zur Integration der partiellen Differentialgleichungen zuerkennen kann, sondern erst von der Combination der verschiedenen Integrationsmethoden die grössten Erfolge zu erwarten haben wird. Wir wollen versuchen, sie hier etwas näher auseinanderzusetzen.

Im Folgenden bezeichnet (F, Φ) zunächst den Ausdruck:

$$(F, \Phi) = \sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_h}\frac{\partial \Phi}{\partial p_h} - \frac{\partial F}{\partial p_h}\frac{\partial \Phi}{\partial q_h}\right),$$

hat man aber an Stelle einer der Variabeln q und des entsprechenden p zwei neue Variable x und y eingeführt, so soll dann dies Zeichen so verstanden werden, dass in der Definition desselben diese q und p durch x und y zu ersetzen sind.

Dies vorausgeschickt, sei

$$(A) \qquad p_1 = H_1\,(q_1 \cdots q_n\, p_1 \cdots p_n),$$

wo allgemein

$$p_h = \frac{\partial V}{\partial q_h},$$

die zu integrirende partielle Differentialgleichung.

Hat man eine Lösung f der linearen Gleichung

$$(H_1 - p_1, f) = 0$$

gefunden, und ergeben die beiden Gleichungen $p_1 = H_1$ und $f = \text{const.}$ durch Auflösung nach p_1 und p_2:

$$(B) \qquad p_1 = F_1,\; p_2 = F_2,$$

so ist hiermit die gegebene Gleichung zurückgeführt auf die beiden Gleichungen (B). Indem man an Stelle von q_2 eine neue Variable x_2 durch die Substitution:

$$q_2 = a_2 + (q_1 - a_1)\,x_2$$

einführt, verwandelt man diese Gleichungen in die folgenden

$$(C) \qquad p_1 = f_1,\; y_2 = f_2,$$

wo

$$y_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2},\; f_1 = F_1 + x_2 F_2,\; f_2 = (q_1 - a_1)\,F_2$$

ist. Nach der Lie'schen Methode kann man nun eine gemeinsame vollständige Lösung der beiden Gleichungen (C) durch blosse

algebraische Operationen ableiten, sobald man die eine partielle Differentialgleichung mit nur noch $n-1$ unabhängigen Variabeln

$$(D) \qquad p_1 = f_1$$

vollständig integrirt hat, sodass die Integration der gegebenen Gleichung (A) jetzt nur noch abhängt von der vollständigen Integration der Gleichung (D).

Diese letztere wird in derselben Weise mit Hülfe einer Lösung der Gleichung

$$(E) \qquad (f_1 - p_1, \varphi) = 0$$

zurückgeführt auf eine partielle Differentialgleichung mit nur noch $n-2$ Variabeln u. s. f.

Kennt man aber zufällig nicht bloss eine, sondern alle Lösungen der Gleichung (E), so ist es ganz überflüssig, die Reduction noch weiter zu treiben. Denn mit der Auffindung aller Lösungen von (E) ist nach der Cauchy'schen Methode die Gleichung (D) und nach dem Obigen also auch die gegebene (A) vollständig integrirt.

Will man dagegen zur simultanen Integration der beiden Gleichungen (C) die Jacobi'sche Methode anwenden, so muss man zunächst eine gemeinsame Lösung φ des Jacobi'schen Systems suchen:

$$(f_1 - p_1, \varphi) = 0, \quad (f_2 - y_2, \varphi) = 0.$$

Dies geschieht in der Weise, dass man mit einer beliebigen Lösung der Gleichung (E) successive die Ausdrücke bildet:

$$\varphi' = (f_2 - y_2, \varphi), \quad \varphi'' = (f_2 - y_2, \varphi'), \cdots$$

Jeder derselben ist selbst wieder eine Lösung von (E), und es ist in der Jacobi'schen Methode der ungünstigste Fall, d. h. derjenige, welcher die höchsten Integrationen erfordert, wenn man hierdurch nach und nach alle Lösungen der Gleichung (E) erhält. Damit ist aber nach dem Vorhergehenden die vollständige Lösung der Gleichung (D) gewonnen und das ganze Problem gelöst.

Man sieht also, dass dieser ungünstigste Fall bei der angegebenen Combination der Integrationsmethoden von Lie, Jacobi und Cauchy grade umgekehrt in den allergünstigsten verwandelt wird, und es ist klar, dass dies Verfahren auch dann Vortheil

gewähren kann, wenn man durch die Jacobi'sche Methode zwar nicht alle, aber doch eine hinlänglich grosse Anzahl von Lösungen der Gleichung (E) erhält.

Bei der Integrationsmethode, welche in 2) auseinandergesetzt wird, zeigt sich die Gunst oder Ungunst der Fälle nicht in der geringeren oder grösseren Anzahl von erforderlichen Integrationen, sondern nur darin, dass bald kürzere, bald längere algebraische Operationen auszuführen sind. Lie weist aber nach, dass auch hier das ganze Integrationsgeschäft beendet ist, sobald irgendwo der scheinbar ungünstigste Fall eintritt, dass man, statt einer einzigen, alle gemeinsamen Lösungen der in Betracht kommenden linearen Gleichungen erhält. Dies lässt sich nicht mehr unmittelbar der Cauchy'schen Methode entnehmen: es wird aber sofort klar gemacht durch die Entdeckung, dass diese letztere Methode zur Integration einer partiellen Differentialgleichung eine directe Ausdehnung gestattet auf die simultane Integration mehrerer partieller Differentialgleichungen. Wenn nämlich $F_1 \cdots F_{m-1}$ solche gegebene Functionen von $q_1 \cdots q_n, p_m \cdots p_n$ sind, zwischen denen die Identitäten

$$(F_i - p_i, \; F_k - p_k) = 0$$

bestehen, so lässt sich die simultane Integration der $m-1$ partiellen Differentialgleichungen

$$p_1 = F_1, \; \ldots \; p_{m-1} = F_{m-1}$$

zurückführen auf die Auffindung aller gemeinsamen Lösungen des Jacobi'schen Systems von $m-1$ Gleichungen:

$$(F_i - p_i, f) = 0,$$

in welchem f unabhängig von $p_1 \ldots p_{m-1}$ angenommen wird.

Da dieses Jacobi'sche System nach dem in 2) mitgetheilten Verfahren zurückgeführt werden kann auf ein System von $2(n-m+1)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen, und diese die kanonische Form besitzen, also ihrerseits wieder äquivalent sind einer partiellen Differentialgleichung mit $n-m+2$ unabhängigen Variabeln, so erkennt man, dass die angegebene Erweiterung der Cauchy'schen Methode gewissermaassen die Brücken bildet von der Methode des Aufsatzes 2) zu der von Lie. Mr.

S. LIE. Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen. Clebsch Ann. V. 145-256.

Siehe Abschn. IX. Cap. 4.

H. LAURENT. Sur le théorème de Poisson. Liouville J. (2) XVII. 422-426.

Siehe Abschn. X. Cap. 4. A.

E. COMBESCURE. Sur un système particulier d'équations aux différences partielles. C. R. LXXIV. 977-980.

Es ist jener alte, wohlbekannte Satz Jacobi's, durch den nan erfährt, welches System partieller Differentialgleichungen lurch m Gleichungen zwischen den Lösungen der Charakteristik

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\dots X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$$

integrirt wird (Vgl. Crelle J. II. 321, XXIII. 80, XXIX. 247), der hier der Pariser Academie als eine ganz neue Entdeckung vorgeführt wird. Wie der Satz selbst, so ist auch die Ableitung nicht neu, vielmehr nur eine andere und nicht gerade einfachere Form des Beweises, den Jacobi in Crelle J. II. giebt.

Mr.

E. COMBESCURE. Sur un procédé d'intégration, par approximations successives, d'une certaine équation de la plasticodynamique. C. R. LXXIV. 1041-1044.

Siehe Abschn. X. Cap. 4. A.

E. COMBESCURE. Remarques sur un mémoire de Legendre. C. R. LXXIV. 798-802.

Beschäftigt sich hauptsächlich mit der Begründung einiger allgemeiner Angaben Legendre's (l'Académ. des sciences 1787, vergl. auch Imschenetsky, Grunert Arch. LIV p. 269, siehe das Referat p. 156) über lineare partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Mr.

J. Boussinesq. Sur un changement de variables qui rend intégrable certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. C. R. LXXIV. 730-733.

J. A. Serret. Observations relatives à une note de M. Boussinesq. C. R. LXXIV. 769-770.

Die Note von Boussinesq giebt ein Verfahren an, um die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2S\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}+Lz=0$$

durch Einführung neuer unabhängiger Variabeln auf die Form zu bringen:

$$2W\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+U\frac{\partial z}{\partial u}+V\frac{\partial z}{\partial v}+Lz=0.$$

Wie Serret bemerkt, ist jedoch diese Methode nicht neu, vielmehr, und zwar allgemein für die linearen Gleichungen zweiter Ordnung, schon in dem grossen Lehrbuche von Lacroix auseinandergesetzt.

Imschenetsky giebt in Grunert Arch. LIV. 268. diese allgemeine Reduction. Mr.

M. Lévy. Mémoire sur la théorie des équations aux différences partielles du second ordre à deux variables indépendantes. C. R. LXXV. 1094-1098.

Der Verfasser hat die Aufgabe gelöst, alle Integrale einer partiellen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit 2 unabhängigen Variablen zu finden, welche vermittelst Integrationen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erhalten werden können. Die Resultate der Untersuchung werden ohne Beweis mitgetheilt. Das wichtigste Theorem lautet:

Die allgemeinen Integrale, die auf gedachtem Wege erhalten werden können, sind diejenigen, in welchen die willkürlichen Functionen in Bezug auf die eine der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (nach Ampère's Bezeichnung) unter keinem Integrationszeichen auftreten, während die willkürlichen

Functionen in Bezug auf die andere Charakteristik in beliebiger Form auftreten können, und umgekehrt, wenn eine partielle Differentialgleichung ein Integral von einer solchen Form zulässt, dann lässt sich ihre Integration auf die von k Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen, und zwar ist stets $k = 3$.

Es folgen hierauf noch Theoreme über die Gestalt, in welcher die allgemeinen Integrale der erwähnten Beschaffenheit, sowie die allgemeinen Integrale erster Klasse (nach Ampère's Bezeichnung) unter gewissen Bedingungen sich darstellen lassen.

Hr.

I. Graindorge. Mémoire sur l'intégration des équations de la mécanique. Bruxelles, Hayez. 1871.

Die Arbeit enthält ein kurzes und im Allgemeinen sehr klares Résumé der Untersuchungen über den oben genannten Gegenstand. Die einzelnen Capitel sind: I. Die Fundamentalgleichungen der Dynamik in der Form von Lagrange. Reduction auf die Hamilton'sche Form, wenn die Verbindungen die Zeit nicht enthalten. II. Analoge Reduction für den Fall, dass die Verbindungen auch die Zeit enthalten. III. Fundamentale Eigenschaften der Hauptfunction und der charakteristischen Function von Hamilton. IV. Relationen zwischen den Derivirten der Variabeln nach den Constanten und den Derivirten der Constanten nach den Variabeln. V. Theorem von Lagrange und Poisson. VI. Anwendungen: 1) Bewegung eines materiellen Punktes, der von einem festen Centrum nach dem Newton'schen Gesetze angezogen wird. 2) Rotation eines festen Körpers um einen festen Punkt. 3) Bewegung eines Punktes, der von zwei festen Centren nach dem Newton'schen Gesetz angezogen wird, falls der Punkt stets in einer durch die beiden Centren gelegten Ebene bleibt.) Berechnung der Bahnelemente eines Planeten, wenn derselbe llein von der Sonne angezogen wird. VII — VIII. Methode von ertrand und Bour zur Integration der Gleichungen der Dynamik.

Mn. (Wn.)

J. Graindorge. Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres. Mém. d. l. S. R. de Liège. (2) V.

Der erste Theil enthält die Theorie der Gleichungen erster Ordnung. I. Verschiedene Arten von Integralen. II. Lineare Gleichungen. III-IV. Darstellung der nova methodus von Jacobi. VIII. Ausdehnung von Bour auf simultane Gleichungen. Der Verfasser lässt sowohl die vor-Jacobi'schen Arbeiten unberücksichtigt, als auch die Erweiterungen, die nach Bour in den Arbeiten von Boole, Weiler, Clebsch, Mayer etc. enthalten sind.

Der zweite Theil enthält die Theorie der Gleichungen zweiter Ordnung. I-III. Definitionen und Untersuchungen von Monge, Euler, Laplace, Imschenetzky und Legendre in Bezug auf lineare Gleichungen. Der Verfasser behandelt sehr elegant einige besondere Fälle, die in den allgemeinen Methoden von Monge nicht enthalten sind. IV-VIII. Untersuchung der Gleichungen von der Form:

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0$$

und der Gleichungen, die sich nach den Methoden von Ampère, Imschenetzky, Boole und Morgan darauf reduciren. IX. Transformation von Legendre und Methode von Ampère für Gleichungen zweiter Ordnung von anderer Form. Der Verfasser hätte die Entwickelung des grössten Theiles der Untersuchungen über Gleichungen zweiter Ordnung vereinfachen können, wenn er die Arbeiten von Darboux berücksichtigt, und wenn er dieselben geometrisch interpretirt hätte, wie P. du Bois-Reymond in seinen Beiträgen.

Mn. (Wn.)

J. Graindorge. Note sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Liouville J. (2) XVII. 426-432.

Bei der Monge'schen Methode für die Integration der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$Rr+Ss+Tt=U,$$

wird in den Fällen

$$1)\ R = 0, \qquad 2)\ T = 0, \qquad 3)\ R = 0, \quad T = 0,$$

lie zweite der Gleichungen

$$dy - m dx = 0, \qquad R m dp + T dq - U m dx = 0,$$

wo m Wurzel der Gleichung

$$Rm^2 - Sm + T = 0$$

st, für die Wurzel $m = 0$ und $m = \infty$ illusorisch.

Diese Schwierigkeit wird in folgender Weise vermieden:

$$1)\ R = 0,\ \text{dann}\ m_1 = \frac{T}{S},\ m_2 = \infty,\ \lim m_2 R = S,$$

las m_2 entsprechende Gleichungssystem wird also

$$dx = 0, \quad Sdp + Tdq - Udy = 0;$$

$$2)\ T = 0,\ \text{dann}\ m_1 = \frac{S}{R},\ m_2 = 0,\ \lim \frac{T}{m_2} = S,$$

ınd das m_2 entsprechende System wird

$$dy = 0, \quad Rdp + Sdq - Udx = 0;$$

$$3)\ R = 0,\ T = 0,\ \text{dann}\ m_1 = 0, m_2 = \infty,$$

ınd die beiden Systeme werden:

$$dx = 0,\ Sdp - Udy = 0; \quad dy = 0,\ Sdq - Udx = 0.$$

Es folgt eine Anwendung auf die Gleichung

$$pqr - (1 + p^2) s = 0,$$

wobei jedoch nur von der Integration des einen der Gleichungssysteme Gebrauch gemacht wird, was bekanntlich in allen Fällen ausreicht. Hr.

ORLOFF. Sur les équations différentielles réciproques. Bull. de Belg. XXXIII. 113-122.

P. GILBERT. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XXXIV. 105-106.

Siehe Abschn. VI. Cap. 5. p. 154.

E. MATTHIEU. Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles de la physique mathématique. Liouville J. (2) XVII. 249-323.

Der Verfasser hat in einer früheren Arbeit (cfr. F. d. M. II.

p. 750) die Methoden der Potentialtheorie ausgedehnt auf die Gleichung $\triangle(\triangle u) = 0$, unter $\triangle u$ den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

verstanden, und für die Lösungen dieser Gleichung analoge Sätze aufgestellt, wie für das Potential. Die gegenwärtige Arbeit, von der einige Resultate bereits in einem vorläufigen Bericht im vorigen Jahrgang p. 172 besprochen sind, dehnt jene Methoden und Sätze auf einige andere in der mathematischen Physik vorkommende Differentialgleichungen aus, nämlich auf die Gleichungen

$$\triangle u = -a^2 u, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \triangle u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \triangle u.$$

Aus der Potentialtheorie ist bekannt, dass man stets die Oberfläche eines Körpers so mit Masse belegen kann, dass das Potential dieser Masse im Innern der Gleichung $\triangle u = 0$ und den Stetigkeitsbedingungen genügt, und an der Oberfläche einen gegebenen Werth annimmt. Daraus schliesst man dann, dass das allgemeinste Integral, welches der Gleichung $\triangle u = 0$ innerhalb des von der Fläche σ begrenzten Raumes genügt, ist:

$$1) \qquad u = \int \frac{\varrho}{r}\, d\sigma.$$

Hier, wie im Folgenden, ist r der Abstand eines Punktes $x\,y\,z$ im Innern von σ von einem Punkte x_1, y_1, z_1, der auf dem Element $d\sigma$ liegt, ϱ eine willkürliche Function von x_1, y_1, z_1. Die Integration ist über die ganze Fläche σ auszudehnen.

Die Gleichung $\triangle u = -a^2 u$ lässt sich nun in ganz derselben Weise behandeln; ihr allgemeines Integral ist:

$$2) \qquad u = \int \frac{\cos(ar)}{r}\, \varrho\, d\sigma.$$

Betrachtet man nämlich das dreifache Integral

$$V = \int \frac{\cos(ar)}{r}\, D\, d\Pi,$$

wo $d\Pi$ ein Raumelement ist, dessen Masse $D\,d\Pi$, so genügt V für Punkte ausserhalb der Masse der Gleichung

$$\triangle V + a^2 V = 0,$$

während für Punkte der Masse

$$\Delta V + a^2 V = -4\pi D$$

st. Ausserdem ist V und seine ersten Differentialquotienten sowohl innerhalb, als ausserhalb der Masse stetig. Das Integral V lässt sich nun in ganz derselben Weise behandeln, wie das Potential. Es gilt, wie beim Potential, der Satz, dass man jede ertheilung der Massen durch eine Oberflächenbelegung ersetzen ann, und daraus folgt die obige Behauptung. Bemerkt mag erden, dass das Integral

$$V_1 = \int \frac{\sin(ar)}{r} D d\Pi$$

owohl für Punkte innerhalb, als ausserhalb der Masse der leichung

$$\Delta V_1 + a^2 V_1 = 0$$

enügt.

Wie für den Raum durch ein Flächenintegral, so lässt sich ür die Ebene die allgemeine Lösung der Gleichung $\Delta u = -a^2 u$ durch ein Randintegral darstellen. Dies Randintegral ist, wenn ds ein Element des Randes, ϱ eine willkürliche Function, r die Entfernung eines Randpunktes von einem Punkte im Innern bezeichnet:

$$2^a) \quad u = \int N \cdot \varrho \cdot ds, \quad N = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega.$$

In einigen Fällen, wo s eine einfache geschlossene Linie bildet, kann man statt des Ausdrucks 2^a) den einfacheren nehmen:

$$2^b) \quad u = \int M \cdot \varrho \cdot ds, \quad M = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\, d\omega.$$

Aus den Ausdrücken 2^a) und 2^b) leitet nun der Verfasser einige Specialfälle Reihenentwickelungen der bestimmten Integrale M und N, sowie der Lösungen u selbst ab. Diese Fälle 1 die, wo die Fläche ein Kreis, eine Ellipse, ein von zwei centrischen Kreisen oder von zwei confocalen Ellipsen benzter Ring ist. Bei der Kreisbegrenzung wird die Distanz r ch Polarcoordinaten ausgedrückt und M, N, u in Reihen entkelt, die nach Sinus und Cosinus der Vielfachen des Winkels schreiten, und deren Coefficienten Potenzreihen des Radius

vector sind. Bei elliptischer Begrenzung wird r durch elliptische Coordinaten ausgedrückt mittelst der bekannten Substitution

$$x = c\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cos\alpha,\ y = c\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\sin\alpha.$$

Die Reihe für u schreitet fort nach Functionen von α, welche der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2}+(R-2h^2\cos 2\alpha)\,P = 0$$

genügen, wo R und h Constante sind. Aehnliche Entwickelungen hat der Verfasser bereits in einer früheren Arbeit über die Schwingungen einer elliptischen Membrane gegeben (cf. F. d. M. I. p. 354). Für die einfache Kreis- und Ellipsenfläche giebt der Ausdruck 2^b) schon die allgemeine Lösung, während man für eine ringförmige Fläche den Ausdruck 2^a) nehmen muss.

In derselben Weise wird dann der Ausdruck 2) für u für den Fall einer Kugel nach Kugelfunctionen entwickelt.

Weiter behandelt der Verfasser die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u.$$

Ihre allgemeine Lösung für einen von der Fläche σ begrenzten Raum ist:

$$3)\qquad u = \int\frac{f(r+at,\,\theta,\psi)+F(r-at,\,\theta,\psi)}{r}\,d\sigma,$$

worin f und F willkürliche Functionen sind, θ und ψ die Coordinaten eines Punktes der Oberfläche; r und σ haben dieselbe Bedeutung wie in 1). Für den Fall der Ebene, wo Δ nur zweigliedrig, ist die allgemeine Lösung für das Innere einer Curve s:

$$3^a)\qquad u = \int\psi(r,t,v)\,ds,$$

$$\psi(r,t,v) = \int_0^{\pi} F(r\cos\omega+at,\,v)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega.$$

Hier ist $F(r,v)$ eine willkürliche Function von r und v, v eine Coordinate, die einen Punkt des Randes bestimmt. Der Beweis, dass die angeführten Lösungen, die man leicht verificiren kann, auch die allgemeinsten sind, wird hier so geführt, dass aus den Ausdrücken 3) und 3^a) Reihenentwickelungen für Special-

ille abgeleitet werden, aus 3) für Kugel und Kugelschale, aus ^{a}) für Kreis und Ellipse, und von diesen Reihenentwickelungen ird gezeigt, dass sie die nöthige Allgemeinheit haben. Der Beeis, dass 3) und 3^{a}) für alle Fälle die allgemeinsten Lösungen ind, ist somit nicht streng geführt.

Auf dieselbe Weise, wie bei 3) wird das allgemeine Integral er Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

geleitet. Es ist für den Raum:

$$4) \qquad u = \int \varphi\,(r, t, \theta, \psi)\,d\sigma,$$

$$\varphi\,(r, t, \theta, \psi) = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} f(r + 2as\sqrt{t}, \theta, \psi)\,ds.$$

Für den Fall zweier Dimensionen ist hier:

$$4^{a}) \qquad u = \int \psi\,(r, t, v)\,ds,$$

$$(r, t, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{\pi} F(r \cos\omega + 2a\alpha\sqrt{t}, v) \log(r \sin^2\omega)\,d\omega e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$

ie Buchstaben haben dieselbe Bedeutung, wie oben.

Zum Schluss wird bemerkt, dass die Resultate der Arbeit ch sofort auf den Fall ausdehnen lassen, dass man statt des usdrucks Δu den allgemeineren

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

it. Man hat dann nur statt

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

ı setzen

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{x - x_1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y - y_1}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z - z_1}{\gamma}\right)^2}$$

fr. F. d. M. II. p. 749, 752). Wn.

Capitel 7.

Variationsrechnung.

R. Lipschitz. Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung. Borchardt J. LXXIV. 116-150.

Es wird dem Hamilton'schen Variationsproblem ein allgemeineres substituirt, in welchem, unter Abstraction von den thatsächlichen Bedingungen des reellen Raumes, das Element einer Linie gleich der p^{ten} Wurzel aus einer beliebigen wesentlich positiven Form des p^{ten} Grades von den Differentialen der Coordinaten des betreffenden Punktes gesetzt, und dieser Hypothese gemäss die lebendige Kraft eines materiellen Punktes durch das Product der Masse mit der p^{ten} Potenz des Linearelements dividirt, durch die p^{te} Potenz des Zeitelements dargestellt wird. Für den Fall, dass Bedingungsgleichungen gegeben sind, die nicht von der Zeit abhängen, werden hier ebenfalls independente Variable eingeführt. Seien dieselben $x_1, x_2 \dots x_n$ und $f(dx)$ eine homogene Function p^{ten} Grades von $dx_1 \dots dx_n$, deren Coefficienten von den x beliebig abhängen, und es stelle $f\frac{(dx)}{dt^p} = f(x')$ den p^{ten} Theil der Summe der lebendigen Kräfte, U die Kraftfunction vor, dann wird das zu variirende Integral:

$$\theta = \int_{t_0}^{t} (f(x') + U)\, dt,$$

das entsprechende (isoperimetrische) System von n Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \frac{d\,\dfrac{\partial f(x')}{\partial x'_\alpha}}{dt} - \frac{\partial f(x')}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} = 0$$

und ein Integral derselben

$$(p-1)\, f(x') - U = H = \text{const.},$$

welches für $p = 2$ in das Integral der lebendigen Kraft übergeht. Endlich ergiebt sich:

$$\delta Q = -H\delta t + \sum_\alpha \frac{\partial f(x')}{\partial x'_\alpha}\, \delta x_\alpha - \sum_\alpha \frac{\partial f_0\,[x'(0)]}{\partial x'_\alpha(0)}\, \delta x_\alpha(0).$$

Diesem Variationsproblem ordnet der Verfasser die Variation des Integrals

$$R = \int_{t_0}^{t} [F(x')]^{\frac{1}{p}} dt$$

zu, worin

$$F(x') = \left(\frac{p(U+H)}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} pf(x')$$

gesetzt ist mit der Bestimmung, dass, falls U constant ist,

$$\frac{p(U+H)}{p-1} = \frac{p(U_0+H)}{p-1} = 1$$

sein soll. Für $p = 2$ geht R in die Form über, welche Jacobi dem Integral der kleinsten Wirkung (p. 43 der Vorlesungen über Dynamik) gegeben hat. Da $F(x')^{\frac{1}{p}}$ vom ersten Grade in Beziehung auf die x'_α ist, so ist R nicht von t abhängig und in dem System der n Differentialgleichungen, welche das Variationsproblem von R ergiebt, und deren Reduction auf das System (1) entwickelt wird, ist eine die Folge der $n-1$ übrigen. Als reine Function der x_α und $x_\alpha(0)$ aufgefasst, stellt R für $p = 2$ die „characteristische Function" Hamilton's dar, und man hat:

$$\delta R = \sum_\alpha \frac{\partial [F(x')]^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_\alpha} \delta x_\alpha - \sum_\alpha \frac{\partial (F_0[x'(0)])^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_\alpha(0)} \delta x_\alpha(0).$$

Aus den n Gleichungen

$$\frac{\partial R}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial [F(x')]^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_\alpha},$$

in welchen, da der Ausdruck auf der rechten Seite von der Ordnung Null ist, nur die $n-1$ Verhältnisse der x' auftreten, ergiebt sich durch Elimination derselben eine partielle Differentialgleichung für R (für $p = 2$ die bekannte Hamilton'sche), von welcher der Verfasser zeigt, dass sie als eine Transformationsrelation der Form $F(dx)$ aufgefasst werden kann, analog einer Relation, welche Gauss in Art. 22 der disquisitiones generales circa superficies curvas bei dem Problem der kürzesten Linie auf einer Oberfläche gegeben hat. Der betreffende Satz lautet: Wenn die Form $F(dx)$ durch ein System von neuen Variablen $y_1, y_2, \dots y_n$ in

eine Form $G(dy)$ übergeht, worin der Coefficient von dy_1^p gleich 1 und die von $dy_1^{p-1} \cdot dy_2$, $dy_1^{p-1} dy_3, \cdots dy_1^{p-1} dy_n$ gleich Null sind, so genügt y_1 der partiellen Differentialgleichung für R und vice versa; ferner wird das System der Differentialgleichungen des Variationsproblems von R durch das Constantsetzen der $n-1$ Functionen $y_2, y_3, \cdots y_n$ integrirt. Vermittelst dieses Satzes wird alsdann dargethan, dass das Jacobi'sche Verfahren, wonach man aus einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung durch Ableitung nach den Constanten die vollständige Integration des zugeordneten Systems von Differentialgleichungen erhält, auch für das allgemeinere Variationsproblem gültig bleibt.

Schliesslich wird ein Resultat abgeleitet, das sich auf die Contouren der Endpunkte aller Bahnen bezieht, welche von sämmtlichen Punkten einer willkürlich gegebenen Anfangscontour in dieser normal (in Beziehung auf die Form $pf(dx)$ den Differentialgleichungen der Bewegung gemäss) beschrieben werden. Werden die Bahnen so weit fortgeführt, dass das Integral R in allen einen gleichen Werth hat, dann wird auch die Endcontour von den Bahnen rechtwinklig geschnitten. Dieser, eine Erweiterung des Gauss'schen Theorems über die kürzesten Linien enthaltende Satz findet sich übrigens, soweit er das Gebiet der reellen Mechanik betrifft, im Wesentlichen bereits in der „theoretischen Physik“ von Thomson und Tait Bd. I. §§ 323 u. 324, wo die mechanische Bedeutung der allgemeinen Lösung der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung erörtert wird.

Wir erwähnen noch mit dem Verfasser, dass Herr Beltrami für die Geometrie ähnliche Resultate gefunden hat, welche in einer 1869 in den Mem. di Bologna erschienenen Abhandlung veröffentlicht sind. (Siehe F. d. M. I. 196).

Hr.

C. W. Borchardt. Ueber das Ellipsoid von kleinstem Volumen bei gegebenem Flächeninhalt einer Anzahl von Centralschnitten. Berl. Monatsber. 1872. 505-515.

Siehe Abschn. IX. Cap. 3. C.

M. U. WILKINSON. Two problems in the calculus of variations. Messenger (2) I. 175-177.

Es werden in dieser Arbeit zwei Sätze discutirt, deren erster veranschaulicht, wie für die Probleme der Variationsrechnung sehr selten eine einfache continuirliche Lösung existirt. Der zweite giebt eine Methode, um die grössten Maxima und die kleinsten Minima einer grossen Klasse von Integralen zu finden.

Glr. (O.)

J. CHALLIS. On the solution of three problems in the calculus of variation in reply to Mr. Todhunter. Phil. Mag. 1872.

Es handelt sich hier um folgende Probleme. Man soll zwischen zwei durch gegebene Punkte der Abscissenaxe gehende Ordinaten eine Curve so zeichnen, dass die durch die Abscissenaxe, die beiden Ordinaten und die Curve begrenzte Figur einen gegebenen Umfang und den grössten Inhalt hat, wenn 1) beide Ordinaten, 2) nur eine derselben und 3) keine von beiden von gegebener Länge sind.

Csy. (M.)

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

O. Hesse. Die vier Species. Leipzig. Teubner.

Es tritt in neuerer Zeit in vielen Lehrbüchern der elementaren Arithmetik das Bestreben hervor, die Definitionen der Grundoperationen so allgemein zu fassen, dass sie alle möglichen Fälle und Erweiterungen mit in sich begreifen. Abgesehen davon, dass so die Definitionen für Schüler unverständlich werden, wird dadurch der Uebelstand hervorgerufen, dass man Manches zu beweisen sucht, was seiner Natur nach nicht beweisbar ist. Gegen dieses Bestreben richtet sich das vorliegende Heft, indem es auf den naturgemässen Gang der historischen Entwickelung zurückgreift. Es möge hier an dem Beispiel der Multiplication negativer Zahlen die Idee des Verfassers erläutert werden. Das Product zweier ganzer positiver Zahlen wird definirt als Summe, und daraus wird der Satz von Vertauschung der Factoren abgeleitet. Nach der Definition hat auch ein Product, dessen Multiplicandus eine negative ganze Zahl ist, einen unzweifelhaften Sinn. Ein Product jedoch, dessen Multiplicator oder dessen beide Factoren negative ganze Zahlen sind, hat keinen Sinn. Man hat nun die Wahl, entweder ein solches Product ganz zu ver-

erfen oder ihm einen ganz bestimmten Sinn unterzulegen; und letzteren Falle kann man etwas ganz Beliebiges unter jenem roducte verstehen. Es wird sich aber empfehlen, dem Producte ne solche Bedeutung zu geben, dass der Satz der Vertauschung er Factoren bestehen bleibt.

Das Product zweier Zahlen ist daher so zu definiren: Es st das Product ihrer Zahlenwerthe. Dieses Product hat das ositive Zeichen, wenn die Factoren gleiche Vorzeichen haben; s hat das negative Vorzeichen, wenn die Factoren entgegen-esetzte Zeichen haben.

In ähnlicher Weise sind die Grundoperationen an positiven ıd negativen, ganzen und gebrochenen Zahlen durchgeführt. ım Schluss sind auch die Operationen an irrationalen und com-exen Zahlen etwas kurz behandelt. Dem Referenten erscheint r Hinweis darauf, was in der ursprünglichen Definition liegt, ie viel Neues und Willkürliches bei jeder Erweiterung hinzu-ommt, für den Unterricht in der Arithmetik sehr beherzigens-erth. Wn.

W. SPOTTISWOODE. Remarks on some recent generalisations of algebra. Proc. of L. M. S. IV. 147-164.

Die Grössen, die in dieser verallgemeinerten Algebra auftreten, werden „höhere complexe Zahlen“ genannt und können definirt werden als lineare Functionen von Einheiten der Form $\alpha + i_1 \beta + i_2 \gamma + \cdots$, wo $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ entweder reelle Zahlen oder gewöhnliche complexe Zahlen von der Form $a + ib$ und $i_1, i_2, \cdots$ die neuen Einheiten sind. In allen hier besprochenen Systemen wird angenommen, dass für die Addition die commutativen und associativen Principien gelten, mit andern Worten, dass die Addition und Subtraction der Einheiten und ihrer Combinationen, wie in der gewöhnlichen Arithmetik oder Algebra vor sich geht. In dem Process der Multiplication, d. h. in den Gesetzen, denen die Multiplication von Einheiten folgt, liegt also die Verschiedenheit der Systeme complexer Zahlen.

In der Mehrzahl der Systeme (ausgenommen die in Scheffler's „Situationscalcul“ 1851 und in Kirkman's und

Cayley's „Pluquaternions", Phil. Mag. Dec. 48 und March. 4[illegible] werden die distributiven und associativen Principien adoptir Auf dieser Grundlage kann nun eine Verschiedenheit der Mult plicationsgesetze aufgestellt werden. Die folgenden umfass die, welche jetzt hauptsächlich in Gebrauch sind:

1) Die commutativen Principien können adoptirt werden, dass $i_1 i_2 = i_2 i_1$, und der wirkliche Werth eines solchen Pr ductes kann dann der Gegenstand irgend einer andern willkl lichen Voraussetzung sein. Solch eine Algebra kann commuta genannt werden.

2) Wenn das commutative Princip aufgehoben wird, ka die folgende Relation adoptirt werden: $i_1 i_2 = -i_2 i_1$, was „alternatives Princip" bezeichnet werden kann. Grössen, d aus solchen Einheiten bestehen, werden von Grassmann u Hankel bezeichnet als „alternative Zahlen."

3) In Verbindung mit 1) und 2) oder unabhängig von eine von diesen kann vorausgesetzt werden, dass das Product vo irgend zwei Einheiten ausgedrückt werden kann als linea Function einiger oder aller, also:

$$i_1 i_2 = \alpha + i_1 \beta + i_2 \gamma + \cdots$$

Ein specieller Fall davon ist der, welcher in den Quate nionen eintritt, d. h. $jk = i$, $ki = j$, $ij = k$: diese Algebra ka „lineare Algebra" genannt werden. Die von Peirce aufgestellt Systeme gehören zu dieser Art, und sind desshalb, da sie a das associative Princip enthalten, von ihm als „lineare assoc tive Algebra" bezeichnet worden.

4) Endlich kann angenommen werden, dass ein Product i jedem seiner Factoren verschwinden oder nicht verschwind soll. Einige der aus diesen Annahmen folgenden Consequen werden in der Arbeit discutirt, und namentlich Grassmann's u Hankel's alternative Zahlen betrachtet. Cly. (O.)

E. Kossak. Die Elemente der Arithmetik. Pr Berlin.

Diese Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte. Der e enthält eine historische Uebersicht der Entwickelung der gemeinen Arithmetik, der zweite eine kurze Darstellung

Elemente derselben, welcher die Behandlung desselben Gegenstandes zum Grunde liegt, die Hr. Weierstrass als Einleitung seiner Vorlesungen über die Theorie der analytischen Functionen zu geben pflegt. Hieraus sind besonders folgende zwei Punkte hervorzuheben.

1) Die Existenz der irrationalen Zahlen erscheint nicht als rein formale Forderung, sondern ist gegründet auf die Definition derselben als Zusammensetzungen aus unendlich vielen Elementen d. i. Einheiten und genauen Theilen der Einheit. Dabei kommt es nur darauf an, die Endlichkeit eines solchen Aggregates festzustellen. Dann folgt unmittelbar, was unter zwei gleichen Zahlen aus einem Grundelemente, was unter der grösseren von zwei solchen Zahlen zu verstehen sei. Hierdurch ist eine völlig sichere Grundlage gewonnen zur Aufstellung der Fundamentaloperationen für beliebige Zahlen aus einer Einheit.

2) Complexe Zahlen sind aus mehreren linear-unabhängigen Einheiten gebildet. Es wird gezeigt, wie die Multiplication von solchen Zahlen zu definiren sei, damit alle formalen Gesetze, die bei der Multiplication von ganzen Zahlen auftreten, erfüllt seien. Dazu kommt aber noch die Forderung, dass auch die Division stets möglich sei, den einzigen Fall ausgenommen, dass der Divisor Null sei — oder mit anderen Worten: dass ein Product nur mit jedem seiner Factoren verschwinden könne. Die vorliegende Abhandlung bringt nun den Nachweis, dass dieser Forderung durch Zahlensysteme aus zwei Einheiten Genüge geleistet werden könne, während dieselbe in jedem Zahlensysteme aus drei Einheiten unerfüllbar bleibt. St.

E. Heine. Die Elemente der Functionenlehre. Borchardt J. LXXIV. 172-188.

Der Herr Verfasser beabsichtigt, gewisse elementare Sätze, auf denen Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen die Functionentheorie aufbaut, die aber bisher von diesem selbst noch nicht veröffentlicht worden sind, hier im Zusammenhange zu entwickeln. Diese wichtigen Fundamentalsätze gelten für die von Hrn. Heine im ersten Abschnitt zu Grunde gelegte Definition der irrationalen

Zahlen. In diesem Abschnitte geht der Herr Verfasser aus von dem Begriff der Zahlenreihe: „Zahlenreihe heisst eine Reihe von Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n, \cdots$, wenn für jede noch so klein gegebene von Null verschiedene Zahl η ein Werth n existirt, der bewirkt, dass $a_n - a_{n+\nu}$ für alle ganzen positiven ν unter η liegt.“ Die Zahl wird nicht begrifflich definirt, die irrationalen Zahlen werden nicht etwa als Grenzen eingeführt (deren Existenz eine Voraussetzung wäre), sondern die Definition der Zahl ist eine rein formale, indem „gewisse greifbare Zeichen“ Zahlen genannt werden. Diese Zahlzeichen müssen so gewählt werden, dass die Definition der Rechnungsoperationen — auf welche es hier hauptsächlich ankommt — ermöglicht wird. Da z. B. die Zahlen 0, 1, 2, 3... in vielen Fällen die Subtraction unmöglich machen, so müssen neue Zeichen oder Zahlen eingeführt werden, und es muss die Definition der Operationen so erweitert werden, dass das Resultat dasselbe bleibt, wie bei der früheren Rechnungsoperation. Ferner veranlasst die Unmöglichkeit der Division zweier Zahlen in dem Falle, wo der Quotient nicht eine ganze Zahl ist, wiederum neue Zeichen, u. s. f. Den irrationalen Zahlen kommt bei dieser Definition eine wirkliche Existenz zu. Zwei Zahlen werden gleich genannt, wenn sie sich um keine noch so kleine angebbare Zahl unterscheiden. Mit dieser auf rein formalem Standpunkt gewonnenen Definition hat Herr Heine schon seit Jahren seine Vorlesungen über algebraische Analysis eingeleitet. Wie dagegen Hr. Weierstrass, der die allgemeine Theorie der complexen Zahlen zum Abschluss geführt hat, die Rechnungsoperationen für die im engeren Sinne complexen Zahlen streng begründet, hat inzwischen Herr Kossak ausführlich und im engen Anschluss an die Vorlesungen des Herrn Weierstrass über analytische Functionen gezeigt (Elemente der Arithmetik, siehe das vorige Referat).

Im zweiten Abschnitt der vorliegenden Arbeit: „Ueber Functionen“ definirt Herr Heine zunächst die einwerthige Function und beweist die beiden Sätze: „Jede ganze Potenz von x ist eine einwerthige Function“, und „Es sind $\sin x$ und $\cos x$ Functionen von x“ (§ 1). Der § 2 handelt von den Bedingungen der

ɔntinuität einer Function $f(x)$ bei einem bestimmten einzelnen 'erthe $x = X$, und der § 3 von den Eigenschaften continuir- ɔher Functionen. Hier werden nach den Principien des Herrn 'eierstrass folgende 6 Lehrsätze bewiesen: 1) Jede ganze otenz von x ist zwischen irgend welchen gegebenen Grenzen ɩeichmässig continuirlich, d. h. für jede noch so kleine gegebene rösse ε existirt eine solche positive Grösse η_0, dass für alle ɔsitiven η, die kleiner als η_0 sind, $f(x \pm \eta) - f(x)$ unter ε bleibt; ı Besitzt eine (für jedes einzelne x) von a bis b continuirliche unction $f(x)$ für zwei zwischen a und b liegende Zahlen $x = x_1$ ıd $x = x_2$ entgegengesetzte Vorzeichen, so verschwindet sie ır einen dazwischen liegenden Werth von x; 3) Eine Function (x), die von $x = a$ bis $x = b$ so beschaffen ist, dass zwischen ı zwei Zahlen x_1 und x_2, wie nahe sie auch gewählt werden, och andere liegen, für welche $f(x)$ verschiedene Zeichen be- itzt, ist discontinuirlich; 4) Wenn die (für jedes einzelne x) von $= a$ bis $x = b$ continuirliche Function $f(x)$ von $x = a$ bis $= b$ nie negativ, aber zwischen diesen Grenzen kleiner wird ls jede angebbare Grösse, so erreicht sie auch den Werth Null;) Wenn die von $x = a$ bis $x = b$ (für alle einzelnen Werthe) ɔntinuirliche Function $f(x)$ für jeden einzelnen Werth, der wischen a und einer rationalen oder irrationalen Zahl X liegt, ro $a < X < b$, wie nahe man auch X kommt, nicht positiv, über hinaus aber positiv wird, so ist $f(x) = 0$; 6) Eine von $x = a$ is $x = b$ (für alle einzelnen Werthe) continuirliche Function $f(x)$ t auch gleichmässig continuirlich. M.

. König. Ueber die Darstellung von Functionen durch unendliche Reihen. Clebsch Ann. V. 310-340.

Für die Entwickelung gegebener analytischer Functionen in 'eihen hat man bisher verschiedene specielle Methoden benutzt, : nachdem diese Entwickelungsreihen nach Potenzen, oder nach ugelfunctionen, oder nach Bessel'schen Functionen oder noch ideren fortschreiten sollten (vergl. die betreffenden Arbeiten von ›urier, Laplace, Cauchy, Puiseux, C. Neumann, Lommel, hlömilch, Thomé, Frobenius, Mehler u. a.). Herr König hat

sich nun die Aufgabe gestellt, für alle diese Entwickelungen ein gemeinsame Behandlungsweise ausfindig zu machen, und er zeig in seiner Arbeit, dass es eine allgemeine nach zwei Arten von Entwickelungsfunctionen fortschreitende Darstellung giebt, in welcher alle jene Entwickelungen als specielle Fälle enthalten sind. Der bis jetzt veröffentlichte erste Abschnitt seiner Arbeit behandelt zunächst die Darstellung analytischer Functionen einer Variabeln in endlichen Bereichen. Die allgemeine Methode ist folgende. Setzt man für zwei Reihen von Functionen

$$G_0(z),\ G_1(z),\ G_2(z), \ldots \quad \text{und} \quad F_0(z_0),\ F_1(z_0),\ F_2(z_0), \ldots$$

voraus, dass sich die G und F in der Umgebung eines Punktes c nach aufsteigenden Potenzen von $z-c$ resp. z_0-c entwickeln lassen, so ist die Function

$$(1) \qquad \varphi(z+z_0) = F_0(z_0)\cdot G_0(z) + F_1(z_0)\cdot G_1(z) + F_2(z_0)\cdot G_2(z) + \cdots$$

entwickelbar in eine Reihe, die nach den Functionen $G_0(z)$, $G_1(z), \cdots$ fortschreitet, wenn sie endlich, stetig und eindeutig ist in der Nähe des Punktes $z+z_0$. Als Beispiel dient die Taylor'sche Reihe, deren Entwickelung und Convergenzbedingung man erhält, wenn man die Glieder der Exponentialreihe einzeln mit Functionen von z_0 multiplicirt und die Bedingungen dafür aufstellt, dass diese Reihe eine Function von $z+z_0$ ist (§ 1). Die Grundlage für die weitere Untersuchung der allgemeinen Reihen (1) bildet der specielle Fall

$$G_n(z) = [\psi(z)]^n,$$

wo $\psi(z)$ in der Umgebung von $z-c$ in eine nach Potenzen von $z-c$ fortschreitende Reihe ohne constantes Glied entwickelt werden kann. Reihen von dieser Form hat bereits Bürmann aufgestellt, und während Puiseux (Liouville J. XV. Art. 18) den Fall genauer untersucht hat, dass die zu Grunde gelegte Function rational sei, wird hier die Convergenzbedingung der Reihe $F_0 + F_1\,\psi(z) + F_2\,\psi(z)^2 + \cdots$ für beliebige ψ gegeben (§ 2). Hierauf kehrt der Verfasser zur Untersuchung der Convergenz der allgemeinen Reihen $F_0\,G_0(z) + F_1\,G_1(z) + F_2\,G_2(z) + \cdots$ zurück. Das Problem, die endlichen Flächenbereiche zu bestimmen, in denen diese nach G-Functionen fortschreitende Reihe convergirt, wird durch die Betrachtung der Function

$$\operatorname{Lim} \frac{G_{n+1}(z)}{G_n(z)} = k(z)$$

ıf das des vorigen Paragraphen zurückgeführt. Ein Beispiel lcher Reihen sind die nach Bessel'schen Functionen fortschreiıden (§ 3). Um die Convergenzbereiche genauer zu umgrenzen, trachtet der Verfasser die Entwickelung einer Function

$$\varphi(\zeta, z) = R_0(z)\, G_0(\zeta) + R_1(z)\, G_1(\zeta) + R_2(z)\, G_2(\zeta) + \cdots,$$

ılche also ausser von der Variabeln ζ noch von einem Paraıter z abhängt, als nach den $R_0, R_1, R_2, \cdots$ fortschreitend, und nnt diese Functionen „die auf $\varphi(\zeta, z)$ bezogenen reciproken nctionen der G." Diese reciproken Entwickelungsfunctionen ırden für den Fall

$$\varphi(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta - z}$$

tersucht. Für dieses System reciproker Entwickelungsfunctionen ırden die Bedingungen der Entwickelbarkeit einer Function ch G-Functionen, nach R-Functionen und nach G- und R-Funcınen festgestellt. Aus ihm lässt sich eine unendliche Anzahl ıuer Systeme herleiten (§ 4). Der Verfasser wendet sich nun ır Lösung der Frage: Giebt es Bereiche der Ebene, in welchen ırschiedene Entwickelungen einer Function nach denselben ntwickelungsfunctionen gleichzeitig gelten können? und basirt uf der Bestimmung der verschiedenen Arten der Entwickelung iner Function eine Eintheilung aller Entwickelungen in Classen nd Genera. Alle Entwickelungen nämlich, die in demselben ereiche convergiren, bilden ein Genus; und die Eintheilung eses Genus in Classen wird durch die gleiche Ordnung der ullwerthe bedingt (§ 5). Zum Schlusse giebt der Verfasser lgende Anwendungen: 1) Die Entwickelung von

$$-\frac{z' - c}{(\zeta - c)(z' - c) - 1}$$

Bezug auf z' nach G-Functionen. Hierher gehören die Entckelungen nach Kugelfunctionen; 2) als Entwickelungsfunctionen ınen die Summen der n ersten Glieder der Potenzreihe

$$a_0 + a_1(\zeta - c) + a_2(\zeta - c)^2 + \cdots;$$

die Facultätenreihen; 4) die Bessel'schen Functionen; 5) die

Entwickelung endlich vieldeutiger Functionen um ihren Verzweigungspunkt a durch die Substitution

$$z - c = (x - a)^{\frac{1}{n}}$$

(§ 6). In dem folgenden Abschnitt wird H. König Functionen mehrerer Variabeln betrachten und auf den vielfachen Zusammenhang eingehen, der zwischen den Entwickelungsfunctionen beider Arten besteht, sowie Entwickelungen untersuchen, die eine auf einer Linie beliebig gegebene Function darstellen. M.

G. Darboux. Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions. Darboux Bull. III. 307-313.

Der Cauchy'sche Beweis des Satzes, dass jede algebraische Gleichung $f(z) = 0$ eine reelle oder imaginäre Wurzel hat, beruht auf dem Nachweis, dass der Modul R der Function $f(z)$ kein anderes Minimum als 0 haben kann (S. Cauchy, Cours d'Analyse de l'Éc. Pol. I[e] Partie, 1821, und Serret: Cours d'Algèbre supérieure, 1866). Dieser und alle daraus hergeleiteten Beweise, die auf der Theorie der geschlossenen Bereiche basiren, haben den Fehler, dass, wenn eine continuirliche Function zwischen zwei festen Grenzen bleibt, also nicht unter eine gewisse Grösse sinkt, sie nothwendig den Werth erreicht, welcher die untere Grenze aller ihrer möglichen Werthe angiebt. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, beweist der Herr Verfasser folgenden Satz: „Nimmt eine continuirliche Function zweier Variabeln für alle Punkte innerhalb eines geschlossenen Bereiches Werthe an, die zwischen zwei Zahlen H und K liegen, so erreicht sie nothwendig, wenigstens für ein System der beiden unabhängigen Variabeln den Werth, der die untere oder obere Grenze aller ihrer möglichen Werthe bezeichnet." — Dieser Satz ist bereits früher von Herrn Weierstrass für Functionen einer Variabeln veröffentlicht und in seinen Vorlesungen auch auf Functionen beliebig vieler Variabeln ausgedehnt worden. Auch hat ihn Herr O. Bonnet in seinen Vorlesungen mitgetheilt.

M.

A SCOLI. Dimostrazione di un teorema di Cauchy. Brioschi Ann. (2) V. 14-16.

Beweis des Satzes, dass die Differentialgleichung

$$\frac{du}{dz} = f(u,z),$$

› f in der Umgebung von $z = 0$, $u = 0$ synektisch ist, ein ıd nur ein synektisches Integral u zulässt, das für $z = 0$ verhwindet (vgl. Briot u. Bouquet Doppelt-per. Funct. p. 54 ff.).

Siehe F. d. M. III. 197. St.

I. A. SCHWARZ. Zur Integration der partiellen Differential-Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Borchardt J. LXXIV. 218-253.

Veranlasst durch die Arbeit des Herrn Prym in Borchardt's J. LXXIII. 340 (siehe F. d. M. III. 182) über die Existenz einer der Differential-Gleichung $\Delta u = 0$ genügenden Function, deren Werthe innerhalb einer einfachen Kreisfläche S, den Rand einbegriffen, endlich und stetig, längs des Randes aber gegeben sind, lässt Herr Schwarz zunächst seine denselben Gegenstand behandelnde Arbeit aus Wolf's J. XV. 113 (siehe F. d. M. II. 214) hier noch einmal abdrucken. Die dieser Arbeit hinzugefügten Anmerkungen beziehen sich zum Theil auf die verwandten Arbeiten von C. Neumann (Clebsch Ann. III. 325 und Leipz. Ber. 1870, 264; siehe F. d. M. III. 491) und betreffen die von Letzterem für die Function verlangte „gleichmässige" Stetigkeit und die Existenz der Ableitung $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ für das Innere des betrachteten Gebietes; zum Theil enthalten sie historische Notizen über andere verwandte Arbeiten von Green, Betti, Dini, Poisson, C. Neumann, Schläfli, Heine und Prym.

Es folgt eine „Fortsetzung und Erweiterung der in den vorhergehenden Paragraphen enthaltenen Betrachtungen". Nach einer Bemerkung über die Veränderung der angegebenen Formeln für den Fall eines Kreises mit dem Radius R wird die vorhergehende Untersuchung dahin erweitert, dass die Function $f(\varphi)$

nicht mehr für alle reellen Werthe von φ endlich, stetig, eindeutig und mit der Periode 2π periodisch ist, sondern dass diejenigen Werthe von φ, welche einem der Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ (die sämmtlich verschieden und $< 2\pi$) congruent mod. 2π sind, ausgenommen werden, so dass sich $f(\varphi)$ einer bestimmten endlichen Grenze nähert, wenn φ sich einem der ausgeschlossenen Werthe nähert; und die Function u^* stimmt am Rande mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten mit $f(\varphi)$ überein. Der Beweis der Gleichung

$$u^*(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u^*(1,\psi)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi$$

wird hier durchgeführt, ohne dass (wie bei Prym und C. Neumann) über die Art der Unstetigkeit der Function, beziehungsweise über deren Vieldeutigkeit bei der Annäherung an einen singulären Punkt eine specielle Annahme gemacht wird. Analog dem Früheren wird nun der Existenzbeweis geführt, und das die Function darstellende Integral in der Nähe der singulären Punkte untersucht, wo eine Stetigkeitsunterbrechung am Rande eintritt, und wo die Stetigkeit der Function u^* ungewiss ist (§ 8). Eine derartige Verallgemeinerung erlauben auch die folgenden Sätze: „Eine für alle Punkte im Innern und auf der Begrenzung eines einfachen endlichen Bereiches T endliche, stetige und eindeutige Function u, deren partielle Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

nur für alle inneren Punkte des Gebietes T endliche, stetige und eindeutige Functionen von x und y sind, und der Gleichung $\Delta u = 0$ genügen, muss für alle inneren Punkte von T null sein, wenn sie für alle Punkte der Begrenzung den Werth Null hat", und „Wenn 2 für dasselbe Gebiet T diesen Bedingungen genügende Functionen u und u_1 für alle Punkte der Begrenzung des Gebietes übereinstimmen, so stimmen sie in ihren Werthen ganz überein." Diese hier entwickelten Sätze sind einer Abhandlung über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ entnommen, die Herr Schwarz im November 1869 der

Herren Kronecker und Weierstrass mitgetheilt hat (§ 9 und § 10).

Im folgenden Paragraphen führt der Verfasser die Integration der partiellen Differentialgleichung analog dem Vorigen für den Fall eines von 2 concentrischen Kreisen begrenzten Ringgebietes durch (§ 11). Zum Schluss folgen Betrachtungen über die Entwickelbarkeit einer Function in Potenzreihen, welche den für Functionen complexen Argumentes aus dem Cauchy'schen und Laurent'schen Satze entspringenden analog sind (§ 12).

M.

G. Mittag-Leffler. Om skiljandet af rötterna till en synektisk funktion af en variabel. Stockholm.

Darstellung von Cauchy's Theorem über die Anzahl der Wurzeln einer synektischen Function innerhalb beliebiger Grenzen. Anwendungen auf die Functionen

$$x+ae^{x}+b,\quad x+ae^{x^2}+b,\quad x-a\sin x-T,\ \text{etc.}$$

Als Probe möge folgendes Beispiel dienen: Die Function $x+ae^{x}+b$, wo a und b reelle Constanten, hat unendlich viele complexe Wurzeln, alle einfach, je zwei conjugirt.

Für I. $a>0$ ist eine einzige Wurzel zwischen jedem Paare von zwei mit der Grundrichtung parallelen Geraden

$$y=\pm k\pi,\ y=\pm(k+1)\pi\ \text{— } k \text{ ungrade —}$$

gelegen. Eine ist reell.

Für II., wenn $a<0$ und

$$1)\quad b>l(-a)+1,$$

so liegt eine einzige Wurzel zwischen jedem Paare von zwei mit der Grundrichtung parallelen Geraden

$$y=\pm k\pi,\ y=\pm(k+1)\pi\ \text{— } k \text{ grade. —}$$

Keine ist reell. Wenn

$$2)\quad b=l(-a)+1,$$

so vereinigen sich zwei der obengenannten Wurzeln zu einer doppelten reellen. Wenn

$$3)\quad b<l(-a)+1,$$

so löst sich diese letztere in zwei einfache reelle Wurzeln auf, die eine grösser, die andere kleiner als $-l(-a)$. Die übrigen liegen zwischen den oben genannten Grenzen. Bg.

P. du Bois-Reymond. Théorème général concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leurs dérivées. Borchardt J. LXXIV. 294-304.

Der Kürze wegen seien die Bezeichnungen

$$f(x) \succ \varphi(x),\quad f(x) \backsim \varphi(x),\quad f(x) \prec \varphi(x)$$

gebraucht, je nachdem für $x = \infty$ der Werth des Bruches $f:$ unendlich, endlich oder Null sei. In einer früheren Abhandlung (vgl. F. d. M. III. p. 197) zeigt Herr du Bois den Satz: „Werden die Functionen $f(x)$ und v mit x unendlich, und ist

$$v^M \succ f(x) \succ v^m,$$

so ist

$$1:\frac{d\cdot lv}{dx} \backsim f(x):f'(x).\text{“}$$

Der Ausdruck $1:\frac{d\cdot lv}{dx}$ heisst „Unendlichkeits-Typus“ von $f(x)$. Nun lautet der hier bewiesene Satz folgendermassen: „Es sei t der Typus von $f(x)$. Dann hat man

1) für $t \prec x$

$$(1)\qquad f(x) \backsim tf'(x) \backsim t^2 f''(x) \backsim \cdots \text{ in inf.};$$

2) für $t \succ x$

$$f(x) \backsim \frac{f'(x)}{t^{-1}} \backsim \frac{f''(x)}{\frac{dt^{-1}}{dx}} \backsim \cdots \text{ in inf.}$$

3) Für $t \backsim x$ kann man $f(x)$ auf die Form bringen $x^\mu f_1(x)$, wo entweder f_1 oder auch $\frac{1}{f_1} \prec$ als jede noch so niedrige Potenz von x. Ist dann μ keine ganze Zahl, so bleibt der Satz (1) gültig. Ist aber μ ganze Zahl, so hat man

$$f(x) \backsim tf'(x) \backsim \cdots$$

$$\backsim t^\mu f^{(\mu)}(x) \backsim \frac{t^\mu f^{(\mu+1)}(x)}{t_1^{-1}} \backsim \frac{t^\mu f^{(\mu+2)}(x)}{\frac{dt_1^{-1}}{dx}} \backsim \cdots \text{ in inf.“}$$

)abei muss fx, sowie alle seine Ableitungen, der Bedingung ge-
ıügen, nicht unendlich viele Maxima und Minima zu besitzen.

St.

M. Marie. Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville.
Liouville J. (2) XVII. 337-347.

Mit Bezugnahme auf verschiedene Abhandlungen des Ver-
ıssers über die Theorie der Functionen mit complexen Variablen,
elche im Liouville'schen Journal in den Jahrgängen 1858—1862
·schienen sind, entwickelt die vorliegende Arbeit mehrere Eigen-
haften eines Systems zweier Punktreihen, welche dadurch
ıarakterisirt sind, dass in ihnen $\frac{dy}{dx}$ reell ist, falls y mit x durch
ine Gleichung mit complexen Coefficienten verknüpft ist, wobei
ı bemerken ist, dass der Verfasser die Lösungen $x = \alpha + \beta i$,
$y = \alpha' + \beta' i$ in reeller Weise durch $x = \alpha + \beta$, $y = \alpha' + \beta'$ dar-
tellt. Zur Erklärung dieser eigenthümlichen Interpretation, die
hne die früheren Abhandlungen des Verfassers nicht verständ-
ch ist, diene Folgendes: Sei die Gleichung

$$(1) \qquad f(x,y) = f(\alpha + \beta i, \alpha' + \beta' i) = 0.$$

ie Vorschrift, dass $\frac{dy}{dx}$ reell sei, giebt die Relation

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{d\beta'}{d\beta};$$

tzt man nun noch $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha' + \beta'$, so hat man zwischen
n 4 Grössen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, 5 Gleichungen, aus denen diese Grössen
eliminiren sind, und man erhält eine Gleichung mit reellen
›efficienten zwischen ξ und η. Die durch die letztere Gleichung
rgestellte Curve nennt der Verfasser „enveloppe imaginaire", und
e Curve, die man nach demselben Verfahren erhält, wenn für
e Coefficienten der ursprünglichen Gleichung ihre conjugirten
erthe genommen werden, heisst „enveloppe conjuguée". Das
stem beider Curven wird „enveloppe imaginaire des conjuguées"
nannt. Sind die Coefficienten der Gleichung (1) reell, dann
llen beide Curven in eine zusammen, und es wird nun gezeigt,
e diese Curve in vielen Beziehungen die reelle Curve, die

durch die Gleichung (1) gegeben ist, ergänzt, und wie im Falle, dass die Coefficienten imaginär werden, das System beider Curven die reelle Curve ersetzt. Unter Anderem wird die Periode des Integrals $\int y dx$ mit Hülfe des genannten Systems bestimmt. (Vergl. das folgende Referat.) Hr.

M. Marie. Théorie élémentaire des intégrales simples et de leurs périodes. C. R. LXXV. 524-527.

M. Marie. Théorie élémentaire des intégrales doubles et de leurs périodes. C. R. LXXV. 576-579, 614-616, 660-663.

M. Marie. Théorie élémentaire des intégrales d'ordre quelconque et de leurs périodes. C. R. LXXV. 1078-1081, 1247-1280.

Der Verfasser hat seine Theorie der doppelten und mehrfachen Integrale bereits in den Jahren 1853 und 1858 der Akademie der Wissenschaften eingereicht und im Liouville'schen Journal veröffentlicht. Dass sie bisher wenig Eingang gefunden, erklärt der Verfasser daraus, dass sie auf Betrachtungen der höheren Geometrie (eigenthümliche Interpretation des Imaginären) basirt war, womit die Analysten sich nicht befreunden mochten. Er stellt sie nun nach einer Methode dar, welche von diesen Vorstellungen abstrahirt, demungeachtet aber an Klarheit noch [illegible] zu wünschen lässt. Sie besteht darin, den Werth eines Integrals zwischen imaginären Grenzen durch die Quadratur gewisser Curven auszudrücken, die mit der gegebenen Curve

$$(1) \qquad F(xy) = 0$$

zusammenhängen.

Seien

$$x = \alpha + \beta i, \quad y = \alpha' + \beta' i$$

entsprechende Werthe, und

$$J = \int y dx$$

nach einer Curve genommen, die durch die Gleichung

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

nd die Grenzen α_0 und α_1 definirt ist, so erhält man

$$J = 2s_1 - \frac{s+s'}{2} + \frac{s-s'}{2} \cdot i,$$

vo

$= \Sigma(\alpha' + \beta')(d\alpha + d\beta);\; s' = \Sigma(\alpha' - \beta')(d\alpha - d\beta),\; s_1 = \Sigma\alpha'\alpha.$

Denkt man sich also 3 Curven, deren Coordinaten sind:

$$\alpha + \beta \text{ und } \alpha' + \beta',\; \alpha - \beta \text{ und } \alpha' - \beta',\; \alpha \text{ und } \alpha',$$

) stellen s, s' und s_1 die Flächen dar, die zwischen diesen Curven, :r x-Axe und den den Werthen α_0 und α_1 entsprechenden Ornaten enthalten sind. Ist die Gleichung zwischen x und y den Coefficienten reell, so entsprechen die Lösungen $\alpha - \beta i$, $- \beta' i$ den Lösungen $\alpha + \beta i$, $\alpha' + \beta' i$, und das Integral

$$J = \int (\alpha' - \beta' i)\,(d\alpha - i d\beta)$$

ellt sich durch die nämlichen Flächen in der Form dar:

$$J' = 2s_1 - \frac{s+s'}{2} - \frac{s-s'}{2} \cdot i.$$

Ist der Integrationsweg geschlossen, so wird das Integral leich Null, wofern nicht den Punkten im Innern der Integrationsurve unendliche oder vielfache Wurzeln y entsprechen. Im tzteren Falle stellt das geschlossene Integral eine Periode des nbestimmten Integrals dar. Sind die Coefficienten der Gleichung (1) ell, so sind die Perioden paarweise conjugirt, oder was daslbe ist, die einen sind reell, die anderen rein imaginär. Alle ellen Perioden werden erhalten, wenn man die Flächen, welche n den reellen geschlossenen Contouren, so viele ihrer in der rch die Gleichung (1) definirten Curve existiren, begrenzt rden, quadrirt. (So ist von $\int y dx$, wo y durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

stimmt ist, die allein vorhandene reelle Periode πab). Der ztere Satz wird aus den obigen Formeln nicht abgeleitet, er erliegt jedoch zum mindesten einer Schwierigkeit, die der rfasser nicht berührt. Der Fall nämlich, wo die Gleichung (1) ne geschlossenen Contouren darstellt, schliesst keineswegs die istenz von reellen Perioden aus, wie dies aus dem einfachen

Beispiele $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ erhellt, wo das Integral die reelle Periode 2π hat, und die Curve der Gleichung $y^2(1-x^2) = 1$ aus 2 getrennten in's Unendliche gehenden Curvenzweigen besteht. Die Zurückführung auf eine Quadratur liesse sich hier noch festhalten, wenn man $y = \frac{1}{z}$ setzt, und es scheint die Angabe des Verfassers noch der Ergänzung bedürftig, dass ausser den obigen Contouren noch die etwaigen geschlossenen Contouren in Betracht zu ziehen sind, die durch die Substitution $y = \frac{1}{z}$ erhalten werden.

Der Ausdruck für die rein imaginären Perioden ist

$$J - J' = (s - s')i,$$

wobei solche Umläufe zu wählen sind, dass die Curven s und s' sich vereinigen. Die Quadratur der umschlossenen Flächen giebt ihren Werth abgesehen vom Factor i. (So ist beim Integral $\int \frac{dz}{z}$ die zu quadrirende Fläche ein Kreis um den Anfangspunkt, welcher die Hyperbel $xy = 1$ in den Scheitelpunkten berührt, und dessen Inhalt 2π ist.)

Bei dem doppelten Integral

$$J = \int z\, dx\, dy,$$

wo z definirt ist durch die Gleichung

$$(2) \qquad F(xyz) = 0,$$

sei

$$x = \alpha + \beta i,\; y = \alpha' + \beta' i,\; z = \alpha'' + \beta'' i,$$

die Reihenfolge der Elemente $z\,dx\,dy$, sei ferner bestimmt durch die Gleichungen

$$(3) \qquad \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0. \qquad \varphi_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta'_1) = 0,$$

so erhält man:

$$J = 2V_1 - \frac{V + V'}{2} + \left(\frac{V - V'}{2} - 2V_1'\right)i,$$

wo

$$V = \Sigma(\alpha'' + \beta'')(d\alpha + d\beta)(d\alpha' + d\beta'),$$
$$V' = \Sigma(\alpha'' - \beta'')(d\alpha - d\beta)(d\alpha' - d\beta'),$$
$$V_1 = \Sigma \alpha'' d\alpha\, d\alpha', \quad V'_1 = \Sigma \beta'' d\beta\, d\beta'.$$

Aus den 2 Relationen, die in der Gleichung (2) enthalten .d, aus (3) und den Gleichungen

$$\alpha \pm \beta = \xi, \quad \alpha' \pm \beta' = \eta, \quad \alpha'' \pm \beta'' = \zeta$$

ssen sich $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'' \beta''$ eliminiren und V resp. V' stellen Volumina dar, welche zwischen den Oberflächen mit den ordinaten $\xi\eta\zeta$ und der xy-Ebene enthalten sind, nachdem noch ie Grenzbedingung $\lambda(\alpha\beta) = 0$ festgesetzt ist. Ist das durch Gleichungen (3) bestimmte Werthgebiet geschlossen, so verhwindet das Integral, ausser wenn im Innern $z = \infty$ oder $\frac{F}{z} = 0$ wird, in welchem Falle dasselbe eine Periode des unstimmten Doppelintegrals darstellt.

Sind die Coefficienten der Gleichung (2) reell, so erhält man reellen Perioden durch Cubatur der geschlossenen Räume, viele ihrer in der Fläche (2) existiren. So ist $\frac{4}{3}\pi abc$ die reelle riode von

$$c\int dx\,dy \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

s bestehen hier übrigens unseres Erachtens dieselben Schwierigiten, die wir oben berührt haben. Der Ausdruck für die rein aginären Perioden ist $(V-V')i$.

Man kann nun leicht übersehen, wie dieselbe Methode auf ie Integrale beliebiger Ordnung ausgedehnt wird.

Der Verfasser bemerkt noch, dass, falls die Coefficienten r betrachteten Gleichung complexe Werthe haben, Perioden, e den reellen analog sind, dadurch erhalten werden, dass man s Integral längs einer geschlossenen Folge von Lösungen der gebenen Gleichung nimmt, für welche beim einfachen Integral :, beim doppelten Integral $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, u. s. f. reell sind.

Hr.

. MARIE. Théorie des résidus des intégrales doubles. C. R. LXXV. 695-698, 751-755.

. MARIE. Théorie des résidus des intégrales d'ordre quelconque. C. R. LXXV. 1475-1479.

Ist

$$F(xyz) = 0$$

die Gleichung, wodurch z als Function von x und y gegeben ist, so kann z entweder für einen isolirten Punkt $x_0\, y_0$ unendlich werden oder für ein System von Werthen, welche der Gleichung

$$f(xy) = 0$$

genügen. Hiernach werden unterschieden Residuen in Beziehung auf einzelne Punkte und Residuen in Beziehung auf Linien. Für den ersten Fall ist die allgemeinste Gleichung, welche betrachtet wird,

$$z = \frac{a^2}{2} \frac{\varphi(xy)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}},$$

wo $\varphi(xy)$ für $x = x_0$, $y = y_0$ einen bestimmten Werth φ_0 annimmt, und das Residuum in Bezug auf den Punkt $x_0 y_0$ $\frac{4}{3}\pi a^3 \varphi_0 \cdot i$ sein soll, was schwerlich richtig ist, da das Residuum doch eine Function von $a^2\varphi_0$ sein muss.

Im zweiten Fall sei $x_1\, y_1$ eine Lösung der Gleichung $f(xy) = 0$, und z habe für Werthe in der Umgebung dieses Werthepaars die Form:

$$z = \frac{M}{a(x-x_1)+b(y-y_1)},$$

wo

$$a = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1, \; b = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1,$$

dann lautet das Residuum in Beziehung auf die Curve $f(xy) = 0$:

$$2\pi i \int \frac{Mds}{b}$$

(das Integral längs des Umfanges der Curve genommen)

$$= 2\pi i \int \frac{Mdx}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Die Ausdehnung auf Functionen von 3 Veränderlichen, auf welche übrigens der Verfasser sich beschränkt, lautet so:

Es sei D (Dichtigkeit) $= \frac{\varphi(xyz)}{F(xyz)}$, so dass D für alle Punkte der Oberfläche $F(xyz) = 0$ unendlich wird, und x_1, y_1, z_1 eine Lösung von $F = 0$, dann wird das Residuum in Bezug auf die Fläche dargestellt durch

$$2\pi i \int\int \frac{\varphi(x_1 y_1 z_1)\, ds}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^2}}$$

ngs der ganzen Ausdehnung der Oberfläche $F = 0$ genommen)

$$= 2\pi i \int\int \frac{\varphi(x_1\, y_1\, z_1)\, dx_1\, dy_1}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}.$$

Hr.

Marie. Extension de la méthode de Cauchy à l'étude des intégrales doubles ou théorie des contours élémentaires dans l'espace. C. R. LXXV. 865-868, 937-940.

Zur Bestimmung der verschiedenen Perioden des Doppelegrals $\int\int z\, dx\, dy$, wo z durch die Gleichung $f(xyz) = 0$ bemmt ist, wird die Gleichung des sogenannten scheinbaren Umsses, $F(xy) = 0$, betrachtet, welche aus der Elimination von z vischen $f(xyz) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ hervorgeht. Der geschlossene itegrationsweg wird, wie oben, durch die Bedingungen $(\alpha\beta\alpha'\beta') = 0$, $\varphi_1(\alpha\beta\alpha'\beta') = 0$, $(x = \alpha + \beta i,\ y = \alpha' + \beta' i)$ stgesetzt und mit (φ, φ_1) bezeichnet und angenommen, dass er rch keine der Lösungen von $F(xy) = 0$ hindurchgeht. Schliesst auch keine ein, so ist der Werth des Doppelintegrals Null. hliesst er dagegen ein geschlossenes System von Lösungen r Gleichung $F(xy) = 0$ ein, so erhält man im Allgemeinen nstante Werthe, welche die Perioden des Integrals sind. Es rden noch die Bedingungen angegeben, unter welchen die nstanten von Null verschieden sind. Hr.

Pochhammer. Ueber die Entwickelung von Functionen nach den Integralen einer Klasse von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Borchardt J. LXXIV. 315-362.

Ist $\varphi(x)$ eine beliebige in der Umgebung von $x = 0$ eintige und stetige Function, so genügen die Integrale $P_m(x)$,

nach denen die Entwickelung von $\varphi(x)$ fortschreitet, zunächst folgender Differentialgleichung:

$$(1) \qquad x^2 \frac{d^2P_m}{dx^2} + g(x)\frac{dP_m}{dx} + h(x)P_m = m(m+b-1)P_m,$$

worin m der Reihe nach gleich $0, 1, 2 \cdots$ gesetzt wird, $g(x)$ und $h(x)$ zwei convergente Reihen von der Form

$$g(x) = bx + b_1x^2 + b_2x^3 + \cdots$$
$$h(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$$

bedeuten. Die Constanten $b, b_1, \cdots, c_1\ c_2, \cdots$ sind von m unabhängig, übrigens beliebig vorausgesetzt, nur ist b der Beschränkung unterworfen, nicht einer negativen ganzen Zahl oder Null gleich zu sein. Die Form der Gleichung (1) unter der erwähnten Beschränkung ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass von den beiden Integralen des zu $x = 0$ gehörigen Fundamentalsystems eines und nur eines zum Exponenten m gehört und ausschliesslich nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitet. Es wird nun $P_m(x)$ als dasjenige partikuläre Integral der Gleichung (1) definirt, welches durch die Reihe

$$P_m(x) = x^m(1 + k_1x + k_2x^2 \cdots)$$

darstellbar ist. Es wird alsdann im ersten Abschnitt der Nachweis geführt, dass $\frac{P_m(x)}{x^m}$ für m $= \infty$ einen von Null und Unendlich verschiedenen Werth erhält, woraus folgt, dass wenn eine Entwickelung

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \beta_\nu P_\nu(x)$$

überhaupt möglich ist, die Begrenzung des Convergenzgebietes ein Kreis um $x = 0$ ist. Die Coefficienten β werden im zweiten Abschnitt (§§ 6—12) mit Hülfe einer Ergänzungsfunction $Q_n(x)$ bestimmt, welche der Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{d^2(x^2Q_n)}{dx^2} + \frac{d(g(x)Q_n)}{dx} + h(x)Q_n - n(n+b-1)Q_n = \begin{cases} Ax^\gamma \\ 0 \end{cases}$$

genügt, je nachdem b eine positive ganze Zahl ist oder nicht. A und γ werden für den ersten Fall so bestimmt, dass die logarithmischen Glieder in den Integralen verschwinden. Im zweiten Falle stellt (2) die Gleichung des integrirenden Factors von (1)

'. In beiden Fällen wird Q_n näher als dasjenige partikuläre egral von (2) definirt, welches durch die Reihe

$$x^{-n-1}\{1+K_1x+K_2x^2+\cdots\}$$

gestellt werden kann. Durch diese Reihe ist zwar für den ll, dass b eine positive ganze Zahl ist, Q_n nicht vollständig, ıdern nur in denjenigen Gliedern eindeutig bestimmt, welche ; negativen Potenzen von x behaftet sind, diese aber kommen ein in der fraglichen Entwickelung zur Anwendung. Es wird :auf folgender Satz bewiesen: „Bezeichnet $[F(x)]_{-1}$ den Coefenten von x^{-1} in der Entwickelung nach Potenzen von x, nn ist

$$[P_m(x)\,Q_n(x)]_{-1} = 0, m \gtrless n, \quad [P_m(x)Q_m(x)]_{-1} = 1.\text{“}$$

Hieraus folgt dann unmittelbar die gesuchte Entwickelung der Form:

$$(3) \qquad \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}[\varphi(u)\,Q_\nu(u)]_{-1}P_\nu(x).$$

Nachdem noch für mod. $[\varphi(u)Q_1(u)]_{-1}$ für $\nu=\infty$ eine Grenzstimmung geliefert ist, wird im dritten Abschnitt §§ 12 — 14 r Beweis für die Convergenz der Entwickelung gegeben.

Ist ϱ der Abstand des Punktes $x=0$ vom nächstgelegenen ıgulären Punkt der Differentialgleichung (1), und wird $\varphi(x)$ nerhalb des Kreises mit dem Radius ϱ unstetig, so fällt das onvergenzgebiet der Reihe (3) mit dem der Potenzreihe von (x) zusammen. Bleibt aber $\varphi(x)$ in dem gedachten Intervall etig, so gilt die Entwickelung für die ganze Kreisfläche mit usschluss der Peripherie. Die erhaltenen Resultate werden arauf verallgemeinert, indem die Functionen $P_m(x)$ und $Q_n(x)$ urch die Differentialgleichungen

$$f(x)\,\frac{\partial^2 P_m}{\partial x^2} + g(x)\,\frac{dP_m}{dx} + h(x)\cdot P_m = m\,(m+b-1)\,P_m,$$

$$\frac{d^2(f(x)\,Q_n)}{dx^2} - \frac{d}{dx}(g(x)\,Q_n) + (h(x) - n\,(n+b-1))Q_n = \begin{cases} Ax^\gamma \\ 0 \end{cases}$$

finirt werden, worin $f(x)$ die convergente Reihe

$$f(x) = x^2(1+a_1x+a_2x^2+\cdots),$$

ı) und $h(n)$ dieselben Reihen wie oben bedeuten. Das Convernzgebiet der Entwickelungsreihe ist hier nicht kreisförmig benzt. Die Begrenzungscurve ist durch die Gleichung

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

dahin bestimmt, dass sie die Curve in der x-Ebene ist, die einem Kreise in der ξ-Ebene entspricht. Durch die bezeichnete Substitution werden nämlich die neuen Functionen P auf die früheren zurückgeführt. Es wird noch bemerkt, dass, damit die Differentialgleichung für $Q_m(x)$ mit der von $P_m(x)$ identisch werde, es nothwendig und hinreichend sei, dass $g(x) = \frac{df(x)}{dx}$ und $f(x)$ und $h(x)$ grade Functionen von der Form:

$$f(x) = x^2(1 + a_2x^2 + \cdots)$$
$$h(x) = c_2x^2 + c_4x^4 + \cdots$$

seien. Alsdann ist das zweite partikuläre Integral für die Ergänzungsfunction Q_m zu nehmen. Die Differentialgleichung für die Kugelfunctionen erster und zweiter Art, die in der nämlichen Beziehung zu einander stehen, lässt sich durch eine einfache Substitution in die erwähnte Form überführen.

Im letzten Abschnitt §§ 15—17 werden als Beispiel zwei specielle Differentialgleichungen behandelt, in denen die Coefficienten Binome sind, und bei denen die Q_n als ganze rationale Functionen von $\frac{1}{x}$ erhalten werden. Für diese besteht die Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} P_\mu(x) \cdot Q_\mu(t) = \frac{1}{t-x}.$$

Hr.

Ch. Hermite. On the elimination of arbitrary functions.
Messenger (2) II. 69-70.

Auszug aus der Arbeit: „Sur l'élimination des fonctions arbitraires“, die der Verfasser in der Versammlung „for the advancement“, 1872 gehalten hat. Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. On the expression for
$$\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi).$$
Messenger (2) II. 12-16.

Der Verfasser bemerkt, dass Abel's Resultat (Oeuvres II. 222.)

$$\varphi(x+yi)+\varphi(x-yi) = \frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v dv\, e^{-v^2\theta^2}\int_{-}^{\infty}\varphi(x+t)\, e^{-v^2t^2} dt$$

ıf unrichtige Schlüsse gegründet ist, da nicht zu beweisen ist, ıss man

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2y^2}\, v^{-2n}\, dv = \frac{\Gamma(-n+\frac{1}{2})}{y-2n+1},$$

elches in Wirklichkeit unendlich ist, herleiten kann aus

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2y^2}\, v^{2n}\, dv = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{y+2n+1},$$

ıd da ferner eine Discontinuität von Abel nicht berücksichtigt urde. Die Arbeit enthält auch Bemerkungen über die Darellung von $\varphi(x+yi)+\varphi(x-yi)$ als bestimmtes Integral.

Glr. (O.)

. PENDLEBURY. Powers of negative quantities. Messenger (2) II. 60.

Bezieht sich auf die Discontinuität von a^x, wenn a negativ t.

Glr. (O.)

V. K. CLIFFORD. Remarks on the theory of the exponential function derived from the equation $\frac{du}{dt} = pu$. Proc. of L. M. S. IV. 11I.

Cly.

. W. L. GLAISHER. Suggested notation for printing complicated exponents. Messenger (2) II. 107-111.

Es wird das Bedürfniss nach einer erkennbaren „gedruckten“ ezeichnung für Buchstaben ausgedrückt, die in Potenzen erhoben nd, welche complicirte Exponenten enthalten, und welche jetzt t undeutlich werden. Wenn solche Ausdrücke, wie $Z^{\frac{ax+bx}{cx+dx}}$ oft einer Arbeit vorkommen, verbrauchen sie viel Raum und ɪrtheuern den Druck. Es wird daher vorgeschlagen, wenn u eine

complicirte Grösse ist, a^u zu drucken (nicht zu schreiben) wie $a\wedge u\wedge$ oder $a \nmid u \nmid$ oder in einer andern Weise, die nicht viel Raum braucht. Es folgen einige Bemerkungen über die verschiedenen Bezeichnungen für $1\cdot2\cdot3\cdots n$, nämlich $\underline{|x}$, $[x]$, $\Gamma(x+1)$, $\Pi(x)$ und $x!$ Der Verfasser giebt den beiden letzteren den Vorzug.

Glr. (O.)

C. Formenti. Sulla funzioni ad un solo valore. Pavia.

Jg.

M. Nöther. Zur Theorie der algebraischen Functionen. 3te Note. Gött. Nachr. 1872. 490-498.

Dass eine Curve $f(z,s) = 0$ durch den vollständigen Schnitt zweier gegebenen Curven m- und n^{ter} Ordnung $\varphi = 0$, $\psi = 0$ hindurchgehe, kann analytisch u. A. so definirt werden: Bezeichnet $z = a$, $s = b$ irgend einen dieser Schnittpunkte, welche sämmtlich endliche Werthe von z,s entsprechen sollen, so muss f nach Potenzen von $z-a$, $s-b$ entwickelt, identisch sein mit $A'\varphi+B'\psi$, unter A' B' ganze Functionen von $z-a$, $s-b$ verstanden. Dieses vorausgesetzt zeigt Herr Nöther auf sehr elegante Weise und in völliger Strenge, dass $f \equiv A\varphi + B\psi$ sein müsse, wo A, B ganze Functionen von z,s bezeichnen. Es folgt dieses unmittelbar aus folgendem Satze. Bekanntlich hat man für die Resultante $\Phi(z)$ nach s der Function φ, den Ausdruck $\lambda\varphi+\mu\psi$ (λ,μ ganze Function von z,s). Wird nun $f\lambda = \nu\psi + X$ gesetzt, so ist der Rest X, in y vom Grade $n-1$, durch $\Phi(z)$ theilbar.

St.

T. Babczynski. Ueber die Multiplication der symmetrischen algebraischen ganzen rationalen Functionen. Schlömilch Z. XVII. 147-158.

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen über die Theorie der Permutationen etc. wird ein Verfahren angegeben, wie ein Product von zwei (oder mehreren) elementaren symmetrischen Functionen von n Grössen, d. i. von Ausdrücken $\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ in eben

olche Functionen zerlegt werden könne. Die u. A. erwähnte Bildung der $n!$ Permutationen durch cyklische Vertauschungen von n, $n-1,\cdots$ Elementen findet sich auch bei Meier Hirsch (Aufgaben z. d. algebr. Gleichungen 1809 I. p. 326). St.

O. Schlömilch. Ueber eine besondere Gattung algebraischer Functionen. Leipz. Ber. XXIV. 26-36, Schlömilch Z. XVII. 248-251.

Es handelt sich um die Eigenschaften der ganzen rationalen Functionen $\varphi_m(x,y)$ und $\psi_m(x,y)$, welche durch die Gleichung

$$(x+iy)(x+iy+1)(x+iy+2)\cdots(x+iy+m-1)$$
$$=\varphi_m(x,y)+i\psi_m(x,y)$$

bestimmt werden. Für alle reellen x und y gelten die beiden Gleichungen:

$$(1)\qquad e^{xw}\cos yw = 1+\frac{\varphi_1(x,y)}{1}(1-e^{-w})$$
$$+\frac{\varphi_2(x,y)}{1\cdot 2}(1-e^{-w})^2+\cdots,$$

$$(2)\qquad e^{xw}\sin yw = \frac{\psi_1(x,y)}{1}(1-e^{-w})$$
$$+\frac{\psi_2(x,y)}{1\cdot 2}(1-e^{-w})^2+\cdots,$$

wenn der reelle Theil von w positiv und der imaginäre Theil von w zwischen $-\frac{\pi}{3}$ und $+\frac{\pi}{3}$ enthalten ist. Diese Gleichungen benutzt der Herr Verfasser zur Entwickelung einer Function $f(y)$, die innerhalb des reellen Intervalls $y=a$ bis $y=b$ endlich, stetig und eindeutig bleibt, mithin unter der Form

$$f(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos yw\,dw\int_a^b f(\vartheta)\cos w\vartheta\,d\vartheta$$

oder

$$f(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin yw\,dw\int_a^b f(\vartheta)\sin w\vartheta\,d\vartheta$$

dargestellt werden kann. Der Vorzug dieser Entwickelungen liegt in der willkürlichen Grösse x, welche neben dem Argumente y darin vorkommt. M.

A. CAYLEY. Theorems in relation to certain sign-symbols. Messenger (2) II. 17-20.

Linien von n Zeichen $\pm$, in irgend einer Weise geordnet, werden durch die lateinischen Lettern $a, b, c \cdots$ bezeichnet; um zwei solche Symbole (nämlich Linien von $\pm$ Zeichen) zu multipliciren, werden die entsprechenden Zeichen multiplicirt. Dann ist das Quadrat eines lateinischen Buchstabens eine Linie von $n+$'s, und jeder lateinische Buchstabe ist eine Wurzel einer Linie von $n+$'s. Zwei Wurzeln werden unabhängig von einander genannt, wenn keine von ihnen gleich dem Product aller oder einiger von ihnen ist. Nimmt man also z. B. $n=5$, so sind, wenn a, b, c, d, e unabhängige Wurzeln von $+++++$ sind, die 32 Wurzeln die Glieder von $(1+a)(1+b)(1+c)$ $(1+d)(1+e)$. Aehnliche Bestimmungen werden in Beziehung auf die Colonnen von Zeichen gemacht, welche mit griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ bezeichnet werden, und alsdann Sätze bewiesen, über die Unabhängigkeit der Wurzeln von Linien und Colonnen von Zeichen, die in Quadraten geordnet sind.

Glr. (O.)

J. COCKLE. On hyperdistributives. Phil. Mag. 1872.

Das hier behandelte Problem kann folgendermaassen ausgesprochen werden. In der Form

$$\theta(u)+\theta(a) = \theta(u+a)$$

mögen u und a nicht bestimmte unabhängige Variable, sondern nur Repräsentanten von Indices sein, so dass $\theta(u)$ nicht eine Function von u, sondern von unabhängigen Symbolen $u_0, u_1, u_2 \cdots$ ist, und

$$\theta(u) = \theta(u_0, u_1, u_2, \cdots);$$

man setze

$$\theta(u+a) = \theta(A_0, A_1, A_2, \cdots),$$

wo $A_r = (u+a)_r$; können wir nun A_r so interpretiren, dass übereinstimmende Resultate sich ergeben, so soll die Function θ eine „Hyperdistributive“ heissen. Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die allgemeinste Form dieser Function θ zu finden.

Csy. (M.)

F. J. Studnička. Beitrag zur Zerlegung echt gebrochener Functionen in Partialbrüche. (Böhmisch.) Ber. d. Böhm. V. III. 3-5.

Hat man die echt gebrochene Function

$$u = \frac{f(x)}{F(x)},$$

wobei $F(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \cdots (x-l)^\lambda$ und $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = n$ ist, in Partialbrüche zu zerlegen, so lassen sich die Zähler derselben independent auf folgende Weise einfach darstellen:

Führt man allgemein die Bezeichnung ein:

$$\frac{F(x)}{(x-m)^\mu} = \Phi_m(x), \quad \frac{f(x)}{\Phi_m(x)} = \Psi_m(x),$$

so erhält man, für m der Reihe nach $a, b, \cdots, l$ setzend,

$$U = \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{\psi_a^{\alpha-k}(a)}{(\alpha-k)!\,(x-a)^k} + \sum_{k=1}^{\beta} \frac{\psi_b^{\beta-k}(b)}{(\beta-k)!\,(x-b)^k} + \cdots$$
$$+ \sum_{k=1}^{\lambda} \frac{\psi_l^{\lambda-k}(l)}{(\lambda-k)!\,(x-l)^k}.$$

Diese Formel, die z. B. in Serret's Algebra, Bd. I. pag. 389, wie auch anderwärts unter Zuhülfenahme des Taylor'schen Satzes entwickelt ist, wird in dieser Abhandlung direct begründet.

W.

F. Chiò. Troisième mémoire sur la série de Lagrange. Atti di Torino VII. 647-661.

Der Verfasser untersucht in dieser posthumen Abhandlung, die der Société Phil. schon als Nachtrag zu den in den Jahren 1844 u. 1847 der Academie zu Paris vorgelegten Arbeiten vorgelegt war, einige Sätze über die Convergenz der Reihe von Lagrange, die von Cauchy aufgestellt und von Andern reproducirt sind, und über die Merkmale, welche die von dieser Reihe gelieferten Wurzeln unterscheiden.

Jg. (O.)

Capitel 2.

Besondere Functionen.

J. W. L. Glaisher. On certain theorems in logarithmic transcendents. Messenger (2) I. 138-143.

Definirt man $L_{2n}(1+x)$ durch

$$x-\frac{x^2}{2^{2n}}+\frac{x^3}{3^{2n}}-\cdots,$$

so ist

$$L_{2n}(1+x)+L_{2n}\left(1+\frac{1}{x}\right)=2L_{2n}^{(2)}+2L_{2n-2}^{(2)}\frac{L_1^2(x)}{1\cdot 2}$$

$$+2L_{2n-4}^{(2)}\frac{L_1^4(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{L_1^{2n}(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}.$$

Dieser und andere analoge Sätze sind von Spense in seinen „Mathematical essays“ 1819 bewiesen, die anderen von de Morgan in seinem „Differential and Integral Calculus.“ Sie sind hier in conciserer und allgemeinerer Art bewiesen, und einige andere Resultate hinzugefügt. Glr. (O.)

O. Schlömilch. Ueber die Werthe von Arc sin $(x+iy)$ und Arc cos $(x+iy)$. Schlömilch Z. XVII. 245-248.

Da die bekannten Cauchy'schen Formeln für arc sin $(x+iy)$ und arc cos $(x+iy)$ (siehe Schlömilch, Compendium d. höh. Anal. 1861, I. 263) an dem Uebelstande leiden, dass sie für gewisse specielle Fälle die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, und hierfür einer besonderen Umformung bedürfen, so hat der Herr Verfasser im Vorliegenden folgende neue Formeln dafür gegeben. Sämmtliche Werthe von Arc sin $(x+iy)$ bestimmen sich durch die beiden Formeln:

$$\begin{cases}\text{arc sin}\,(x+iy)=2n\pi+\text{arc sin}\,T+i\cdot l(S+\sqrt{S^2-1}),\\ \text{arc sin}\,(x+iy)=(2n+1)\pi-\text{arc sin}\,T-i\cdot l\,(S+\sqrt{S^2-1}),\end{cases}$$

wo

$$2S=\sqrt{(1+x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}$$

und

$$2T=\sqrt{(1+x)^2+y^2}-\sqrt{(1-x)^2+y^2}.$$

e entsprechenden Formeln für arc cos $(x+iy)$ lauten:

$$\begin{cases} \arccos(x+iy) = 2n\pi + \arccos T - i\cdot l\,(S+\sqrt{S^2-1}), \\ \arccos(x+iy) = 2n\pi - \arccos T + i\cdot l\,(S+\sqrt{S^2-1}). \end{cases}$$

Eine sehr elegante Gestalt nehmen diese Formeln durch nführung des hyperbolischen Cosinus an. M.

'. H. L. Russell. On recent progress in elliptic and hyperelliptic functions. Rep. Brit. Ass. 1872.

Die Arbeit hat den Zweck, die englischen Leser mit den ıtersuchungen bekannt zu machen, welche Herr Weierstrass ı XLVII. Bande von Crelle veröffentlicht hat. Csy. (M.)

. Schröter. Bemerkung zu dem Sturm'schen Beweise des Additionstheorems für die elliptischen Integrale erster Gattung. Schlömilch Z. XVII. 508-515.

Der einfache und elegante Beweis von Sturm für das Addionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung, den Liouille C. R. 1856 No. 21 mitgetheilt hat (siehe Schlömilch, Comendium d. höh. Anal. II. 327), leidet an dem Uebelstand, dass r nicht ersehen lässt, woher der pure eingeführte integrirende 'actor kommt. Herr Schröter giebt im Vorliegenden eine Beweismethode des Additionstheorems, bei der sich der integrirende Factor von selbst in drei verschiedenen Formen darbietet, welche bei gehöriger Bestimmung der willkürlichen Constanten dem Theorem die verschiedenen bekannten Gestalten geben. Nachlem er nämlich erstens die zu integrirende Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0$$

uf die Form

$$\sin 2\psi \frac{\partial \Delta(\varphi)}{\partial \varphi}\, d\varphi + \sin 2\varphi \frac{\partial \Delta(\psi)}{\partial \psi}\, d\psi = 0$$

ebracht und mit einem Multiplicator M versehen hat, sucht er eses M so zu bestimmen, dass nach Umformung durch theileise Integration der Theil ausser dem vollständigen Differential

$$d\cdot M\,[\sin 2\psi \cdot \Delta(\varphi) + \sin 2\varphi \cdot \Delta(\psi)],.$$

welcher die Form

$$A\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}+B\frac{d\psi}{\Delta(\psi)}$$

hat, verschwindet, d. h. dass $A = B$ wird. Zweitens wird die obige Differentialgleichung 1) mit $\sin\varphi\cdot\sin\psi$ multiplicirt und auf die Form

$$\sin\psi\cdot\Delta(\psi)\frac{\partial\cos\varphi}{\partial\varphi}d\varphi+\sin\varphi\cdot\Delta(\varphi)\frac{\partial\cos\psi}{\partial\psi}d\psi=0$$

gebracht, und es wird der nach der theilweisen Integration ausser dem vollständigen Differential

$$d\cdot M\,[\sin\psi\cdot\Delta(\psi)\cdot\cos\varphi+\sin\varphi\cdot\Delta(\varphi)\cdot\cos\psi]$$

auftretende Theil wie oben zum Verschwinden gebracht. Ebenso wird drittens mit der Form der Differentialgleichung

$$\Delta(\psi)\cdot\cos\psi\cdot\frac{\partial\sin\varphi}{\partial\varphi}d\varphi+\Delta(\varphi)\cos\varphi\cdot\frac{\partial\sin\psi}{\partial\psi}d\psi=0$$

verfahren, welche durch Multiplication mit $\cos\varphi\cdot\cos\psi$ aus der ursprünglichen (1) entsteht. Die gefundenen Integralgleichungen ergeben leicht bei gehöriger Constantenbestimmung für jede der drei Functionen $\sin\sigma$, $\cos\sigma$, $\Delta(\sigma)$ vier verschiedene Gestalten des Additionstheorems. M.

F. Unferdinger. Beitrag zur Theorie der elliptischen Integrale. Grunert Arch. LIV. 459-470.

Bei der Legendre'schen Zurückführung des elliptischen Integrals

$$\int\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{Rx}}$$

auf die drei Normalformen kann man neben dem Integral der dritten Gattung

$$\int\frac{dz}{(1+\lambda z^2)^n\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

auch noch auf Integrale von der Form

$$\int\frac{dz}{z^{2n}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\int\frac{d\varphi}{\sin^{2n}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

gelangen. Da dieses Integral und seine Reduction auf die drei Gattungen in den Lehrbüchern entweder gar nicht oder ohne

ksichtigung des Falles der Unstetigkeit discutirt zu werden
, so giebt der Herr Verfasser im Vorliegenden die voll-
ge Zurückführung desselben. Als Beispiel dient das Integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \tfrac{3}{2}\int_1^z \frac{z dz}{\sqrt{z^3-1}}.$$

M.

CHLÖMILCH. Ueber die stereometrischen Analoga
m Fagnano'schen Satze. Leipz. Ber. XXIII. 13, Schlömilch Z.
II. 66-69.

)er Fagnano'sche Satz lehrt bekanntlich, zu jedem Ellipsen-
einen zweiten finden, so dass die Differenz beider ein
'aischer Ausdruck ist. Benutzt man das Additionstheorem
e elliptischen Integrale 2[ter] Gattung bei der Berechnung des
ılintegrals

$$\int\int \sqrt{\frac{1-\frac{\alpha^2x^2}{a^2}-\frac{\beta^2y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\, dx\, dy, \quad \left(\alpha^2 = 1-\frac{c^2}{a^2},\ \beta^2 = 1-\frac{c^2}{b^2}\right),$$

es die Bestimmung eines Theils der Fläche des dreiaxigen
oids darstellt, so ergeben sich unendlich viele, dem Fagnano'-
Satze analoge Theoreme für das Ellipsoid. Aehnliche
metrische Analoga zum Fagnano'schen Satze gelten auch
e beiden dreiaxigen Hyperboloide. M.

OSSAK. Zur Theorie der elliptischen Transcendenten.
lin.

)er Verfasser stellt sich die Aufgabe, aus den beiden
ıungen

$$\int^{x_1} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} + \int^{x_2} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} = t,$$

$$\int^{x_1} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} + \int_0^{x_2} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} = c,$$

ɔeren Grenzen x_1 und x_2 der darin enthaltenen elliptischen
ale der zweiten Gattung zu bestimmen, — eine Aufgabe,

die Rosenhain für die elliptischen Integrale der dritten Gattung gelöst hat (Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, Mém. prés. de Paris XI.) Durch die Substitution

$$\sqrt{x_1} = \sin am(u_1, k), \quad \sqrt{x_2} = \sin am(u_2, k)$$

werden obige Gleichungen auf zwei andere von der Form

$$u_1 + u_2 = u, \quad Z(u_1) + Z(u_2) = w$$

zurückgeführt, woraus u_1 und u_2 mit Hülfe des Additionstheorems der elliptischen Integrale der zweiten Gattung gefunden werden. Dieses liefert nämlich die Ausdrücke von

$$\sqrt{x_1 x_2}, \quad \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)} \quad \text{und} \quad \sqrt{(1-k^2 x_1)(1-k^2 x_2)}$$

durch w und Thetafunctionen von u; aus diesen Ausdrücken lassen sich aber x_1 und x_2 selbst finden mit Hülfe einer von Rosenhain (l. c. Ch. I. 6) angegebenen Identität. Schliesslich untersucht der Verfasser, wie sich die Lösungen des obigen Systems aus denen des Rosenhain'schen Systems herleiten lassen, worin elliptische Integrale dritter Gattung auftreten. In unserem Falle sind die die Grössen

$$k\sqrt{x_1 x_2}, \quad \frac{k}{k'}\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}, \quad \frac{1}{k'}\sqrt{(1-k^2 x_1)(1-k^2 x_2)}$$

liefernden θ-Quotienten

$$\frac{\theta_1(u_1)\,\theta_1(u_2)}{\theta(u_1)\,\theta(u_2)}, \text{ etc.}$$

Wurzeln einer Gleichung dritten Grades. M.

B. HASSELBERG. Utueckling af sin am x i serie fortlöpande efter stigande digniteter af variabeln. Stockholm.

Bezeichnen K und K_1 die Perioden, so ist, wie bekannt, sin am x unendlich für $x = 2mK + i(2n+1)K_1$. Diese Function kann folglich nicht in eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt werden, wenn mod. $x > K_1$. Der Verfasser scheint aber doch wirklich zu glauben, dass er das Unmögliche bewerkstelligt habe, während er in der That nur die Differenz

$$\sin am\, x - \frac{1}{k}\cdot\frac{2x}{x^2 + K_1^2}$$

entwickelt. Uebrigens wird keine allgemeine Formel für die

eihen-Coefficienten (die durch Differentiation von sin am x und ichherige Substitution von $x = 0$ berechnet sind) gegeben, son-ern nur numerische Werthe der 5 ersten. Bg.

KÖNIG. Zur Theorie der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Heidelberg 1871.

An die Sätze, welche Herr Königsberger in seinem Buche: Die Transformation etc." (siehe F. d. M. I. 134) über die Mo-ılargleichungen bewiesen hat, knüpft die vorliegende Arbeit ımittelbar an. Diese Gleichungen $\theta_n(u, v) = 0$ enthalten be-ınntlich als Lösungen die vierten Wurzeln der zu den sämmt-chen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen gehörigen ıtegralmoduln, und ihre Coefficienten sind ganze rationale unctionen der vierten Wurzeln aus dem ursprünglichen Integral-ıodul. Durch Untersuchung der Werthe, welche v für unend-ch kleine u annimmt, ergiebt sich die Reihenentwickelung der Vurzeln der Modulargleichungen (vgl. Matthieu, Journal de l'Éc. ol. Cah. 42), und aus dieser die Irreductibilität derselben (siehe .önigsberger, l. c. p. 187). Herr König zeigt nun, dass die rösste Dimension der Glieder der Modulargleichung $= 2\varphi(n)$, ie niedrigste $= 2\psi(n)$ ist, wo $\varphi(n)$ und $\psi(n)$ die von Herrn ronecker eingeführte Bedeutung haben. Darauf geht er zur letrachtung der Discriminante der Modulargleichungen über, eren Verschwinden bekanntlich die gleichen Wurzeln liefert, so (wenn n keinen quadratischen Factor enthält) die Moduln ɜr complexen Multiplication. Die Discriminante hat die Form

$$u^{f(n)}(1-u^8)^{f_1(n)}\, g(u).$$

ɜr Verfasser bestimmt die numerischen Exponenten $f(n)$ und $f_1(n)$ ıd daraus den Grad von $g(u)$. Schliesslich wird gezeigt, dass ɜnn die Modulargleichung überhaupt gleiche Wurzeln zulässt, re Zahl nur eine Potenz von 2 sein kann. M.

:LIX MÜLLER. Ueber die Transformation vierten Grades der elliptischen Functionen. Jubiläumsschrift. Berlin.

Herr Weierstrass bringt in seinen Vorlesungen über ellip-

tische Functionen die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

auf die Form

$$\left(\frac{dp(u)}{du}\right)^2 = 4\,p^3(u) - g_2 \cdot p(u) - g_3 \left| \begin{matrix} u = 0 \\ p(u) = \infty \end{matrix} \right|,$$

worin statt der Coefficienten A, B, C, B', A', die beiden Invari
g_2, g_3 der biquadratischen Form auftreten, und reducirt da
gemeine Transformationsproblem der elliptischen Function
das speciellere: alle Functionen $p(u|\, G_2,\, G_3)$ zu finden, w
sich rational durch $p(u|\, g_2, g_3)$ ausdrücken lassen. Die allgen
Form dieser transformirten Functionen ist

$$\bar{p}(u) = p(u) + \sum_{\substack{\lambda = 0,1\ldots n_1-1 \\ \mu = 0,1\ldots n_2-1}}' \{p(u - w_{\lambda,\mu}) - p(w_{\lambda,\mu})\},$$

wo

$$w_{\lambda,\mu} = 2\,\frac{\lambda n_2 - \mu n_3}{n_1\, n_2}\,\omega' - 2\,\frac{\mu\omega'}{n_2},\ 2\omega \text{ und } 2\omega'$$

die Perioden der ursprünglichen Function $p(u|\, g_2, g_3)$, $n =$
der Grad der Transformation ist und n_3 alle Zahlenwerthe (
$n_2 - 1$ annehmen kann. Die Invarianten G_2 und G_3 der transfo
ten Function sind algebraische Functionen der Invarianten g
und hat sich der Verfasser der vorliegenden Arbeit bereits fr
das Problem gestellt, diese zwischen den gegebenen und
neuen Invarianten bestehenden algebraischen Relationen h
leiten, Relationen, welche den Modulargleichungen Jac
zwischen k und λ entsprechen. In seiner Dissertation: De t
formatione functionum ellipticarum, Berlin, 1867, sind die
treffenden Gleichungen für $n = 2, 3, 5$ und 7 hergestellt, un
eine Methode angegeben, dieselben für jeden beliebigen (
der Transformation zu finden. Die obige Summe

$$\Sigma' p(w_{\lambda,\mu}) = G_1$$

genügt, wenn n eine Primzahl ist, einer algebraischen Gleic
$(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten rationale Functionen
g_2, g_3 sind, und G_2 und G_3 lassen sich linear durch dieses G_1
drücken. Bei der Transformation 4ten Grades, welche der Ge
stand der vorliegenden Arbeit ist, wird der Grad der algebrais

eichungen höher. Für $n=4$ giebt es nämlich 6 Transforma-nen und eine Multiplication. Die verschiedenen G_1 der 6 insformirten Functionen genügen der Gleichung:

$$G_1^6 - 30g_2 G_1^4 - 540 g_3 G_1^3 - 135 g_2^2 G_1^2 - 324 g_2 g_3 G_1 + 4g_2^3 - 108 g_3^2 = 0,$$

id die zugehörigen G_2 und G_3 werden einfache gebrochene Funconen, deren Nenner vom 2[ten] und deren Zähler vom 4[ten], resp. [en] Grade in G_1 sind. M.

. Sylow. Sur le groupe de l'équation pour la division des périodes des fonctions elliptiques. Forh. af Christ. 1871.

Es wird bewiesen, dass die Gruppe der Gleichung, welche ie Grössen $\sin am \frac{4pK + 4qK'i}{2n+1}$ bestimmt, alle linearen Subtitutionen enthält. Vgl. das Referat darüber in Darboux Bull. II, 199-200. M.

Laguerre. Sur les propriétés des sections coniques qui se rattachent à l'intégration de l'équation d'Euler. Nouv. Ann. (2) XI. 156-162, Inst. XL. 3.

Poncelet und Jacobi haben die Beziehungen der zweien Kegelschnitten resp. ein- und umgeschriebenen Polygone zu den elliptischen Functionen entdeckt. Herr Laguerre hat eine andre Eigenschaft zweier sich schneidenden Kegelschnitte gefunden, welche mit dem Euler'schen Theorem in Zusammenhang steht. Heissen z. B. die 4 Durchschnittspunkte eines Kreises mit einer Ellipse a, b, c, d, und schneidet eine an der Ellipse entlang gleitende Tangente den Kreis in den Punkten M und M', so ist

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{Ma.Mb.Mc.Md}} = \frac{d\varphi'}{\sqrt{M'a.M'b.M'c.M'd}},$$

wo φ und φ' die Winkel sind, welche die Verbindungslinie der Punkte M und M' mit einem festen Punkte O auf dem Kreise und eine in O gezogene Kreistangente einschliessen.

M.

L. Kiepert. Ueber eine geometrische Anwendung der complexen Multiplication der elliptischen Functionen. Borchardt J. LXXIV. 305-314.

Vermöge des Additions- und Multiplicationstheorems der elliptischen Functionen wird die Theilung derjenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen des Bogens ausdrücken lassen, ebenso wie die des Kreises durch Auflösung algebraischer Gleichungen bewerkstelligt. Als Beispiel für derartige Curven hatte Herr Kiepert bereits in seiner Dissertation (s. F. d. M. II. 239) die Curve $r^3 = \cos 3\varphi$ angeführt. Hier behandelt der Verfasser nach einer Methode, welche Herr Weierstrass (in seinen Vorlesungen über Anwendungen der elliptischen Functionen) für die Fünf-Theilung des Lemniskatenbogens gegeben hat, die Theilung dieser Curve in $6q+1$ gleiche Theile. Ebenso wie bei der Theilung der Lemniskate wird hier der Grad der aufzulösenden algebraischen Gleichung dadurch wesentlich erniedrigt, das sich die complexe Multiplication der elliptischen Functionen anwenden lässt. Der Curvenbogen u ist nämlich von der Form

$$u = -\int_\infty \frac{d\varrho}{4\varrho^3-4}, \quad \text{wo } r^3 = \frac{1}{\varrho},$$

also ist die elliptische Function ϱ genau eine solche p-Function, wie sie Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen eingeführt hat, (siehe F. d. M. II. 240). Nachdem Herr Kiepert die Fundamentaleigenschaften dieser Function $p(u)$ und der mit ihr durch die Gleichung

$$\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} = -p(u)$$

verbundenen Function σu noch einmal recapitulirt hat, bestimmt er die Perioden für die vorliegende specielle Function, worin $g_2 = 0$, $g_3 = 4$ ist. Darauf wird das vollständige System derjenigen Werthe aufgestellt, für welche die Function

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(mu)}{\sigma^n u}$$

unendlich, und für welche sie null wird. Mit Hülfe des von Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen gegebenen Satzes: „Ist

$\varphi(u)$ eine grade Function, die nur für $u = 0$ unendlich gross wird und zwar unendlich gross von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, so lässt sich $\varphi(u)$ als ganze rationale Function von $p(u)$ darstellen, deren Grad $\frac{n-1}{2}$ ist," wird die Anzahl der Wurzeln der auflösenden Gleichung auf $\frac{n-1}{2}$ reducirt. Durch den Umstand ferner, dass $\varphi(\varepsilon u) = \varphi(u)$ ist, wo ε eine dritte Einheitswurzel, wird $\varphi(u)$ für $n = 6q+1$ eine ganze rationale Function q^{ten} Grades von $p^3(u)$, die leicht aufzufinden ist. Mit Hülfe der Entwickelungen von $p(u)$ und $\sigma(u)$ werden die Coefficienten der Gleichung q^{ten} Grades für $n = 7$, 13, 19 und 31 berechnet.

M.

. W. L. Glaisher. Tables of elliptic functions.
Messenger (2) II. 111-112.

Bericht über die Tafeln der elliptischen Functionen, welche von der Commission der „British Association“ für mathematische Tafeln unter Leitung der Herren J. Glaisher und J. W. L. Glaisher berechnet sind. Die Formeln sind:

$$\Theta\,\frac{2Kx}{\pi} = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots,$$

$$\Theta_1\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{K^{\frac{1}{2}}}\,H\frac{2Kx}{\pi}$$

$$= \frac{1}{K^{\frac{1}{2}}}(2q^{\frac{1}{4}}\sin x - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5x \ldots),$$

$$\Theta_2\frac{2Kx}{\pi} = \left(\frac{K^1}{K}\right)^{\frac{1}{2}} H\frac{2K}{\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\Theta_3\frac{2Kx}{\pi} = K'^{\frac{1}{2}}\Theta\frac{2K}{\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

wo q, wie gewöhnlich $e^{-\frac{K'}{K}}$ ist. Die Tafeln werden Θ, Θ_1, Θ_2, Θ_3 und ihre Logarithmen auf acht Decimalstellen geben für $x = 1^\circ, 2^\circ, \ldots 90^\circ$, $k = \sin 1^\circ, \sin 2^\circ, \ldots \sin 90^\circ$. Die Tafeln sind nach zwiefacher Richtung eingerichtet und werden für jedes der 8100 Argumente acht tabellenförmige Resultate, im Ganzen also

64800 Resultate enthalten. Die Θ sind folglich die Zähler und Nenner der elliptischen Functionen, zwischen denen die Relationen bestehen:

$$\sin am \frac{2Kx}{\pi} = \Theta_1 \frac{2Kx}{\pi} \div \Theta \frac{2Kx}{\pi},$$

$$\cos am = \Theta_2 \div \Theta_3, \quad \Delta am = \Theta_3 \div \Theta.$$

Glr. (O).

M. Roberts. Sur la rectification des lignes de courbure d'un ellipsoïde. Brioschi Ann. (2) V. 17-20.

Siehe Abschn. IX. Cap. 3. C.

C. Jordan. Sur les oscillations infiniment petites des systèmes matériels. C. R. LXXIV. 1395-1399.

Siehe Abschn. X. Cap. 4. A.

E. Catalan. Note sur une formule de M. Botesu de Jassy. Bull. de Belg. XXXIV. 424-428.

Siehe Abschn. VI. Cap. 4. p. 137.

J. W. Strutt. Notes on Bessel's functions. Phil. Mag. 1872.

Die Bedeutung dieser Functionen ist allgemein anerkannt. Mit ihrer Hülfe können wichtige Probleme der mathematischen Physik gelöst werden, die sich auf Wärme- oder Electricitäts-Leitung beziehen, oder auf den Verlauf einer incompressiblen reibungslosen Flüssigkeit, welche vorher in Ruhe gewesen ist, oder auf die Vibrationen eines elastischen Mediums, wenn die Natur des Problems Bedingungen erfordert, die auf sphärischen oder cylindrischen Oberflächen zu erfüllen sind. Vorliegende Arbeit enthält mannigfache Resultate, über welche eine Uebersicht zu geben hier zu weit führen würde. Einige Resultate sind neu, sowie einige Beweise bekannter Theoreme, und es sind viele Beispiele als Anwendung auf physikalische Probleme gegeben.

Csy. (M.)

. GEGENBAUER. Zur Theorie der Functionen X_n^m. Wien. Ber. LXVI. 55-62.

Durch Differentiation der Gleichung

$$X_n^m = \frac{m(m+2)\dots(m+2n-2)}{\Pi(m+2n-1)}\left[(x^2-1)^{n+\frac{m-1}{2}}\right]^{(n+m-1)}$$

ach x erhält man die Reihe:

$$[X_n^m]' = (m+2n-2)X_{n-1}^m + (m+2n-6)X_{n-3}^m + (m+2n-10)X_{n-5}^m + \cdots.$$

urch wiederholte Differentiation dieser Formel nach x ergiebt h schliesslich:

$$X_{n-r}^{m+2r} = \sum_{\mu=1\dots g} \frac{\mu(\mu+1)\dots(\mu+r-2)}{(r-1)!\,m(m+2)\dots(m+2r-2)}\cdot (m+2n-2\mu)(m+2n-2\mu-2)\dots(m+2n-2\mu-2r+4)\cdot (m+2n-4\mu-2r+4)X_{n-r-2\mu+2}^m.$$

se Formel wird nun zur Auswerthung der Integrale

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}.X_{n-r}^{m+2r}.X_{n_1-s}^{m+2s}\,dx$$

d

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}X_n^m X_{n_1-s}^{m+2s}\,dx$$

nutzt. Da

$$[P^{(\lambda)}]^{(\vartheta)} = \frac{\Pi(2\vartheta)}{2^\vartheta \Pi(\vartheta)}\cdot X_{\lambda-\vartheta}^{1+2\vartheta}$$

, so ergeben sich die hier gewonnenen Formeln als Verallgeeinerungen von Sätzen über Kugelfunctionen erster Art, die hon A. Winckler 1860 aufgestellt hat. M.

GEGENBAUER. Integralausdrücke für die Function Y_n^m. Wien. Ber. LXVI. 374-379.

Durch die Substitution $2x = \xi + \xi^{-1}$ gewinnt der Verfasser s der Differentialgleichung

$$(1-x^2)y'' - (m+1)xy' + n(n+m)y = 0$$

'ei particuläre Integrale, welche bis auf constante Factoren mit n Functionen X_n^m und Y_n^m übereinstimmen. Durch Bestimmung ser Constanten ergiebt sich

$$X_n^m = \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{2^n \Pi(n)} \xi^n . F\left(\frac{m}{2}, -n, -\frac{2n+m-2}{2}, \xi^{-2}\right),$$

$$Y_n^m = \frac{2^{m+n}\Pi(m+n-1)}{m(m+2)\ldots(m+2n)} \xi^{-(n+m)} . F\left(\frac{m}{2}, n+m, \frac{2n+m+2}{2}, \xi^{-2}\right);$$

wo F die hypergeometrische Reihe bezeichnet. Aus der letzteren Gleichung wird für Y_n^m der Integralausdruck

$$Y_n^m = \frac{2^{m-1}\Pi(m+n-1)}{\Pi(n)} \int_0^1 z^{\frac{m}{2}-1}(1-z)^n\left(\xi - \frac{z}{\xi}\right)^{-(n+m)} dz$$

abgeleitet, aus dem sich wiederum mehrere andere durch die Substitution $z = \frac{u-1}{u+1}$, $u = \cos it$, $\cos iv = \frac{x\cos it + \sqrt{x^2-1}}{x + \cos it\sqrt{x^2-1}}$ ergeben. M.

L. Gegenbauer. Note über die Functionen X_n^m und Y_n^m. Wien. Ber. LXV. 373-377.

Die Functionen

$$X_n^m = \frac{m(m+2)\cdots(m+2n-2)}{\Pi(n+2m-1)}\left[(x^2-1)^{\frac{2n+m-1}{2}}\right]^{(n+m-1)},$$

$$Y_n^m = \frac{(-1)^{n+1}\Pi(m+2n-1)}{m(m+2)\cdots(m+2n-2)}\left[(x^2-1)^{-\frac{2n-m+1}{2}}\right]^{(-n-1)}$$

sind, wie H. Allé gezeigt, particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$(1-x^2)y'' - (m+1)xy' + n(n+m)y = 0,$$

welche für $m = 1$ die bekannte Differentialgleichung der Kugelfunctionen wird. Herr Gegenbauer findet mit Hülfe der Substitution

$$y = X_n^m \int \varphi(x)\,dx$$

ein drittes particuläres Integral jener linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, und stellt die lineare Relation auf, welche zwischen den drei particulären Integralen bestehen muss. Diese Gleichung drückt, in anderer Form geschrieben, zugleich eine bemerkenswerthe Relation zwischen den Differentialquotienten der Kugelfunctionen erster und zweiter Art aus. M.

. GEGENBAUER. Note über die Bessel'schen Functionen zweiter Art. Wien. Ber. LXV. 333-334.

. GEGENBAUER. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen zweiter Art. Wien. Ber. LXVI. 220.

. GEGENBAUER. Entwickelung nach den Functionen X_n^{2r+1}. Wien. Ber. LXVI. 415-421.

. SCHLAEFLI. Sopra un teorema di Jacobi recato a forma più generale ed applicato alla funzione cilindrica. Brioschi Ann. (2) V. 199-205.

Der Verfasser bringt zunächst das Integral

$$S = \int_1^x (t^2-1)^{a-\frac{1}{2}} \frac{dt}{(x-t)^a},$$

› der reelle Theil von a zwischen $-\frac{1}{2}$ und 1 liegt und x reell d > 1 ist, durch die Substitutionen $t = x-(x-1)u$, $\frac{x-1}{x+1} = y^2$, $= \cos h.\vartheta$ auf die Form

$$(1) \qquad S = 2^a \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\,\Gamma(1-a)}{a\,\Gamma(\frac{1}{2})} \sin h\cdot a\vartheta,$$

.d wendet diese Formel zum Beweise der Gleichung

$$\left(\frac{x}{2}\right)^a \int_0^\infty e^{-x\cos h.\vartheta} \sin^{2a} h\cdot\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-x\cos h\cdot\vartheta} \cos h\cdot a\vartheta\cdot d\vartheta,$$

elche er in einer früheren Arbeit (Brioschi Ann. (2) I. 241 siehe d. M. I. p. 112) nicht direct beweisen konnte, an. Die obige ›rmel steht im Zusammenhange mit einem Theorem von Jacobi 'ormola transformationis integralium definitorum, Crelle J. XV.), ıs verallgemeinert die Form hat:

$$(2) \qquad \frac{1}{2i\pi} \int \frac{(t^2-1)^{a-\frac{1}{2}}}{(t-\cos h\cdot\vartheta)^a}\, dt = 2^a \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(1+a)} \sin h\cdot a\vartheta,$$

o der Weg von t eine von 1 ausgehende Schlinge um $\cos h\cdot\vartheta$ t, die den Punkt -1 ausschliesst. Hiervon wird nun Anwenıng gemacht auf die Entwickelung der Cylinder-Functionen

oder der Bessel'schen Functionen. Vergl. die frühere Arbeit des Verfassers: Sulle relazione tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di Riccati, Brioschi Ann. (2) I. 232—242, F. d. M. I. 112. M.

F. G. Mehler. Ueber die Darstellung einer willkürlichen Function zweier Variabeln durch Cylinderfunctionen. Clebsch Ann. V. 135-140.

Es handelt sich um den Beweis des Neumann'schen Satzes:

$$f(r_1,\varphi_1) = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int f(r,\varphi)J(n\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\varphi-\varphi_1)})d\varphi.rdr.ndn,$$

zwischen den Grenzen $\varphi = 0\cdots 2\pi$, $r = 0\cdots\infty$, $n = 0\cdots\infty$, wo $J(x)$ die Fourier-Bessel'sche oder Cylinderfunction erster Art ist (vergl. C. Neumann, Allg. Lösung des Problems über den station. Temperaturzustand e. hom. Körpers etc., Halle 1862). Der Verfasser bemerkt zunächst, dass jenes dreifache Integral mit der nach Kugelfunctionen fortschreitenden Entwickelung:

$$F(\vartheta_1, \varphi_1) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{2s+1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\vartheta.\sin\vartheta\int_0^{2\pi}F(\vartheta,\varphi)P^s(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos\overline{\varphi-\varphi_1})d\varphi$$

in einem ebenso directen Zusammenhang steht wie die Fourier'schen Doppelintegrale zu den Fourier'schen Reihen. Zum Beweise der Neumann'schen Formel benutzt Herr Mehler ein Theorem des Herrn P. du Bois-Reymond (Borchardt J. LXIX. 78 und Clebsch Ann. IV. 365 siehe F. d. M. I. p. 101, III. p. 138) zunächst zur Erledigung eines speciellen Falles, und schliesst auf die Allgemeingültigkeit desselben mit Hülfe der von Dirichlet in dem analogen Falle der Kugelfunctionen angewandten geometrischen Betrachtungsweise. M.

W. Ermakoff. Ueber die Cylinderfunctionen. Clebsch Ann. V. 639-640.

Der Verfasser macht die Bemerkung, dass das oben genannte dreifache Integral durch eine einfache Transformation des Fourier'schen Integrals

$$'(x_1, y_1) = \frac{1}{4\pi^2}\int\int\int\int_{+\infty}^{-\infty} F(x,y)\cos\{\alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)\}\partial x\partial y\partial\alpha\partial\beta$$

rhalten werden kann. M.

. G. MEHLER. Notiz über die Dirichlet'schen Integralausdrücke für die Kugelfunction $P^n(\cos\vartheta)$ und über eine analoge Integralform für die Cylinderfunction $J(x)$. Clebsch Ann. V. 141-144.

Aus den beiden von Dirichlet (Crelle J. XVII. 41) für $P^n(\cos\vartheta)$ egebenen Integralformen leitet der Verfasser zwei einfachere er, deren eine für sich allein schon bei der Untersuchung der ach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihe die Stelle der beiden on Dirichlet angewandten Ausdrücke vertreten kann. Aus ihnen rgiebt sich die Gleichung

$$\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \frac{2}{\pi}\int_x^\infty \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-x^2}},$$

eren linke Seite durch die Substitution $\alpha = x\cos\lambda$ die Integralrm für $J(x)$ liefert. Da die Begründung des Grenzüberganges eim zweiten Integrale sehr umständlich ist, so weist der Verfasser noch auf andere Art die für $J(x)$ gewonnene Integralform ach. M.

. LIPSCHITZ. Entwickelung eines Zusammenhanges zwischen den quadratischen Formen von n Differentialen und den Abel'schen Transcendenten. Borchardt J. LXXIV. 150-171.

Jacobi hat in einer Note: „Von der geodätischen Linie auf nem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkürdigen analytischen Substitution", Berl. Monatsber. 1839 und relle J. XIX. 309, sowie ausführlicher in den Vorlesungen über ynamik (Vorl. 26 und 30), das Wesen der Transformation durch ie Substitution der verallgemeinerten elliptischen Coordinaten useinandergesetzt. Diese Transformation eröffnet einen Zusamenhang zwischen den Formen, welche ein Aggregat der Qua-

drate von *n* Differentialen sind, und den Abel'schen Transcendenten. Die vorliegende Arbeit, in der dieser Zusammenhang dargelegt wird, schliesst sich unmittelbar an des Verfassers: „Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung“, Borchardt J. LXXIV. 116—149 (siehe p. 180); und giebt eine Anwendung der Methoden, welche der Verfasser in dem Aufsatze: „Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von *n* Differentialen“, Borchardt J. LXXI. 274 und 288, dargelegt hat (vergl. F. d. M. II. 130). M.



Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

F. KLEIN. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der Universität zu Erlangen. Erlangen. A. Deichert.

In dieser Schrift wird eine einheitliche Auffassung der neueren geometrischen Methoden auseinandergesetzt, zu der die Arbeiten des Herrn Verfassers und des Herrn Lie geführt haben. Die Geometrie ist ein besonderer Fall des allgemeinen Problemes: „Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformations-Gruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.“ Besteht diese Gruppe aus allen linearen Transformationen, so fällt die Aufgabe zusammen mit der Entwickelung der auf die Mannigfaltigkeit bezüglichen Invariantentheorie in dem besonderen Sinne des Wortes. Dieser specielle Fall erläutert zugleich den Begriff der Gruppe von Transformationen: dieselben

müssen die Eigenschaft haben, dass jede Aenderung, die aus den ihr angehörigen durch Zusammensetzung hervorgeht, ihr selbst wieder angehört. Betrachtet man nun in der gegebenen Mannigfaltigkeit ein Gebilde als fest, so kann die allgemeine Aufgabe in zweifacher Weise aufgefasst werden: Man kann entweder der Mannigfaltigkeit dieses Gebilde adjungiren und auf das so erweiterte System die Transformations-Gruppe anwenden; oder man lasse das System unerweitert, beschränke aber die Transformationen auf jene in der Gruppe enthaltenen, welche das gegebene Gebilde ungeändert lassen. Daraus folgt unmittelbar der Satz: „Ersetzt man die Gruppe durch eine umfassendere, so erscheinen die früheren unveränderlichen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit als eben solche des Systemes, welches aus dem ursprünglichen hervorgeht durch Adjunction eines ausgezeichneten Gebildes, das dadurch definirt ist, dass es, als fest gedacht, der Mannigfaltigkeit unter der Gesammtheit der Transformationen nur noch die der ursprünglichen Gruppe gestattet."

Auf diesem Satze beruht das Wesen der neueren Methoden und ihr Verhältniss zur elementaren. Sie sind eben dadurch charakterisirt, dass sie an Stelle der Haupt-Gruppe d. i. der Gesammtheit derjenigen Transformationen, welche im gewöhnlichen Sinne die gegebene Mannigfaltigkeit als geometrisches Gebilde unverändert lassen, eine erweiterte Gruppe von räumlichen Umformungen in Betracht ziehen. So ist in der projectivischen Geometrie die Gruppe aller projectivischen und reciproken Umformungen zu Grunde gelegt; Fundamental-Gebilde ist der unendlich ferne Kugelkreis. Unter demselben Gesichtspunkte gegenüber der elementaren Geometrie erscheint die Geometrie der reciproken Radien, in der als Fundamental-Gebilde das Unendlich-ferne zu betrachten ist, aufgefasst als einzelner Punkt. Ein weiteres Beispiel bietet Lie's Kugelgeometrie dar. Ferner gehören hierher die Geometrie der rationalen Umformungen in Ebene und Raum; die Analysis situs, in der die Umformungen aus unendlich kleinen Verzerrungen bestehen; endlich die allgemeinen Punkttransformationen, angewandt auf die homogenen Differential-Ausdrücke und die partiellen Differentialgleichungen. Bei Dis-

ssion der letzteren tritt ausserdem die noch umfassendere
:uppe der Berührungstransformationen auf.

Im Vorstehenden ist versucht, im grossen Ganzen den Gang
:r an allgemeinen Gedanken und umfassenden Gesichtspunkten
ichen Schrift anzugeben. Von diesen möge hier nur der Satz
wähnt sein: „Die Theorie der binären Formen complexer Ver-
derlichen findet ihre Darstellung in der projectivischen Geome-
e der reellen Kugelfläche.“ St.

C. Becker. Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume. Schlömilch Z. XVII. 314-332.

Siehe Abschn. I. Cap. 2. p. 32.

ictor Schlegel. System der Raumlehre nach den Principien von Grassmann's Ausdehnungslehre. Leipzig. Teubner. 8.

Wenn Grassmann's fundamentale Arbeiten bis auf die neueste
eit ziemlich unbeachtet waren und man jetzt erst eigentlich be-
innt, auf dieselben aufmerksam zu werden und die mannig-
ichen tiefen Gedanken zu erfassen, die er in denselben nieder-
gte, so ist das zum Theil in der ausserordentlich abstracten,
llgemeinen und eigenartigen Form begründet, welche Grassmann
ir seine Darstellung gewählt hat, und die das Verständniss der-
lben für Jeden, der nicht von Vornherein mit der Absicht des
utors bekannt ist, ausserordentlich erschwert. Um so nützlicher
heint ein Versuch, wie ihn das vorliegende Werk bringt, dem
iblikum die Grundvorstellungen Grassmann's in leichterer Form
gänglich zu machen. Der Verfasser sucht dies zu erreichen,
dem er, den abstracten Standpunkt Grassmann's verlassend,
n den einfachsten Fällen ausgeht und geradezu nur Mannig-
ltigkeiten von einer und von zwei Dimensionen betrachtet, die
: Gegenbild in der Geometrie der Geraden (resp. des Punktes)
d der Ebene finden. Er entwickelt also im Wesentlichen und
ar der Reihe nach für Grössen erster, zweiter, dritter Stufe

d. h. Punkt resp. Strecke (die den unendlich fernen Punkt vertritt), Linien- und Ebenen-Theil die Gesetze der algebraischen Verknüpfung im Grassmann'schen Sinne, die Addition, die äussere und innere Multiplication. Die Darstellung lehnt sich im Ganzen an die von Grassmann in der zweiten Auflage seiner Ausdehnungslehre befolgte an; jedoch wird durch die strenge Sonderung der verschiedenen Gebiete die Einführung in die symbolische Bezeichnungsweise und die Verknüpfung der geometrischen Vorstellung mit ihr erleichtert. Andererseits sind dadurch freilich manche Wiederholungen bedingt, indem für jedes Gebiet die den früheren analogen Betrachtungen mit derselben Ausführlichkeit durchgeführt werden. Es hängt das wohl mit der Absicht des Verfassers zusammen, sich mit seinem Buche auch an das pädagogische Publikum wenden zu wollen. Mag man über die Zweckmässigkeit einer Einführung grade der Grassmann'schen Ideen in den Unterricht denken, wie man will, das Buch ist durch den doppelten Zweck weniger übersichtlich geworden, als es sonst hätte der Fall sein können. Der Verfasser unternimmt es nämlich, die meisten Lehrsätze der elementaren Planimetrie, wie sie gewöhnlich vorgetragen werden, mit Hülfe der Grassmann'schen Methoden zu entwickeln. So interessant es ist, diese bekannten Beziehungen aus allgemeineren Gesetzen entstehen zu sehen, wie z. B. den Pythagoreischen Lehrsatz aus Betrachtungen über die Differenz zweier Linientheile, so wird dabei doch häufig ein Formelrechnen nöthig, das dem in der Vorrede bezeichneten Zwecke der Ausdehnungslehre, ein Zusammengehen der räumlichen Anschauung und der Rechnung zu vermitteln, kaum entsprechen dürfte. Es tritt dies besonders ein, wo Winkelgrössen in's Spiel kommen; schon die Art, wie dieselben definirt werden, nämlich als Product einer Geraden in eine Potenz der imaginären Einheit, zeigt, dass diese Entwickelungen das Gebiet der linealen Ausdehnungslehre verlassen, wie sie denn auch in Grassmann's eigenem Werke nicht ausgeführt sind. An diese Einführung der Winkel sind dann die Sätze über die Winkel im Dreiecke, über Centriwinkel und Peripheriewinkel geknüpft. Während hierbei die Drehung der Geraden um einen ihrer Punkte benutzt wird,

ntstehen die Sätze über Flächeninhalt durch beliebige Bewegung iner auf einer Geraden gelegenen Strecke. Indem der Verfasser odann von festen in der Ebene gegebenen Strecken ausgeht, lso insbesondere von den drei Verbindungsgeraden dreier fester 'unkte, kommt er zu den Grassmann'schen Coordinaten, welche en homogenen Dreiecks-Coordinaten der neueren Geometrie enau entsprechen. An sie schliesst sich die eingehende Betrachng der Dreiecke naturgemäss an, wobei denn alle jene beannten Sätze über Transversalen, harmonische Punkte, Aehnchkeit u. s. w. mit grosser Ausführlichkeit gegeben werden. en Schwerpunkt dieser ganzen Darstellung bildet stets die Vernüpfung mit der formalen Algebra; die Erzeugung der algeraischen Curven findet (wie übrigens in Grassmann's Ausdehungslehre selbst, nicht in dessen sonstigen Publicationen) nur ine untergeordnete Stelle, was wohl durch den elementaren harakter des ganzen Buches begründet ist. Wirklich aufgestellt ird nur die Gleichung des Kegelschnittes (der auf p. 108 anführte Satz über den einen Kegelschnitt rechtwinklig schneinden Kreis enthält wohl einen Irrthum), während die Ueberhrung Grassmann'scher planimetrischer Producte in Gleichungen it gewöhnlichen Coordinaten ausführlich durchgeführt wird. ndererseits wird die Bildung regressiver Producte benutzt, um n Inhalt der sogenannten rechnenden Geometrie und der Trinometrie abzuleiten. Hier nun, wie in dem schon erwähnten schnitte über Winkelrelationen entwickelt der Verfasser einen rmalismus, der wesentlich mit demjenigen stimmt, der aus der erpretation von $x + iy$ in der Ebene hervorgeht (Equipollenzenlcul). So fruchtbar diese Methode ist, so wenig scheint sie diejenigen Gesichtspunkte, welche Grassmann wenigstens in ner linealen Ausdehnungslehre verfolgt, zu passen. Freilich st sich mit ihr die Lehre von den metrischen Eigenschaften h nicht unmittelbar verbinden. Denn hierzu bedarf sie einer gänzung, der Einführung imaginärer Elemente, und diese wird der von Schlegel noch eigentlich von Grassmann berührt. berhaupt werden die eigentlichen Grundgedanken der projectichen Anschauung nur wenig entwickelt; erst im Schlusse wird

der Lehre von den Doppelverhältnissen etc. und deren Polartheorie gedacht, während z. B. das Princip der Dualität nirgends deutlich hervortritt.

Vielleicht wäre es wichtiger gewesen, statt Grassmann's Ideengang eben als solchen, nur in elementarer Form, darzustellen, ihn im Zusammenhange und Vergleiche mit dem, was die Wissenschaft unabhängig von Grassmann in ähnlicher Richtung späterhin geleistet hat, aufzufassen. Soweit sie in dem vorliegenden Buche in Betracht kommen, sind der Hauptverdienste von Grassmann wohl wesentlich drei. Ihm verdankt einmal die formale Algebra eine ungeahnte Vertiefung, indem er das Wesen der Additions- und Multiplications-Operationen in sehr viel allgemeinerer Weise erfassen lehrte, als das vor ihm geschehen war, und in dieser Beziehung stellt sich Grassmann neben die englischen Forscher, wie etwa Hamilton. Bei ihm ist ferner die Lehre von den mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, als deren specieller Fall die Raumlehre erscheint, insbesondere die Lehre von den linealen (projectivischen) Mannigfaltigkeiten wohl zum ersten Male entwickelt. Er hat endlich durch seine Erzeugungsweise aller algebraischen Gebilde vermöge linealer Mechanismen ein neues weit aussehendes Feld der Untersuchung geöffnet.

Aber für zufällige (obgleich an sich sehr interessante) Form müssen wir es halten, wenn Grassmann die (linealen) Verknüpfungsweisen der Elemente einer Mannigfaltigkeit mit den formal-algebraischen Ueberlegungen in Beziehung setzt. Er behandelt auf diese Weise, allerdings in sehr geschickter Art, Probleme, welche die neuere Algebra ihrerseits durch Determinanten- und Polaren-Bildung beherrscht. Dabei mag gern hervorgehoben werden, dass das sog. gemischte Product Grassmann's, das in seinem Satze von der Erzeugung algebraischer Gebilde eine fundamentale Rolle spielt, von der neueren Algebra seither noch nicht in allgemeinem Sinne untersucht wurde. Die beiden Darstellungsweisen sind im Grunde kaum verschieden und die Formeln, in denen beide ihren Ausdruck finden, häufig geradezu auch dem Aeusseren nach identisch. Wir möchten ferner Grassmann's Lehre von den

ıehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten auf dem heutigen Standunkte nur als einen Anfang bezeichnen. Denn Grassmann's Iannigfaltigkeit ist nur die durch Vermehrung der Dimensionen rzielte directe Verallgemeinerung des gewöhnlichen Raumes mit einen Eigenschaften der Lage und des Maasses, während z. B. Riemann's Untersuchungen eine viel allgemeinere Richtung einchlagen und neuere Arbeiten auch diese wieder nach verschieenen Seiten hin wesentlich erweitert haben.

Wenn man, wie der Verfasser, Grassmann's Ideen abgelöst on solchen Vergleichungen vorträgt, so wird, nach Meinung des eferenten, der Leser eher abgestossen als angezogen; ihm wird ıgemuthet, Grassmann's Methoden als die absolut vortrefflichen ı betrachten, und eine solche Zumuthung fordert immer etwas nwahrscheinliches. Kln.

R. Grassmann. Die Formenlehre oder Mathematik. Stettin. Grassmann.

Der Verfasser dieses Werkes, Bruder des Begründers der ıusdehnungslehre, geht von der Meinung aus, dass alle bisherigen Darstellungen der Mathematik, welche die Logik voraussetzen, hne sie abzuleiten, die Schwierigkeiten des ersten Anfangs durch Redensarten und mit Hilfe von Trugschlüssen zu überwinden suchen, und erst weiterhin in einen streng wissenschaftlichen Weg einmünden. Das vorliegende Werk unternimmt es nun, die fünf Anfangszweige der Mathematik im weitesten Sinne des Wortes streng wissenschaftlich abzuleiten. Versteht man mit dem Verfasser unter „Knüpfung" zweier Grössen jede dem Geiste des Menschen mögliche Zusammenstellung dieser Grössen, wenn sie nur einen, und nicht mehrere Werthe hat, unter „Stifte" (Elemente) die Grössen, welche verknüpft werden sollen, ohne selbst durch Knüpfung von Grössen entstanden zu sein, und ist $\bigcirc$ das Zeichen er Knüpfung, e das Zeichen eines Elementes, so ergeben sich urch die Gegensätze der Knüpfung im „Fügen" (Addiren) und r Knüpfung im „Weben" (Multipliciren), der innern Knüpfung, o $e \bigcirc e = e$ und der äussern Knüpfung, wo $e \bigcirc e \gtrless e$, die vier sonderen Zweige der Formenlehre, als deren Stamm die Grössen-

lehre anzusehen ist. Diese vier Zweige sind: 1) die „Begriffslehre“ oder Logik, wo $e + e = e$ und $e \times e = e$ gelten (Begriffe, Urtheile, Schlüsse), 2) die „Bindelehre“ oder Combinationslehre, wo $e + e = e$ und $e \cdot e \gtrless e$ gelten (Combinationen im weitesten Sinne, binomischer Lehrsatz), 3) die „Zahlenlehre“ oder Arithmetik, wo $e + e \gtrless e$ und $e \cdot e = e$ gelten (die 7 Grundoperationen, Reihen, Gleichungen ersten Grades), 4) die „Aussenlehre“ oder Ausdehnungslehre, wo $e + e \gtrless e$ und $e \cdot e \gtrless e$ gelten (die Grundzüge der von Hermann Grassmann 1844 begründeten Lehre, „die Ausdehnungslehre“ von H. Grassmann 1862).

Jedem der fünf Theile des Werkes sind historische Einleitungen vorangeschickt. Fremdwörter sind aus der Darstellung ganz verbannt. Daher sind nicht bloss neue termini für die neu eingeführten Begriffe geschaffen, sondern auch für die meisten der Begriffe, welche mit längst bekannten zusammenfallen. Die Wahl jedes terminus soll durch eine Anmerkung, welche die Angabe der Stammwörter enthält, gerechtfertigt erscheinen. Das Werk macht keinen Anspruch darauf, der Wissenschaft neue Resultate hinzuzufügen, wohl aber, das Fundament derselben zu befestigen. Scht.

F. Müller. Offener Brief an den Herausgeber.
Hoffmann Z. III. 370-375.

Derselbe enthält eine nach Ansicht des Verfassers vollständige Aufstellung der für die Geometrie nothwendigen Postulate und Axiome. Der ersteren sind 6, der letzteren 24. H.

J. Kober, J. C. V. Hoffmann, F. Reidt, J. C. Becker. Ueber „Eintheilungen“ in der Geometrie, ein Principienstreit. Hoffmann Z. III. 347-365.

Kober stellt den Satz auf: Negative Merkmale (Negirungen der Specialität) können an sich keinen logischen Eintheilungsgrund abgeben. Wir können danach benennen, aber nicht coordiniren. Den schlagendsten Beweis, über den er noch viel zu eilig hinweg geht, führt er wenigstens an: diejenigen Lehrbücher,

elche Quadrat und Rechteck coordinirt aufstellen, ignoriren in
en Sätzen und Beweisen ihre eignen Bestimmungen, denn sie be-
achten für's Quadrat als gültig, was für's Rechteck bewiesen ist.

Hoffmann's Entgegnung geht einestheils an der Sache vorbei;
r vertheidigt das Recht der Benennung, das Kober gar nicht
igefochten hat, und führt doch stets das Recht der Eintheilung
ifür ein, für welches er wegen der bequemen Anwendung zu
nemotechnischem Zweck besonders eingenommen ist; andern-
eils sieht er, mit Verkennung der logischen Forderung, den
sus als unabänderlich an und schreibt der Autorität Vorrecht
ı, obwohl die angeführte — nach Baltzer ist das Quadrat ein
chtwinkliger Rhombus — grade für Kober spricht.

Reidt missversteht den Ausdruck „negative Merkmale", der
llerdings doppelsinnig ist, aber nicht, wie er meint, bei variiren-
er Anwendung in sein Gegentheil übergeht. Die krumme Linie,
lie divergenten Linien, haben je ein Kennzeichen (Parameter)
on „mathematisch" positivem Werth, der bei der Geraden, den
'arallelen null, nicht negativ wird. Letztere haben eine „logisch"
ositive Bestimmung, die bei der Abweichung negirt wird. Die
lehauptung Kober's richtig verstanden, d. h. im letzteren, ge-
röhnlichen Sinne, wird durch den Einwand nicht geschwächt.

Wesentlich gefördert wird der Streit durch Becker's Auf-
tellung: Die Eintheilung hat erst Bedeutung, wenn sie durch
ie Succession der Sätze gefordert wird, und muss sich nach
er Deductionsmethode richten. Es hätte wohl nur einer voll-
ändigen Durchführung dieses Gesichtspunkts bedurft, um die
ıgeregten Fragen zur unbestrittenen Erledigung zu bringen.

H.

C. V. Hoffmann. Studien über geometrische Grund-
begriffe. Hoffmann Z. III. 443-452, 523-534.

Kober. Ueber den Begriff der Richtung. Hoffmann Z.
III. 535-537.

Der zur Zeit erschienene Theil des ersteren Aufsatzes han-
t vom Begriff der Richtung. Hoffmann zeigt zuerst, wie sich

die Autoren einer Reihe aufgeführter Lehrbücher und philosophisch methodischer Schriften dazu verhalten. Der Begriff bleibt in den Lehrbüchern so gut wie unerklärt, wird aber meistens zur Definition der Geraden und Krummen angewandt. Fresenius (die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft F. d. M. I. p. 17) findet den Ursprung in der Vorstellung des Ziels, gelangt jedoch zu keiner wirklichen Begriffsbestimmung. Mauritius (Programm siehe F. d. M. II. p. 30) spricht der einzelnen Geraden das Merkmal der Richtung ab; erst der zweiten Geraden könne es relativ zukommen. (Hiernach würde aber auch der Punkt keine Lage im Raum haben. Die Relativität hebt die Gültigkeit des Begriffs nicht auf). Hoffmann vertheidigt die mathematisch exacte Gültigkeit des Richtungsbegriffs, geht ausführlich auf seine Elemente ein und zeigt, was dabei in's Spiel kommt. Da er jedoch überall die sich gegenseitig bedingenden Begriffe als fertige voraussetzt, so bleibt seine Discussion bei Eintheilung und Benennung stehen, ohne eine bündige Bestimmung zu erreichen. Er, wie alle jene Autoren, bei denen wiederholt die Aeusserung auftritt, Richtung und Gerade liessen sich nur eins durch's andere bestimmen, lassen ausser Acht, dass die Gerade ohne Hülfe des Richtungsbegriffs als Rotationsaxe erklärt werden kann.

Kober spricht nur vom Wortgebrauch, rügt den Missbrauch „gleiche Richtung“ statt „Richtung auf gleiches Ziel“, und dass man diesem zu Liebe Stellung statt Richtung sage. Letzteres ist nicht zutreffend; das Wort „Stellung“ soll vielmehr fähig sein, für solche Objecte zu passen, wo Richtung nicht verständlich sein würde. H.

V. Schlegel. Zum Streit über die unendlich entfernten Gebilde. Hoffmann Z. III. 155-158.

J. C. Becker. Noch einige Bemerkungen über die unendlich fernen Gebilde. Hoffmann Z. III. 158-159.

J. C. V. Hoffmann. Der unendlich ferne Punkt in Steiner's systematischer Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten. (Berlin 1832. I. Theil.) Hoffmann Z. III. 160-162.

KOBER. Ueber das Unendliche und die neuere Geometrie. Hoffmann Z. III. 249-264.

ERLANG. Einige Bemerkungen über die Begriffe eben, gerade, parallel als Grenzbegriffe. Hoffmann Z. III. 265-267.

Schlegel zeigt, dass für Grassmann's Ausdehnungslehre der ıendlich entfernte Punkt kein Bedürfniss sei. Dasselbe gelte ıch von der synthetischen Geometrie, wo er nur zur Bequem- ɔhkeit des Ausdrucks ohne sachliche Wirkung aufgenommen i. In der Analysis will er das Zeichen ∞ nur als Ausdruck ɔr Unmöglichkeit der Lösung gelten lassen, eine Bemerkung, ıe wohl überall eher zutrifft als in der Analysis.

Becker nennt das Bedürfniss des unendlich fernen Punkts ıbestreitbar, was er Sturm einräumt, womit er jedoch zugleich ıne Nachweis die Ausführungen Schlegel's umwirft. Nur müsse erselbe als Function aufgestellt werden, was Sturm indirect zu- estanden habe.

Nach den eigenen Worten Steiner's, welche Hoffmann citirt, st der unendlich ferne Punkt ein Name, berechtigt insofern zu einen aus dem Punktbegriff hervorgehenden Schlüssen. Sie eigen positiv und so deutlich, als man es nur wünschen kann, ass Steiner an den Aufstellungen, welche Sturm als nothwendig ür die synthetische Geometrie aufgestellt hatte (vergl. F. d. M. II. 226), keinen Theil hat.

Der erste und zweite Abschnitt der Schrift von Kober, über Ioppe's Aufsatz III. p. 11 und über Sturm's Aufsatz II. p. 391, ieten keinen Anlass zur Besprechung: der Verfasser hält dem etzteren nur oft gesagte Wahrheiten vor. Im dritten Abschnitt das Unendliche und die neuere Geometrie in der Schule“ be- nt er, dass vor der Anwendung des Unendlichen im Sinne der eueren Geometrie der Begriff des Unendlichen erst in allen ällen seines Vorkommens, die er einzeln durchgeht, reichlich läutert werden müsse. Der Hauptpunkt bleibt leider unberührt, ıss der Schüler auch den exacten Schluss aus der unendlich einen Differenz lerne, da er ohnedies entweder keinen oder ischen Gebrauch vom Begriffe machen wird. Das von Kober

Empfohlene ist z. B. im Lehrbuch von A. F. G. Th. Gauss, freilich noch zu sparsam, in Ausführung gebracht; dennoch fällt dasselbe beim Beweisen in den alten Fehler zurück: es zeigt überflüssigerweise das Enthaltensein zwischen 2 Grenzen, und lässt den zur Evidenz nothwendigen Schluss weg. Wir haben daher allen Grund, auf diesen Punkt Gewicht zu legen.

Zerlang sagt: Treffen im Unendlichen ist nichts weiter, als nicht treffen im Endlichen. Die neue Bestimmung ist so wenig positiv als die alte. Er empfiehlt die Abweichung vom Gesetz stets als den positiven Begriff aufzufassen, da dessen Merkmale stets in die Augen fallen; das Gesetz ergiebt sich dann als Grenzfall, parallel zwischen convergent und divergent, gerade und eben zwischen concav und convex u. s. w. H.

J. Frischauf. Absolute Geometrie nach Johann Bolyai. Leipzig. Teubner.

Eine Bearbeitung der Grundzüge der Bolyai'schen Geometrie nach dem Appendix des Johann Bolyai zu dem Werke von Wolfgang Bolyai: „Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva evidentique huic proprio, introducenti.“ Angefügt ist ein Anhang über die Voraussetzungen der Geometrie nach Wolfgang Bolyai. O.

A. Transon. De l'infini ou métaphysique et géométrie à l'occasion d'une pseudo-géométrie. Évreux 1871. Hérissey.

Siehe F. d. M. III. p. 13.

Definirt man den Winkel als Theil der unbegrenzten Ebene zwischen seinen Schenkeln, so bilden die Summe zweier Dreieckswinkel mit dem Scheitelwinkel des dritten zusammen einen gestreckten Winkel plus dem Dreieck, welches gegen die unendliche Grösse verschwindet. Dies ist der citirte Arnauld'sche Beweis für den Parallellensatz, dessen Bündigkeit Transon vertheidigt. Er verschweigt nicht den Einwand, dass der Winkel durch jene Bestimmung nicht als Grösse definirt sei, deshalb nicht Object

r Gleichsetzung sein könne, führt sogar selbst einige Widerrüche auf, welche sich aus einer solchen Unterstellung ergeben, eint aber, diese Widersprüche rührten nur von der Verwechseng des absoluten und variabeln Unendlich her. Auf letzteres i man gekommen unter dem Vorurtheil, dass Vorstellbarkeit r Bündigkeit nothwendig sei. Die Mathematik verlange aber r Denkbarkeit. Von hier an lässt uns der Verfasser im Stich; nn die Denkbarkeit zeigt er gar nicht, sondern lässt statt der gründung ein Plaidoyer folgen, nur gestützt auf beispielsweise rgeführte Schwächen der Gegner. H.

. Beltrami. Teorema di geometria pseudosferica. Battaglini G. X. 53.

Zieht man von den Punkten der Abscissen-Axe in einer uclidischen Ebene Gerade, welche mit dieser Axe einen Winkel inschliessen, der gleich ist dem Winkel der Parallelen zur Ordinaten-Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems, wenn die Ebene nicht-euclidisch wäre, so ergiebt sich als Einhüllende der Geraden die Huyghen'sche Tractorie, welche bekanntlich auch Meridian-Curve der pseudosphärischen Rotationsflächen ist.

St.

. Cayley. On the non-euclidian geometry. Clebsch Ann. V. 630-634.

Ableitung der von Lobatschefsky zuerst gegebenen Grundrmel der hyperbolischen Trigonometrie aus den allgemeinen ojectivischen Ausdrücken für die Entfernung zweier Punkte d den Winkel zweier Geraden. St.

. Schläfli. Nota alla memoria del sig. Beltrami, Sugli spazie della curvatura costante. Brioschi Ann. (2) V. 178-193.

Beltrami. Osservazione sulla precedente Memoria del sig. prof. Schläfli. Brioschi Ann. (2) V. 194-198.

Die Umkehrung eines bekannten Satzes von Herrn Beltrami

(F. d. M. I. p. 208) führt zur Aufgabe: Alle Räume von n Dimensionen zu bestimmen, in welchen jede geodätische Linie durch ein System von $n-1$ linearen Gleichungen dargestellt wird. Herr Schläfli zeigt, dass dieser Bedingung nur Räume von constanter Krümmung Genüge leisten. Die Grenze eines solchen Raumes ist ein Raum zweiter Ordnung von $n-1$ Dimensionen, der, wie Herr Beltrami bemerkt, in der Metrik jenes Raumes die Rolle der Cayley'schen absoluten Grenzfläche zweiter Ordnung übernimmt. St.

F. August. Untersuchungrn über das Imaginäre in der Geometrie. Pr. Berlin.

Im ersten Abschnitte dieser Abhandlung werden die complexen Elemente der Ebene und des Raumes übereinstimmend mit v. Staudt definirt und zwar in der Art, dass dieselben zurückgeführt werden auf den complexen Punkt einer reellen Geraden, dessen Bedeutung analytisch abgeleitet wird. Ferner sind die linearen Constructionen allgemein durchgeführt.

Der zweite Abschnitt enthält zwei Beispiele zur Uebertragung geometrischer Betrachtungen auf das imaginäre Gebiet. 1) „In zwei in derselben reellen Ebene befindlichen gleichartigen Gebilden, welche durch Zuordnung von drei Paaren von Elementen projectivisch aufeinander bezogen sind, beliebig viele zugeordnete Paare zu construiren". Dabei werden eine Reihe von Focaleigenschaften der Kegelschnitte gewonnen. 2) „Den geometrischen Ort aller Geraden zu bestimmen, welche drei gegebene windschiefe Gerade schneiden". Es wird gezeigt, dass auf diese Weise alle reellen Flächen zweiter Ordnung erhalten werden.

St.

F. Klein. Zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie. Gött. Nachr. 1872. 374-379.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass man die Staudt'sche Repräsentation der complexen Elemente in der Geometrie in gemeinem Sinne vereinfachen kann, indem man den

naginären Punkt einer Geraden nicht durch vier harmonisch
elegene reelle Punkte derselben, sondern durch drei beliebige
elle Punkte der Geraden bestimmt, zu denen der imaginäre
unkt äquianharmonisch ist. Kln.

. CAYLEY. On the superlines of a quadric surface in five dimensional space. Quart J. XII. 176-180.

In einem Raume von fünf Dimensionen hat eine Oberfläche
reiten Grades zwei dreifach unendliche Systeme von Superlinien
uperlines), so dass jede Superlinie jedes Systems jede Super-
nie desselben Systems schneidet. Eine Superlinie des einen
ystems schneidet im Allgemeinen keine Superlinie des anderen
ystems; aber es kann vorkommen, und dann schneidet sie nicht
 einem blossen Punkt, sondern in einer Linie.

(Zur Erläuterung der Nomenclatur diene, dass wir in der
eometrie mit fünf Dimensionen haben: „Raum (space), Ober-
äche (surface) supersurface, supercurve, Curve (curve) Punkt-
ystem (pointsystem), je nachdem zwischen den Coordinaten
 1, 2, 3, 4 oder fünf Gleichungen bestehen; wenn die Gleichun-
en linear sind, hat man „space, plane, subplane, superline, line,
oint).

Der obige Satz für die Superlinien einer Oberfläche zweiten
rades wird durch eine unabhängige Analysis aufgestellt, aber
r ist in Wirklichkeit eine Folge der Correspondenz, welche
wischen den Linien des gewöhnlichen Raumes und den Punkten
ner Oberfläche zweiten Grades im Raume mit fünf Dimensionen
istirt. Cly. (O.)

. G. ZEUTHEN. Om Dualitetsprincipet. Zeuthen Tidsskr. (3) II. 161.

Bemerkungen zur Geschichte der modernen Geometrie.
Siehe F. d. M. III. p. 234. Hn. (Wn.)

JORDAN. Essai sur la géométrie à n dimensions. C. R. LXXV. 1614-1617.

Herr Jordan giebt den Inhalt einer Abhandlung an, in welcher er die Geometrie des Raumes von *n* Dimensionen im Zusammenhange behandelt hat. Sie enthält Untersuchungen über Parallelismus und Perpendicularität der durch lineare Gleichungen definirten Mannigfaltigkeiten, über die Simultan-Invarianten derselben, über orthogonale Substitution nebst einer Reihe phoronomischer Anwendungen. St.

C. Flye Ste. Marie. Études analytiques sur la théorie des parallèles. Paris. Gauthier-Villars. 1871. Recension von J. Frischauf, Schlömilch Litz. XVII. 33-34.

Da dem Referenten das Buch selbst nicht zugänglich war, so folgt hier eine kurze Inhaltsangabe nach der Recension des Herrn Frischauf. Das Buch behandelt das 11te Euklidische Axiom. Während nun Lobatschefsky und Bolyai nach Aufstellung der Grundzüge der nicht euklidischen Geometrie schliesslich zu dem Satze kamen, dass die Formeln derselben für unendlich kleine Gebilde in die der gewöhnlichen Geometrie übergehen, nimmt das vorliegende Buch diesen Satz zum Ausgangspunkt. Das erste Capitel behandelt die Eigenschaften der unendlich kleinen Gebilde, namentlich den Beweis dafür, dass der Grenzwerth der Winkelsumme eines unendlich kleinen Dreiecks 2 Rechte beträgt. Das zweite Capitel beschäftigt sich mit den Eigenschaften eines Kreises mit unendlich grossem Radius. Aus diesen wird dann eine analytische Geometrie der Ebene entwickelt für ein Coordinatensystem, dessen X-Axe ein solcher Kreis ist, während die Ordinaten nach der Richtung des unendlich entfernten Mittelpunktes gezogen werden. Das dritte Capitel handelt in ganz analoger Weise von der Kugel mit unendlich grossem Radius. Das vierte Capitel beschäftigt sich mit der nicht-euklidischen Geometrie, der Kreislehre, der ebenen und sphärischen Trigonometrie und mit Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie. In einem Ergänzungscapitel endlich finden sich die Axiome der Geometrie, die Begriffe von Tangenten, Länge der Linien etc. besprochen. O.

1. DE TILLY, FLYE SAINTE-MARIE. Études analytiques sur la théorie des parallèles. Darboux Bull. III. 131-138.

Der Verfasser giebt zuerst eine Analyse des Inhalts des bei lauthier-Villars, Paris 1871, erschienenen Buchs von Flye Sainte Iarie (siehe F. d. M. III. p. 236), welcher auf verschiedenem Vege zu gleichen Resultaten wie Lobatschefsky und Bolyai geıngt ist, erkennt dessen mathematischen Theil als richtig und erdienstlich an, erklärt dagegen die philosophischen Schlussfolerungen für nicht überzeugend und schlägt eine Abänderung or, mit der Aufforderung auch gegen seine Darlegung etwaige usstellungen zu erheben. Die Angaben sind jedoch nicht zuichend, um daraus ein Urtheil über das Verhältniss der beiderbitigen Ansichten zu gewinnen. H.

Capitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (analysis situs).

F. KLEIN. Ueber einen Satz aus der Analysis situs. Gött. Nachr. 1872. 290-297.

Dieser vorläufigen Mittheilung ist inzwischen eine ausführche gefolgt. Siehe Clebsch Ann. VI. p. 132. (Das Referat erlgt im nächsten Bande). St.

ı. CAYLEY. On Listing's theorem. Messenger (2) II. 81-89.

Bericht mit Beispielen über Listing's Satz, der sich in der rbeit: „Der Census räumlicher Gestalten". Gött. Abh. X. 1862, ndet; derselbe ist eine Verallgemeinerung von Euler's Satz $+F = E+2$, welcher die Zahl von Seiten, Kanten und Ecken ı einem Polyeder in Verbindung setzt. Glr. (O.)

. HESS. Ueber die möglichen Arten und Varietäten einiger archimedeischer Körper. Marb. Ber. 1872.

Dem Verfasser haben hauptsächlich Herr Hessel durch seine „Uebersicht der gleicheckigen Polyeder u. s. w." (siehe F. d. M. III. p. 248) und Herr Wiener durch seine Abhandlung: „Ueber Vielecke und Vielflache" vorgearbeitet. Herr Hessel hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass die Begrenzungsflächen der gleicheckigen Körper nicht nothwendig reguläre, sondern nur gleicheckige Polygone zu sein brauchen, die also bei grader Seitenanzahl auch abwechselnd gleiche Seiten haben können. Herr Hess stellt sich nun die Aufgabe, die möglichen Arten und Varietäten aller gleicheckigen und gleichflächigen Körper zu entwickeln, und behandelt in der vorliegenden Mittheilung vorläufig zwei gleicheckige Körper, nämlich erstens das $(6+8+12)$-flächige (2×24)-Eck und das $(12+20+30)$-flächige (2×60)-Eck. Vermöge des Dualitätsprincips ergiebt sich natürlich eine doppelte Reihe von Resultaten. Da die Grenzflächen der gleicheckigen Körper nicht bloss reguläre Polygone von ungrader Seitenzahl, sondern auch die bisher wenig berücksichtigten $(n+n)$-seitigen $2n$-Ecke sein können, so schickt Herr Hess eine kurze Entwickelung der gleicheckigen Polygone voraus. Versteht man unter a die Zahl, welche angiebt, wie oft beim Beschreiben des gleicheckigen Polygons die Peripherie des umbeschriebenen Kreises durchlaufen wird, so hat ein gleicheckiges n-Eck so viel Arten, als diese Zahl a Werthe annehmen kann. Demgemäss hat ein gleichseitiges gleichekiges n-Eck so viel Arten, als es relative Primzahlen zu n von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ giebt und ein gleicheckiges $2n$-Eck mit abwechselnd gleichen Seiten so viel Arten, als es relative Primzahlen zu n von 1 bis $n-1$ giebt. Wenn dann a den polaren Sinn für die Ecken hat, und A bei einem gleicheckigen Körper angiebt, wievielmal beim Beschreiben der Grenzflächen durch die Bewegung eines Punktes die umbeschriebene Kugelfläche durchwandert wird, so gilt die schon von Herrn Wiener zur Bestimmung der Arten der Poinsot'schen Körper benutzte erweiterte Euler'sche Formel:

$$\Sigma(aE)+\Sigma(aF) = \Sigma(K)+2A.$$

Durch Anwendung dieser Formel erhält der Herr Verfasser die

Art-Zahlen der beiden von ihm betrachteten Körper. Der erste dieser Körper, ein (2×24)-Eck, den man sich als Oktaeder vorstellen mag, dessen Ecken durch die Flächen eines Würfels, und lessen Kanten durch die Flächen eines Rhombendodecaeders ;erade und gleichmässig abgestumpft sind, hat 4 Arten, weil A, rie der Verfasser nach obiger Formel berechnet, die 4 Werthe , 5, 7, 11 annehmen kann. Der zweite Körper, ein (2×60)-Eck iit (12+6) Flächen hat 8 Arten, indem sich für A die Werthe 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ergeben. Da bei jedem der eiden Körper A die Werthe der relativen Primzahlen von 1 bis - haben kann, so vermuthet Herr Hess ein sehr einfaches Gesetz ir die Arten der Körper, welches dem für die Arten der Polyone analog ist.

Der hier gestattete Raum erlaubt es nicht, auf den Begriff nd die Entwickelung der Varietäten der Arten einzugehen. Der /erfasser verspricht, die Anwendung seiner Betrachtungen auf ämmtliche gleicheckige und gleichflächige Körper in einiger 'eit nachfolgen zu lassen. Scht.

W. K. Clifford. On a theorem relating to polyhedra analogous to Mr. Cotterill's theorem on plane polygones. Proc. of L. M. S. IV. 178-185.

(Siehe Cotterill's Arbeit p. 139.)

Die Sätze sind folgende: Für jedes Polyeder von n Ecken, las nur dreieckige Seiten hat ($\triangle$ — *faced*, n — *acron*, Cayley) ;iebt es eine Oberfläche von der Classe $n-4$, die alle Diagonaleiten berührt. Diese Oberfläche enthält alle Diagonallinien.)ie Diagonal-Ebenen und Linien sind so gelegen, dass die Belingungen für die Berührung von Ebenen und das Enthalten von inien hinreichend sind, um eine Oberfläche von der Classe $n-4$ zu bestimmen. Wenn die Oberfläche die Ebene im Unendlichen berührt, ist der Inhalt des Körpers 0. Zur Erläuterung mag bemerkt werden, dass eine Ebene, die drei Ecken enthält, ohne Seite zu sein, Diagonalebene ist, und eine Linie, die zwei Ecken enthält, ohne Kante zu sein, Diagonallinie ist. Cly. (O.)

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie. Trigonometrie. Stereometrie).

F. G. MEHLER. Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauch an Gymnasien und Realschulen. 6te Aufl. Berlin. G. Reimer.

Das Lehrbuch enthält in gedrängter Kürze die Hauptsätze der Planimetrie, der Algebra, der Trigonometrie und der Stereometrie, sowie die wichtigsten Reihen und den binomischen Satz. Die 6te Auflage hat ausser einigen Zusätzen zur Planimetrie keine erheblichen Aenderungen der 5ten Auflage erhalten. Pr.

TH. SPIEKER. Lehrbuch der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. 6te Auflage. Potsdam.

Der Verfasser hat die ebene Geometrie auf 4 Curse vertheilt, von denen der erste Cursus die Elemente bis zu den Parallelogrammen enthält, der zweite mit einer trefflichen Anleitung zur Lösung geometrischer Aufgaben beginnt und die Euklidische Planimetrie mit der Kreisrechnung beendet. Der 3te Cursus behandelt Sätze aus der neueren Geometrie über Transversalen, harmonische Theilung, Aehnlichkeitspunkte, Chordalen, das Tactionsproblem und die Kreispolaren, während der 4te Cursus die Anwendung der Algebra auf geometrische Probleme und die metrischen Relationen am Dreiecke und am Kreise zeigt. Zwischen jedem Abschnitt sind eine Reihe von Uebungsaufgaben aufgestellt. — Der 6ten Auflage ist neben einigen Verbesserungen und Zusätzen ein Anhang vermischter Aufgaben aus allen Theilen der ebenen Geometrie hinzugefügt. Pr.

H. SCHRÖDER. Lehrbuch der Planimetrie. Halle, Schrödel und Simon.

Ein neues Lehrbuch für Schulen. Im Wesentlichen unterscheidet es sich nicht von anderen derartigen Büchern. Nur ist

ie Definition des Unendlich-Grossen und des Unendlich-Kleinen ereits in den Anfang aufgenommen. Auch der Symmetrie ist ach dem Vorgang Heilermann's grössere Bedeutung beigelegt orden. O.

. F. Lacroix. Éléments de géométrie, suivis de notions sur les courbes usuelles. 18[me] édition, revue et corrigée par M. Prouhet. 8. Paris. Gauthier-Villars.

annia e d'Ovidio. Elementi di geometria. 2ª edizione riveduta e corretta. Napoli. Trani 1871.

. Emsmann. Mathematische Excursionen. Halle a. S.

Der Verfasser giebt in 14 Abschnitten eine grosse Anzahl on interessanten neueren Sätzen und Aufgaben aus verschiedeen Gebieten der Elementarmathematik zum Gebrauche in den beren Klassen höherer Lehranstalten. Die Inhalts-Uebersicht it: 1) Der Kreis der 9 Punkte. 2) Construction der linearen Vurzeln einer quadratischen Gleichung. 3) Die Entfernungsörter es Dreiecks. 4) Der Quotient zweier Dreiecksseiten. 5) Benutzung der quadratischen Gleichung zur Bestimmung von Maximal- und Minimalwerthen. 6) Die Differenz der Höhensegmente ier Dreiecksseite. 7) Discussion der Gleichung zweiten Grades r zwei Parallelcoordinaten. 8) Einiges über Kettenbrüche.) Summation einiger Reihen. 10) Einige Sätze über Ecktransrsalen. 11) Einige Berührungsaufgaben. 12) Einige geomesche Oerter. 13) 2 Parabelaufgaben und 14) drei Lehrsätze id 2 Aufgaben aus der Stereometrie. — Als Anhang fügt der erfasser eine reichhaltige Sammlung von Aufgaben ohne Lösung s allen Theilen der Elementar-Mathematik bei.

Pr.

ompagnon. Note sur les éléments de la géométrie. Nouv. Ann. (2) XI. 127-128.

Diese Note behandelt die Halbirungslinie eines Winkels und Halbirungslinien der Dreieckswinkel. T.

E. Hain. Verschiedene Sätze und Aufgaben, welcl zugleich als Schulaufgaben benutzt werden können Grunert Arch. LIV. 493-494.

Das Viereck, welches die Winkelhalbirenden eines beliebig Vierecks bilden, ist ein Kreisviereck. Zeichnet man einen Krei welcher die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks schneidet, sind die Summen je dreier getrennter äusseren Abschnitte ei ander gleich. Zieht man von einem Punkte innerhalb ein gleichseitigen Dreiecks, Quadrats oder Rhombus nach den Seit derselben unter gleichen Winkeln an den Schnittpunkten Gerad so ist die Summe derselben constant. T.

H. Perigal. On geometric dissections and transform tions. Messenger (2) II. 103-106.

Eleganter Beweis von Euclid. I. 47 durch ein symmetrisch Zerschneiden und Verlegung der zusammensetzenden Theile. D kleinste Quadrat bleibt unberührt und das andere Quadrat a einer Seite wird in vier symmetrische Theile getheilt, welche n dem kleinen Quadrat das Quadrat über der Hypotenuse au machen. Glr. (O.)

M. Pagni. Considérations sur les polygones. Mondes (XXIX. 259-260.

Brief eines Herrn Caselli in Florenz über eine Arbeit vo Herrn Pagni: Ueber Polygone und Polyeder höherer Art. I diesem Brief wird über den Theil der Arbeit berichtet, der fo gende Frage behandelt: „En déterminant l'aire d'un polygon étoilé, faut-il avoir égard à tout son périmètre ou seulement son périmètre extérieur?" O.

S. Pellucchi. Poligonometria analytica. Genova, tip. d R. Istituto. Sordo-Muti, 1871.

Der vollständige Titel lautet: „Poligonometria analytica, nuov ramo di geometria elementare e di applicazione dell' algebra fondamento della trigonometria, onde le equazioni raggio-nume

riche complete di diverso grado per ciascun poligono regolare iscritto, ordinato in un solo teorema di geometria e ne' cinque primi poligoni, e sua relazione col circolo derivato e colla trisizione dell' angolo." M.

J. KOBER. Der umschriebene oder umgeschriebene Kreis. Hoffmann Z. III. 369-370.

Nach Analogie von „umgeben, umzäunen" ist der Kreis mit einem Tangentenpolygon umschrieben, dagegen einem Sehnenpolygon umgeschrieben. Der Verfasser hat nur nicht berücksichtigt, dass man nicht sagt „einen Kreis schreiben", sondern „beschreiben". H.

R. W. GENESE. Note on a former paper. Messenger (2) I. 181.

Bezieht sich auf die Dreitheilung des Winkels. Glr. (O.)

C. TAYLOR. Proof of Euclid II. 8. Messenger (2) I. 181.

Symmetrischer Beweis des Satzes. Glr. (O).

T. S. ALDIS. On proportion in geometry. Educ. Times XVI. 89. Hi.

R. W. GENESE, ST. WATSON, W. S. B. WOOLHOUSE. Solution of question 3511. Educ. Times XVII. 21-22.

Verbindet man die Scheitel eines Dreiecks mit den Scheiteln der gleichseitigen Dreiecke, welche auf den gegenüberliegenden Seiten errichtet sind, so schneiden sich diese Geraden zu dreien in zwei Punkten. Verbindet man ferner diese beiden Punkte mit dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so erhält man ein zweites Dreieck, dessen Schwerpunkt von dem Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks eine Entfernung hat gleich dem dritten Theile des Radius des umschriebenen Kreises. Hi.

R. TOWNSEND. Solution of question 3591. Educ. Times XVII, 35.

Sind A, B, C, D feste Punkte und ist P ein beweglicher Punkt

in einer Ebene, finde die Relation

$$\alpha \cdot PAB + \beta \cdot PBC + \gamma \cdot PCD + \delta \cdot PDA = 0,$$

welche die Flächen der Dreiecke PAB etc. verbindet.

Wenn O der Schnittpunkt der Diagonalen AC, BD ist, so gilt:

$$\frac{APB}{AOB} - \frac{BPC}{AOC} + \frac{CPD}{COD} - \frac{DPA}{DOA} = 0.$$

Hi.

J. WALMSLEY. Proof of a fundamental property of parallel straight lines. Educ. Times XVII. 103.

Hi.

R. W. GENESE. Solution of question 3674. Educ. Times XVII. 84-85.

Werden die von gegebenen Punkten einer Ebene auf eine feste Gerade gezogenen Senkrechten durch $a, b, c \cdots l, n, p$ bezeichnet, und bedeutet (abc) die Fläche des von den entsprechenden Punkten gebildeten Dreiecks, so ist der Werth des Ausdrucks

$$\frac{1}{p}\left\{\frac{(pab)}{a \cdot b} + \frac{(pbc)}{b \cdot c} + \cdots + \frac{(pln)}{l \cdot n} + \frac{(pna)}{n \cdot a}\right\}$$

von der Lage des Punktes p unabhängig. Hi.

E. HAIN. Bemerkungen über einige Punkte der äusseren Berührungskreise eines Dreiecks. Grunert Arch. LIV. 382-384.

O_a, O_b und O_c seien die Mittelpunkte der drei äusseren Berührungskreise, welche in den Verlängerungen der Seiten liegen, so ist:

1) $AB_a = AC_a = BC_b = BA_b = CA_c = CB_c = s$

$$= \frac{a+b+c}{2}.$$

2) $BO_a^2 + CO_b^2 + AO_c^2 = CO_a^2 + AO_b^2 + BO_c^2$;

3) $\varDelta\, O_a O_b O_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}$.

4) Der Radius des um das $\varDelta\, O_a O_b O_c$ geschriebenen Kreises ist doppelt so gross, wie der Radius des um ABC geschriebenen Kreises. Pr.

MET. Démonstration d'un théorème de géométrie. Nouv. Ann. (2) XI. 35-36

Beweis des bekannten Satzes: „Die Summe der Perpendikel
dem Centrum des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises
die drei Seiten ist gleich der Summe der Radien des ein-
chriebenen und umschriebenen Dreiecks." M.

RDON. Démonstration d'un théorème de Newton. Nouv. Ann. (2) XI. 38-39.

Beweis des Satzes: „Die Mitten der Diagonalen eines Tan-
tenvierecks und der Mittelpunkt des Kreises liegen in einer
raden." M.

CROCCHI. Osservazioni e questione. Battaglini G. X. 304-307.

Bemerkungen über die Fläche eines Aussensectors (d. i. des
ischen zwei Tangenten eines Kreises und dem Bogen liegen-
n Stückes), über die Abhängigkeit dieser Fläche vom Bogen
i constantem Radius, und vom Radius bei constantem Centri-
nkel. Am Ende ist die Aufgabe gegeben: Den Punkt zu
stimmen, von dem aus die Tangentenpaare an 2 gegebene
reise gleiche Aussensectoren hervorbringen. Mz.

). CALLANDREAU. Solution de la question 976. Nouv. Ann. (2) XI. 181-183.

Gegeben in einer Ebene zwei Kreise und ein Punkt. Man
oll durch denselben eine Secante so ziehen, dass die innerhalb
er Kreise liegenden Theile derselben in einem gegebenen Ver-
ältniss stehen. O.

A. L. LINTZ. Notiz über Verbindungscurven im Allgemeinen und über eine neue geometrische Construction der Korblinie aus drei Mittelpunkten. Z. dtsch. Ing. XVI. 191-193.

Im Januarheft 1872 des „Bulletin mensuel de l'association
micale des anciens élèves de l'école centrale à Paris" hat Herr

Revellat eine Construction der Korblinie mitgetheilt. Dieselbe wird hier reproducirt. Sie ist ein besonderer Fall folgender allgemeinerer Aufgabe: „Zwei beliebige gerade Linien durch einen oder mehrere Kreisbögen zu verbinden.“ Hier wird die Lösung dieser Aufgabe mitgetheilt für den Fall, dass die Berührungspunkte vorgeschrieben sind, in welchem Fall die Construction der beiden sich ergebenden Kreisbögen ohne Schwierigkeit sich ergiebt.

O.

WLACH. Erfindung der Quadratur des Kreises. Prag. C. H. Hunger.

Unwissenschaftlich und falsch. Der Verfasser findet

$$\pi = 3,\overline{1604938271}\cdots \text{ oder } \pi = 3,1605.$$

Pr.

F. J. STUDNIČKA. Zur Quadratur des Kreises. (Böhmisch.) Casopis I. 35-38.

Der Artikel hat den Zweck, allen jenen als Antwort zu dienen, die da „mit Gottes Hilfe“ die Quadratur des Cirkels gefunden haben wollen. Er enthält kurz die Gründe der Unmöglichkeit der gesuchten Lösung, dann die Zusammenstellung der Ergebnisse, die von Archimedes (250 v. Chr.) an bis Richter (1855) in Betreff der Auswerthuug des π gefunden worden, und schliesst mit Shanks Angabe der 530 Decimalstellen für diese Constante.

W.

DIDION. Expression du rapport de la circonférence au diamètre et nouvelle fonction. C. R. LXXIV. 36-39.

Der Verfasser entwickelt auf elementarem Wege zwei Formeln für π:

1) als untere Grenze

$$\pi = 2^n K \sqrt{2 - [\{\cdots[(\sqrt{4-C^2}+2)^{\frac{1}{2}}+2]^{\frac{1}{2}}\cdots+2\}^{\frac{1}{2}}+2]^{\frac{1}{2}}}$$

2) als obere Grenze

$$\pi = \frac{2^n K\cdot\sqrt{2 - [\{\cdots[(\sqrt{4-C^2}+2)^{\frac{1}{2}}+2]^{\frac{1}{2}}\cdots+2\}^{\frac{1}{2}}+2]^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2 + [\{\cdots[(\sqrt{4-C^2}+2)^{\frac{1}{2}}+2]^{\frac{1}{2}}\cdots+2\}^{\frac{1}{2}}+2]^{\frac{1}{2}}}},$$

vorin C die Seite eines in den Kreis (Radius $= 1$) geschriebeen regulären K-ecks und n die Anzahl der Potenzirungen beeutet, welche unterhalb des Wurzelzeichens ausgeführt werden ollen. Pr.

E. Catalan. Sur la notice de Mr. Didion. C. R. LXXIV. 177.

Der Verfasser zeigt, dass die gefundenen Formeln von idion nicht neu sind, sondern bereits in der Euler'schen Formel

$$\frac{\pi}{2} = \sec\frac{\pi}{4}\sec\frac{\pi}{8}\sec\frac{\pi}{16}\cdots$$

ıthalten sind. Dasselbe wird von Herrn E. de Beaumont beätigt. Pr.

ı. Frisby. On the calculation of π. Messenger (2) II. 114.

Der Verfasser hat π auf 30 Stellen mittelst der folgenden, on ihm abgeleiteten Reihe berechnet:

$$\pi = \frac{24}{10}\left\{1+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{1}{10}\right)^3+\cdots\right\}$$
$$+\frac{56}{100}\left\{1+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right)+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{2}{100}\right)^2+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{2}{100}\right)^3+\cdots\right\}.$$

Glr. (O.)

I. Hall. On an experimental determination of π. Messenger (2) II. 113-114.

Im fünften Capitel der „Théorie analytique des probabilités" eweist Laplace, dass, wenn eine Nadel von der Länge l auf ne Ebene geworfen wird, die mit parallelen geraden Linien in r Entfernung a von einander liniirt ist, die Wahrscheinlichkeit, ne Linie zu schneiden gleich $\frac{2l}{a\pi}$ ist. Auf Hall's Veranlassung ıt Herr Fox Versuche mit Nadeln von verschiedener Länge geacht und eine gute Annäherung an π erhalten. Die Arbeit thält die speciellen Angaben dazu. Glr. (O.)

W. L. Glaisher. Remarks on the calculation of π. Messenger (2) II. 119-128.

Die Bemerkungen am Anfange der Arbeit beziehen sich auf die beiden obigen Arbeiten. Herr Glaisher berichtet über Versuche, ähnlich denen des Herrn Fox, die 1855 auf Veranlassung de Morgan's von Herrn Ambroise Smith gemacht worden sind. Er bemerkt, dass die von Herrn Frisby benutzten Reihen unabhängig von einander gegeben worden sind von Hutton, Euler, H. James Thomson, Blissard und de Morgan, und discutirt einige ähnliche Reihen von Euler und Hutton. Dann folgt eine Liste der Berechner von π und der von ihnen erreichten Stellenzahl, von Archimedes bis zur Jetztzeit. Diese Liste beruht auf einer ähnlichen, die Herr Bierens de Haan in den „Verhandlingen" von Amsterdam, Bd. IV. p. 22 1858 gegeben hat. Dieselbe zeigt das allmälige Wachsen der mathematischen Hülfsmittel im Verlaufe von 2000 Jahren. Der übrige Theil der Arbeit ist hauptsächlich den Werken und Rechnungen von Ludolf van Ceulen und Snell gewidmet. Der Verfasser bringt Gründe für die Vermuthung vor, dass van Ceulen's Werth mit 35 Stellen zuerst durch die Worte auf seinem Grabe bekannt wurden. (Zusätze und Verbesserungen zu der Arbeit und zu der Liste finden sich in des Verfassers Arbeit: „On the quadrature of the circle, A. D. 1580—1630." Messenger (2) III., siehe den folgenden Band dieses Jahrbuches.) Glr. (O.)

W. Hayden. Approximate geometrical solutions of the problems of the duplication of the cube, and of the quadrature of the circle. Proc. of London XX. 525-526.

Zwei einfache geometrische Constructionen geben für $\sqrt[3]{2}$ und π folgende angenäherte Werthe:

$$\sqrt[3]{2} = \tfrac{1}{5}\sqrt{9+(1+\tfrac{3}{4}\sqrt{3})^2} = 1{,}2598754, \text{ statt } 1{,}2599210;$$

und aus

$$r = \frac{3}{20}(\sqrt{10}-\sqrt{5}), \quad m = \frac{2+r\sqrt{17-4r^2}}{8-2r^2}:$$

$$\pi = \frac{\sqrt{3+4m}+2m^2-m}{1+m^2} = 3{,}141592713, \text{ statt } 3{,}141592653.$$

Csy. (M.)

COMPAGNON. Démonstration du théorème fondamental relatif au pôle et à la polaire dans le cercle.
Nouv. Ann. (2) XI. 167-169.

Ist eine Gerade AB in den Punkten C und D harmonisch getheilt und bezeichnet E den Halbirungspunkt von AB, so ist bekanntlich: $AE^2 = BE^2 = EC \cdot ED$. Daraus ergiebt sich die Folgerung, dass $DA \cdot DB = DE \cdot DC$ oder auch: $CA \cdot CB = CE \cdot CD$ ist. Mit Hülfe dieser Folgerung wird dann der Fundamentalsatz von Pol und Polare in Beziehung auf einen Kreis bewiesen.

T.

A. FAVARO. Prime operazioni del calcolo grafico.
Att. d. Ist. Ven. (4) I. 1391-1463.

Enthält die ersten Definitionen und Sätze über die Operationen des graphischen Rechnens. Jg. (O).

H. J. HALL. Elements of plane and spherical trigonometry. 12mo. W. H. Allen.

Hi.

. F. HEATHER. Practical plane geometry. 12mo. Lockwood.

Hi.

A. ZIEGLER. Fundamente der Stereometrie in neuer und verbesserter Durchführung zum heuristischen Unterrichte. München.

Der Verfasser giebt in 10 Abschnitten die Fundamente der Stereometrie nach heuristischer Methode. Der erste Abschnitt handelt vom Parallelismus der Geraden und Ebenen und enthält einen kurzen Anhang über Stereoscopie; der zweite behandelt die Normalprojection und einen Anhang über Axonometrie, der dritte den Keil und einen Anhang über Planspiegel. Der vierte Abschnitt enthält eine interessante Bearbeitung der Sphärik, deren Sätze analog den Sätzen der Planimetrie geordnet sind, der fünfte enthält die Messung der Rotationsflächen nebst einem Anhang über Hohlspiegel, der sechste die Kegelschnitte und einen Anhang

über stereographische Projection, der siebente Abschnitt handelt von den Prismen und Cylindern, der achte von den Pyramiden, Kegeln und Kugeln, der neunte von den Schichten und Rotationsschichten und der zehnte von den Polyedern, wobei neben den regulären Körpern auch halbregelmässige Körper, die wichtigsten Krystallformen u. s. w. betrachtet werden. Zu den einzelnen Abschnitten sind Uebungsaufgaben ohne Lösungen gegeben.

Pr.

J. J. Hemming. Die dreiseitige körperliche Ecke. Schlömilch Z. XVII. 159-164.

Einfache Ableitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie auf Grund einer constructiven Behandlung des Dreikants; (siehe Schlömilch Z. VIII. 428).

Pr.

A. Pánek. Ueber goniometrische Grundformeln. Casopis I. 202-203. (Böhmisch).

Wenn die aus der Ecke C auf die Gegenseite AB im $\triangle ABC$ gefällte Senkrechte die Gegenseite in die Abschnitte $AE = m$, $EB = n$ theilt, so ist nach dem Sinus-Satze:

$$b:(m+n) = \sin B : \sin C$$

oder da

$$C = 180 - (A+B),\; b\sin(A+B) = (m+n)\sin B$$
$$= (a\cos B + b\cos A)\sin B$$

oder

$$(\text{da } a\sin B = b\sin A),\; \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B.$$

Auf Grund der Gleichungen

$$\cos^2(A+B) = 1 - \sin^2(A+B),\; 1 = \sin^2 A + \cos^2 A$$

ergiebt sich nach einfacher Addition, wenn wir hierauf die Quadratwurzel bestimmmen, die zweite Grundformel:

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

W.

J. Hoüel. Die sogenannte „separirte Tangentenformel“ und die Hülfswinkel. Hoffmann Z. III. 377-378.

Aus zwei Dreiecksseiten b, c und dem Winkel A kann man

rect $\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$ oder auch $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$ berechnen ohne durchgehenden nterschied der Rechnungslänge; die Formel mit dem sogenannten ülfswinkel hingegen ist unnütz. H.

. U. HOLM. Deduction af eqvationen, som framställer sambandet mell an kordan för en cirkelboge och kordan för en nite part af bögen. Stockholm.

Bekannte Anwendung des Moivre'schen Theorems. Bg.

J. WALKER. Solution of question 3339. Educ. Times XVI. 29.

Wenn l, m, n die Bögen bezeichnen, die von den Scheiteln B, C eines sphärischen Dreiecks nach den Mittelpunkten der genüberliegenden Seiten gezogen sind, und λ, μ, γ diejenigen schnitte auf diesen Bögen, welche den Scheiteln zunächst gen, so ist

$$\frac{\operatorname{tg} l}{\operatorname{tg}\lambda}=\frac{1+\cos b+\cos c}{\cos b+\cos c}; \quad \text{etc.}$$

$$\operatorname{tg}^2 l=\frac{\sin^2 b+\sin^2 c+2\sin b\sin c\cos A}{(\cos b+\cos c)^2}$$

Hi.

. J. WALKER. Solution of question 3173. Educ. Times XVI. 49.

In einem sphärischen Dreiecke ABC sei D der Mittelpunkt r Seite BC, E ein anderer Punkt in Bc, so dass

$$\angle BAE=\angle DAC,$$

rner sei AF der Bogen durch A rechtwinklig zu BC, dann ist

$$\frac{\cos AEB}{\cos ADB}=-\cos(B+C); \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}DAE=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A.$$

$$\operatorname{tg} EAF=\frac{\sin^2\frac{1}{2}c-\sin^2\frac{1}{2}b}{\sin^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c+\sin^2\frac{1}{2}c\cos^2\frac{1}{2}b}\cot(B+C)$$

$$\cot ADB=\frac{\cot C-\cot B}{2\cos\frac{1}{2}a}; \quad \frac{\operatorname{tg} AE}{\operatorname{tg} DE}=\frac{\sin b\sin c}{1-\cos b\cos c}.$$

Hi.

R. W. Genese, R. Tucker. Solution of question 3576.
Educ. Times XVI. 107.

Sind D, E, F die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB eines sphärischen Dreiecks und O der Schnittpunkt der Bögen AD, BE, CF, so ist

$$\frac{\sin AD}{\sin OD} = \frac{\sin BE}{\sin OE} = \frac{\sin CF}{\sin OF} = \{2(\cos a + \cos b + \cos c) + 3\}^{\frac{1}{2}}.$$

Hi.

A. Cayley. On an identity in spherical trigonometry.
Messenger (2) I. 145.

Die in Rede stehende Identität ist

$$(1-\alpha\beta\gamma)(1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta\gamma)$$
$$= (1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)+(\alpha-\beta\gamma)(\beta-\gamma\alpha)(\gamma-\alpha\beta),$$

wo α, β, γ die cosinus der Seiten sind. Mit Hülfe davon erhält man bequeme Ausdrücke für

$$1+\cos(A+B+C) \text{ etc.}$$

Glr. (O).

L. Lalanne. Note sur quelques relations entre les quantités angulaires des polyèdres convexes.
C. R. LXXIV. 602-604.

Die hier mitgetheilten Sätze sind bereits bekannt. Vergl. Baltzer, Elemente d. Math. II. p. 223. St.

J. M. Wilson. Solid geometry and conic sections.
London. Macmillan. 12mo.

Hi.

Compagnon. Note sur les éléments de géométrie.
Nouv. Ann. (2) XI. 268-273.

Die Formeln für den Inhalt einer Pyramide und einer abgestumpften Pyramide werden mit Hülfe des Satzes abgeleitet, dass eine Pyramide, welche zur Basis ein Parallelogramm hat, von einer durch zwei gegenüberliegende Kanten gelegten Ebene halbirt wird. Scht.

EHRINGER. Ueber die Kugelzone. Schlömilch Z. XVII. 255-256.

Die Note behandelt einen neuen Satz von dem Flächeninhalt r krummen Oberfläche der Kugelzone, welcher aussagt, dass rselbe gleich dem Flächeninhalte einer Ellipse ist, deren Halbxen gleich den Sehnen sind, die man in einem Axenschnitt der ugelzone von den Endpunkten des Durchmessers eines Grundreises nach dem einen Endpunkte des Durchmessers des andern rundkreises ziehen kann. Anwendungen auf die Kugelkalotte id auf die ganze Kugel schliessen sich daran. T.

. ZIEGLER. Einfache Theorie der stereographischen Projection. Hoffmann Z. III. 151-154.

Der Verfasser zeigt die Verwendung des Gegenstandes für n Gymnasialunterricht. H.

. JUNGHANN. Krystallometrische Formeln. Schlömilch Z. XVII. 445-464.

Der Verfasser zeigt, dass die Behandlung der krystallomeschen Aufgaben sich vereinfacht, wenn man darauf statt der ialytischen Geometrie oder der sphärischen Trigonometrie das rincip der Tetraedrometrie anwendet. Pr.

KREJČI. Anfänge der mathematischen Krystallographie. Casopis I. 60-71. (Böhmisch.)

W.

Capitel 4.

Darstellende Geometrie.

ARNIER. Éléments de géométrie pratique. 8vo avec un atlas in folio. Paris. Gauthier-Villars.

DE LA GOURNERIE. Traité de géométrie descriptive. Paris. Gauthier-Villars.

LEROY. Traité de géométrie descriptive. 9e édition revue et annotée par M. Martelet. 4o. avec atlas. Paris. Gauthier-Villars.

O.

W. H. COLLINS. Perspective, or the art of drawing what one sees. 8vo. London. Longmans.

Hi.

W. CHITTY. Linear perspective, in theory and practice. 4to. (Man. Heywood). London. Simpkin.

Hi.

PERCIVAL FROST. Elementary treatise on curve-tracing. 8vo. London. Macmillan.

Hi.

G. DELABAR. Anleitung zum Linearzeichnen. Heft 10. Freiburg i. B. Herdlein.

Das vorliegende Heft (s. F. d. M. III p. 254) enthält Anleitungen zum Construiren und Zeichnen der wichtigsten Maschinentheile.

O.

A. BRUDE. Das Zeichnen der Stereometrie. Stuttgart. J. Maier.

Eine Reihe elementarer Constructionsaufgaben der Stereometrie sind in einem gegebenen Würfel, von welchem ein perspectivisches Bild auf der Zeichenebene entworfen ist, und bezogen auf denselben, ausgeführt. Ausser den ersten Vorbereitungen sind einige Krystallformen, welche aus dem Würfel hervorgehen, die Schnittlinien verschiedener einfacher Körper, die Kegelschnitte und einige decorative Zeichnungen dargestellt. Für einen Theil der Constructionen sind stereoskopische Abbildungen beigegeben.

Schz.

C. PELZ. Ueber die Bestimmung der Axen von Centralprojectionen des Kreises. Prag. Ber. 1871. 2. Abth. 33-36.

!. Pelz. Ueber die Axenbestimmung von Centralprojectionen der Flächen zweiten Grades. Wien. Ber. LXVI. 481-490.

Die sämmtlichen von jedem Punkt einer Geraden P auf seine olare bezüglich eines gegebenen Kegelschnittes Σ gefällten Senkechten umhüllen bekanntlich eine Parabel, welche vollständig estimmt ist durch die Brennpunkte ff' von Σ und den Pol p er Geraden P, da sie die Axen von Σ und die den Winkel fpf' albirenden Linien zu Tangenten hat; auch die Normalen in den chnittpunkten von P und Σ sind Tangenten dieser Parabel. iese Parabel ist daher dieselbe für alle Kegelschnitte der mit Σ onfocalen Schaar und für alle diejenigen Kegelschnitte, welche gend einen dieser Schaar derart doppelt berühren, dass die erührungssehne die Polare von p ist. Die Axen aller dieser egelschnitte sind Tangenten an diese Parabel, ihre Mittelpunkte egen also auf der durch p und den Mittelpunkt o von Σ betimmten Geraden po, welche die Directrix der Parabel ist. Diese arabel wird nun für die vorstehenden Constructionen benutzt; s wird ausführlich die Construction des Brennpunktes derselben nd unter Anwendung bekannter Sätze die Construction des ittelpunktes, der Axen und Brennpunkte des verlangten Kegelchnittes angegeben und ausgeführt und als besonderer Vorzug ieser Methode hervorgehoben, dass sie die Anwendung irgend ines Theiles der Distanz gestattet.

Ist nämlich in der ersten Aufgabe ff' der in der Bildebene egende Durchmesser des gegebenen Kreises K, dessen Ebene ur Tafel senkrecht angenommen wird, und C der Hauptpunkt, o ist die Centralprojection von K ein Kegelschnitt, welcher das unktepaar ff', welches als einer der Kegelschnitte der confocalen chaar mit den Brennpunkten ff' angesehen werden kann, doppelt o berührt, dass Cf und Cf' die gemeinsamen Tangenten sind.

In der zweiten Abhandlung werden die Constructionen ausgeführt, zunächst für das Rotations-Ellipsoid, das ein- und zweischalige Rotations-Hyperboloid, deren Rotationsaxe jedesmal in er Bildebene liegend angenommen wird und von welchen als egeben vorausgesetzt wird der Schnitt Σ mit der Bildebene;

unter diesen Annahmen ist also der gesuchte Kegelschnitt ebenfalls einer derjenigen, welcher Σ doppelt berührt, so dass die Berührungssehne die Polare des Hauptpunktes C ist. Am Schluss folgt noch eine Hinweisung auf die allgemeinen Flächen zweiten Grades bei beliebiger Lage der Axen. Schz.

D. Tessari. Sopra i principii della projezione assonometrica. Ann. d. R. M. Ind. di Torino II. 419, 556-566.

Nach einem kurzen Rückblick auf die Entstehung der Theorie der axonometrischen Projection, die Farisch, Möllinger, Weissbach, Sella und Anderen zu verdanken ist, will der Verfasser die bisher gewonnenen Resultate ordnen, um diesem Zweige der descriptiven Geometrie den Charakter einer strengen und geordneten Wissenschaft zu geben, die zu weiteren Entwickelungen und Untersuchungen über die unendlichen geometrischen Formen des Raumes dienen kann. Er erreicht diesen Zweck dadurch, dass er die axonometrischen Operationen ganz unabhängig von irgend welcher Rechnung macht, indem er sie auf einfache Operationen der descriptiven Geometrie zurückführt.

Nach Vorausschickung der Definition und der schon bekannten Haupteigenschaft der axonometrischen Projection geht der Verfasser zur Lösung von Problemen über, welche sich auf die Darstellung von Punkten, Geraden, Ebenen und Flächen beziehen. Von den Flächen betrachtet er die Rotationsflächen, die einhüllenden, die abwickelbaren und die windschiefen Flächen. Aus diesen Beispielen folgert der Verfasser, — worin das Wesentliche in der Methode der axonometrischen Projection liegt —, dass die axonometrische Projection einer objectivischen Figur zusammen mit ihren orthogonalen Projectionen auf die 3 Coordinaten-Ebenen, auf welche das System bezogen ist, auf zwei verschiedene Weisen aufgefasst werden kann. Erstens nämlich kann sie betrachtet werden als eine wirklich orthogonale Projection der Figur, ausgeführt auf eine gegen die 3 Coordinaten-Ebenen geneigte Wand als erste Ebene der Projection. Von dieser Figur kann man dann immer eine zweite Projection auf irgend eine andere Ebene als zweite Projectionsebene bestimmen.

ei dieser Auffassung sind alle Operationen der axonometrischen rojectionen auf solche der reinen descriptiven Geometrie zurückeführt. Zweitens kann sie als eine genaue perspectivische Darstellung der Figur betrachtet werden, in der der Augenpunkt ine unendliche Entfernung hat. Hierbei sind die Operationen er Axonometrie identisch mit denen, die an derselben Figur im elief ausgeführt werden können. Sobald es sich nun darum andelt, metrische Relationen zu bestimmen, muss die axonoetrische Projection nach der ersten Weise aufgefasst werden; andelt es sich jedoch um descriptive Eigenschaften, so ist die veite Auffassung zu adoptiren. Jg. (O.)

. Cremona. Le figure reciproche nella statica grafica. Milano. 1872.

Der Verfasser erhält als orthographische Projection zweier eiproker Polyeder die reciproken Diagramme, die in der grabischen Statik auf directem Wege dargestellt werden. Wie er innert, hat Professor Maxwell zuerst diese Herleitung gemacht. ber die von demselben betrachteten Polyeder sind, im Sinne r Theorie der polaren reciproken Figuren von Poncelet, reciprok Bezug auf ein gewisses Rotationsparaboloid, so dass in den ojectionen (orthogonal und parallel zu den Axen) die correspondenden Seiten nicht parallel sondern unter einander senkrecht nd; und eines der Diagramme muss um 90° in seiner eigenen bene gedreht werden, damit es die Lage annimmt, welche von em statischen Problem gefordert wird. Mit der vom Verfasser vorelegten Methode geben die orthogonalen Projectionen zweier eiproker Polyeder ohne Weiteres die Diagramme, welche in der raphischen Statik erhalten werden. Neben der Entwickelung ieser Methode giebt der Verfasser Anwendungen der reciproken iagramme zur Bestimmung der Spannung und des Druckes in itterwerken (travature reticolari) und betrachtet zum Schluss nige lehrreiche Beispiele. Jg. (O.)

Henri. Description d'un ellipsomètre. Ann. d. P. et Ch. (5) III. 459-460.

O.

A. Cayley. On a bicyclic chuck. Phil. Mag. 1872.

Die Beschreibung eines Zeichenapparates. Derselbe rotirt horizontal auf einer Platte (indem er nicht an der Innenseite der Axe der Drehscheibe, sondern an der Aussenseite durch ein Gestell mit Handgriff gedreht wird), und trägt ein Zeichenbrett, das sich unter einem festen von einem Steg getragenen Griffel bewegt. Zwei Punkte des Zeichenbretts beschreiben Kreise; und der Griffel zeichnet folglich eine Curve, die ein fester Punkt einer Ebene beschreibt, die sich so bewegt, dass zwei ihrer Punkte Kreise beschreiben; oder, was dasselbe ist, den geometrischen Ort der beweglichen Ecke eines Dreiecks, dessen Seiten gegeben sind und dessen beide anderen Ecken sich auf festen Kreisen bewegen. Cly. (M.).

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Ebene Gebilde.

Stoll. Anfangsgründe der neueren Geometrie. Bensheim. Ehrhard u. Comp.

Es sind die ersten Elemente der neueren Geometrie mit Ausschluss der Kegelschnitte und unter Anwendung allgemeiner Sätze auf den Kreis zusammengestellt mit der Bestimmung, Schüler der oberen Klassen für das Studium der neueren Geometrie vorzubereiten. Es soll hier jedoch nicht verschwiegen werden, dass die Verlagshandlung, die Lehrmittelanstalt J. Ehrhard u. Comp. in Bensheim an der Bergstrasse, reklamenhafte, gedruckte Recensionsschemata für dieses Buch versendet; es ist nothwendig, dass ein derartiges Gebahren zu allgemeiner Kenntniss gelangt, damit anderweitige Recensionen über Bücher dieses Verlages mit Vorsicht aufgenommen werden und derartige beleidigende Zusendungen künftig unterbleiben. Schz.

ɪ. Weyr. Bestimmung der Anzahl involutorischer Elementenpaare einförmiger mehrdeutiger Gebilde. Borchardt J. LXXIV. 189-193.

Beweis des Satzes: „Befinden sich zwei gleichartige ein-
mige und m- n-deutige Elementargebilde auf demselben Träger, besitzen sie $\frac{1}{2}[m(m-1)+n(n-1)]$ involutorische Elementen-
are“. Schn.

ɪ. Weyr. Ueber die Grundaufgabe der Involutionen dritten Grades. Prag. Ber. 1872. 28-30.

Die bekannte Eigenschaft eines Kegelschnittbüschels, in
ıen Kegelschnitt, der durch einen Scheitel des Büschels geht,
ıe Involution 3ten Grades einzuschneiden, führt, wenn man aus
m Büschel die drei Geradenpaare herausgreift, zu folgendem
z: „Die Seiten eines beliebigen Dreiecks schneiden einen be-
ɔigen Kegelschnitt in drei Punktepaaren, welche mit den drei
nkten, in denen sich die Ecken des Dreiecks aus einem belie-
en Punkt des Kegelschnitts auf diesen projiciren, drei Punkte-
ɔel einer cubischen Involution bilden“, und damit zur Lösung
r Aufgabe, eine durch zwei Punktetripel gegebene cubische
ɾolution zu vervollständigen. Sm.

ɪ. Weyr. Ueber die Singularitäten der zweiten Ordnung bei rationalen ebenen Curven. Prag. Ber. 1872. 59-65.

Für aufeinander bezogene Punktreihen, die auf einer
ionalen Curve liegen, gilt das (einfache) Correspondenz-Prinzip;
s setzt den Verfasser in Stand die Zahl der Kegelschnitte zu
ɒitteln, welche durch 4, 3, 2, 1, keinen gegebenen Punkt gehen
l die Curve bz. 2-, 3-, 4-, 5-, 6-punktig berühren; der allgemeine
z heisst: durch β beliebige und γ auf der Curve gelegene
ıkte gehen $k(2n+\beta+\gamma-5)$ Kegelschnitte, welche mit der
ve $k=6-\beta-\gamma$ unendlich nahe Punkte gemein haben; als
onders interessanter Specialfall wird der erwähnt, wo zwei der
ebenen Punkte die unendlich fernen Kreispunkte sind.

Sm.

Em. Weyr. Nota intorno alle involuzioni di grado qualunque. Battaglini G. X. 165-169.

Der Herr Verfasser beweist algebraisch einen Satz für ein allgemeines n, den er früher schon für $n=3$ bewiesen und angewandt hat. Dieser Satz sagt aus, dass die Gruppen einer Involution n^{ter} Ordnung, welche zwei n-fache reelle oder imaginäre Elemente enthält, $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Paare von projektivischen Reihen bilden, für welche die beiden n-fachen Elemente Doppelelemente sind. Wenn eine solche Involution von den Strahlen eines Strahlbüschels gebildet wird, dessen n-fache Elemente die nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten hingehenden Strahlen sind, so theilen die einer Gruppe angehörigen nStrahlen den vollen Winkel 2π in $2n$ gleiche Theile; oder die Scheitel der einem Kreise einbeschriebenen regulären n-Ecke bilden auf der Peripherie eine Involution n^{ter} Ordnung mit zwei n-fachen Punkten, welche in die unendlich fernen Kreispunkte fallen.

Von den weiteren Anwendungen des oben ausgesprochenen Satzes möge hier noch der folgende allgemeinere hervorgehoben werden. Ist C_n eine ebene rationale Curve vom Geschlechte null und der Ordnung n, $[C_p]$ ein Büschel von Curven von der Ordnung p, von dessen Basispunkten q auf C_n liegen, so dass jede Curve des Büschels C_n in $(np-q)$ veränderlichen Punkten begegnet, also auf C_n eine Involution $(np-q)^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmt wird, und haben ausserdem zwei der Curven des Büschels mit C_n eine Berührung von der Ordnung $np-q-1$, so hat die Involution die besondere Eigenschaft, dass ihre Gruppen projektivische Reihen bilden, und dass die Doppelpunkte irgend welcher zwei dieser Punktreihen die Berührungspunkte von C_n mit den beiden ausgezeichneten Curven des Büschels sind. Analoges gilt auch, wenn C_n eine Raumcurve, und (C_p) ein Flächenbüschel p^{ter} Ordnung ist, dessen Basiscurve C_n in q Punkten begegnet.

Scht.

R. W. Genese. The converse of Pascal's theorem. Messenger (2) I. 146

D. WEYR. Évaluation du rapport anharmonique de quatre droites passant par un point et touchant deux coniques. Borchardt J. LXXV. 67-75.

$S=0$ und $S'=0$ seien die in homogenen Coordinaten dar-estellten Kegelschnitte. Das anharmonische Verhältniss der vier ìeraden, welche durch einen Punkt (x',y',z') gehen und jene wei Kegelschnitte berühren, ist eine Function der variabeln x',y',z') und der in S und S' auftretenden Constanten. Sie zu estimmen, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Hat das anharmonische Verhältniss den Werth -1, bilden lso jene vier Geraden vier harmonische Strahlen, so ist der Ort er Punkte $(x'y'z')$ ein Kegelschnitt, der durch $F=0$ dargestellt ei. Diese Function F ist eine Covariante der Formen S und S'. ezeichnen Δ und Δ' die Discriminanten von S und S', so wird, enn x jenes gesuchte anharmonische Verhältniss bezeichnet, bestimmt durch die Gleichung

$$x^2-2\,\frac{F^2+4\Delta\Delta' SS'}{F^2-4\Delta\Delta' SS'}\,x+1=0.$$

mag bemerkt werden, dass, wenn die eine Wurzel dieser eichung das anharmonische Verhältniss angiebt, die andere urzel der reciproke Werth dieses Verhältnisses ist. Schn.

M. WEYR. Ueber Kreisdreiecke. Casopis I. 24-29. (Böhmisch.)

Der Verfasser, von der stereographischen Projectionsmethode usgehend, behandelt von drei Kreisbögen gebildete geschlossene ene Figuren, welche er Kreisdreiecke nennt. Zunächst beweist , dass man drei beliebige Kreise der Ebene als stereographische rojectionen dreier grössten Kugelkreise betrachten kann, d. h. lso, dass man jedes Kreisdreieck als Projection eines sphärischen reiecks ansehen kann. Wenn $A_1\,A_2\,A_3$ die drei Scheitel eines reisdreiecks sind, so schneiden sich je zwei durch einen solchen cheitel gehende Kreisbögen bei gehöriger Verlängerung in einem eiteren Punkte, wodurch drei neue Punkte $A'_1\,A'_2\,A'_3$ entstehen, elche als den ersteren $A_1\,A_2\,A_3$ conjugirt bezeichnet werden. e durch zwei conjugirte Punkte gehenden Kreise werden Trans-

versalkreise genannt. Solcher giebt es also im Kreisdreiecke drei Systeme. Zu jedem Kreisdreieck gehört ein sogenannter Hauptkreis, dessen Mittelpunkt O das Radicalcentrum der drei das Kreisdreieck bildenden Kreise ist und dessen Durchmesser der Länge der kleinsten durch O' gehenden Sehnen der drei Kreise gleich ist.

Jedem Satze aus der Geometrie des sphärischen Dreiecks entspricht ein Satz über Kreisdreiecke und umgekehrt, z. B.:

„Die grössten, die inneren Winkel eines sphärischen Dreieckes halbirenden Kreise haben einen gemeinschaftlichen Durchmesser,"	„Die, die inneren Winkel eines Kreisdreieckes halbirenden Transversalkreise sind Chordalkreise; d. h. haben zwei gemeinsame Schnittpunkte."

In ähnlicher Weise folgen noch nachstehende Sätze über Kreisdreiecke. „Die sechs Transversalkreise im Kreisdreieck, welche die äusseren und inneren Winkel halbiren, schneiden sich viermal zu dreien in je zwei Punkten. So ergeben sich vier Punktepaare QQ' und es ist für jedes derselben O ein Punkt der Verbindungslinie $\overline{QQ'}$ und $\overline{OQ}\cdot\overline{OQ'} = P^2$, wenn P den Radius des Hauptkreises bedeutet".

„Die Transversalkreise, welche die Gegenseiten rechtwinklig durchschneiden, sind Chordalkreise".

„Die Transversalkreise, welche die Aussenwinkel des Kreisdreiecks halbiren, schneiden die Gegenseiten in Punkten eines Kreises, welcher den Hauptkreis in diametralen Punkten schneidet. Dasselbe gilt von zwei inneren und dem dritten äusseren winkelhalbirenden Transversalkreise."

„Wenn man die Pole der Seiten des Kreisdreiecks (als Pol wird der Schnittpunkt der Tangenten in den Endpunkten der Dreiecksseite betrachtet) aus dem Punkte O auf die betreffenden Seiten projicirt und durch die Projectionen und die Gegenecken Transversalkreise legt, so gehen diese durch denselben Punkt."

W.

H. Schröter. Zur v. Staudt'schen Construction des regulären Siebenzehnecks. Borchardt J. LXXV. 13-24.

Es ist bekannt, dass durch Gauss (in den disquisitiones arith-

icae) seit Euclid auf dem Gebiet der Kreistheilung zum ersten
e ein Fortschritt gemacht wurde, indem er den Satz bewies,
s, wenn die Theilungszahl n eine Primzahl und

$$n - 1 = 2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{\gamma}\cdots$$

die Theilung sich auf die Auflösung von α quadratischen,
ubischen, γ Gleichungen 5[ten] Grades reducirt; ist $n-1=2^{\alpha}$,
nat man es also blos mit quadratischen Gleichungen, folglich
Zirkel und Lineal zu thun. Es sind denn auch seit jener
indung mehrfache geometrische Constructionen für die einfacheren
e gegeben, so bald nach der Erfindung für das reguläre
eck von Paucker, Rothe, Erchinger, später von Grunert (Math.
rterbuch Bd. 5 S. 811) und v. Staudt (Crelle J. XXIV. S. 251),
letzterem ohne Beweis. Herr Schröter hat die Construction
dt's etwas practischer umgeformt und bewiesen. Um nichts
uszusetzen, schickt er die trigonometrische Entwickelung, die
en quadratischen Gleichungen führt, voraus; sie hat im grossen
zen einen ähnlichen Verlauf, wie die von Legendre (Elem.
Trigonom. 110) und von Grunert gegebenen; ist

$$\cos h \cdot \frac{2\pi}{17} = C_n,$$

sind Unbekannte der quadratischen Gleichungen nach und
h Summen von vier, von zwei oder einer der 8 Grössen $C_1, \cdots,$
Die geometrische Construction, durch welche die Wurzeln
Gleichungen und schliesslich die Projectionen der Theilpunkte
einen Durchmesser erhalten werden, empfiehlt sich dadurch,
s der zu theilende Kreis der einzige gebrauchte Kreis ist;
birungen, wie sie bei Grunert wiederholt nöthig sind, ver-
den werden, besonders aber noch dadurch, dass sie der Ver-
emeinerung fähig ist, wie dies neuerdings Herr Affolter ge-
t hat; die Operation geschieht auf zwei parallelen Tangenten
Kreises und erinnert an Riemann's Transformation durch reci-
ke Radien. Zum Schlusse giebt Herr Schröter die natürlich ein-
ere analoge Construction des regulären Fünfecks. Sm.

. Jackson. Geometrical conic sections: Elementary
reatise. 8vo. Macmillan. Hi.

H. J. Stephen Smith. On the circular transformation of Möbius. Rep. Brit. Ass. 1872.

Csy.

D. Lamplugh. Proof that the middle points of the diagonals of a complete quadrilateral are collinear. Messenger (2) II. 61-62.

Der Beweis wird mit Hülfe einer Determinante geführt.

Glr. (O.)

C. Taylor. Note on Newton's theorem. Educ. Times XVI. 24.

Wenn ein Vierseit einem Kreise umschrieben ist, so giebt es einen Durchmesser des Kreises, welcher die drei Diagonalen des Vierseits halbirt. Mit den Endpunkten der einen Diagonale als Brennpunkten lassen sich eine Ellipse und eine Hyperbel beschreiben, welche je durch die Endpunkte einer der anderen Diagonalen geht, mit deren Hülfe der Beweis sehr einfach wird.

Hi.

R. Tucker and others. Solution of question 3445. Educ. Times XVI. 56.

Zwei Sehnen eines Kreises, gezogen durch einen festen Punkt im Umfange schliessen einen gegebenen Winkel ein; beweise, dass die Kreise, welche auf diesen Sehnen als Durchmesser gezogen sind, sich auf einer Limaçon schneiden. Hi.

G. S. Carr and Miller. Solution of question 3488. Educ. Times XVI. 99.

Mit parallelen Sehnen einer Parabel als Durchmessern werden Kreise gezogen. Durch den Mittelpunkt eines solchen Kreises und den Scheitel der Parabel wird eine Gerade gelegt und die Schnittpunkte derselben mit dem Kreise werden mit den Endpunkten des obigen Durchmessers verbunden. Finde den Ort der Fusspunkte der Senkrechten vom Scheitel der Parabel auf diese 4 Verbindungsgeraden. Hi.

. Cotterill. Solution of question 3574. Educ. Times XVII. 37.

Zeige, dass der Abschnitt einer Tangente zwischen den .symptoten eines Kreises vom Radius k constant und $= 2K\sqrt{-1}$ ist.

Hi.

. Cotterill. Solution of question 3717. Educ. Times. XVII. 100.

Wenn die Seiten eines Pentagons *adbec* eine Parabel beihren, so verschwindet die Fläche des Pentagons *abcde*.

Hi.

. Taylor. A system of geometrical conics. Messenger. (2) II. 97-99.

Die Arbeit giebt einen Bericht über Walker's „Generating ircle". Dieser „generating circle" (hier wird er Hülfskreis auxiliary circle" genannt) an einen Punkt in der Ebene eines egelschnittes ist der Kreis, der seinen Mittelpunkt auf dem unkte hat und zum Radius e-mal die Entfernung des Punktes on der Directrix.

Glr. (O.)

. Taylor. Point reciprocation. Messenger. (2) I. 152.

. Der Satz, dass ein Kegelschnitt reciprok in Beziehung auf nen Focus innerhalb eines Kreises sei, und zwei andere Sätze erden in einfacher Weise bewiesen.

Glr. (O).

. Foscolo. Sui semidiametri condotti dei vertici e dei punti di contatto di una linea poligonale inscritta o circoscritta ad una conica. Atti di Torino. VII. 338-361.

Der Verfasser beweist auf geometrischem Wege (d. h. verittelst der Projection eines Kreises auf eine Ebene, die durch nen seiner Durchmesser geht) einige Sätze, die ein vollstänges System von zusammengehörigen (allegati) Radiusvectoren ner Ellipse, d. h. von solchen, welche die Ellipse in n äquivalente ectoren auflösen. Dieser Begriff zusammengehöriger Radius-

vectoren kann mit passenden Modificationen auf Hyperbel und Parabel ausgedehnt werden. Jg. (O.)

G. Bruno. Alcune proposizioni sulle coniche. Atti di Torino VII. 783-798.

Elementarer Beweis einiger elementarer Eigenschaften der Kegelschnitte. Jg. (O.).

F. Rosanes. Ueber die conjugirten Punktenpaare in Bezug auf einen Kegelschnitt. Schlömilch Z. XVII. 174-176.

Der Verfasser theilt eine Modification des zweiten Hesse'schen Beweises für dessen Satz mit, dass zwei Punktepaare ein drittes Paar, nämlich dasjenige bestimmen, welches mit den beiden gegebenen die 3 Paare gegenüberliegender Ecken eines vollständigen Vierseits bilden. H.

R. Gent. Ueber den Zusammenhang der Systeme derjenigen Punkte, in welchen Kegelschnitte eine allgemeine Curve dritter Ordnung osculiren. Schlömilch Z. XVII. 476-498.

Herr Durège bespricht im 12ten Abschnitte seines Werkes „Ueber die ebenen Curven dritter Ordnung" (Teubner, 1871, siehe F. d. M. III, p. 271) die Eigenschaften der Kegelschnitte, welche eine ebene Curve zweimal dreipunktig berühren, und die Beziehungen der Lage zwischen den dadurch auf der Curve bestimmten Punktepaaren. Diese Eigenschaften und Beziehungen noch einmal von einem andern Gesichtspunkte aus abzuleiten, und einige neue Resultate hinzuzufügen, stellt der Herr Verfasser als den Zweck seiner Abhandlung hin. Zu bemerken ist, dass Herr Durège über diesen Gegenstand auch eine besondere Arbeit in den Prag. Ber. 1871, 47—63 veröffentlicht hat, über welche Herr August im III. Bande d. F. d. M. p. 272 referirt hat. Die Darstellung des Herrn Gent ist rein geometrisch und sehr ausführlich. Die wichtigsten Resultate sind etwa die folgenden.

Osculirt ein Kegelschnitt eine allgemeine cubische Curve an

zwei Stellen, so geht die Verbindungsgerade durch einen der 9 Wendepunkte, und umgekehrt. Liegen nun 6 Punkte P_1, P_2, P_3; P'_1, P'_2, P'_3, zu den 3 reellen Wendepunkten W_1, W_2, W_3 so, dass $P_1 P'_1 W_1$, $P_1 P'_2 W_3$, $P_1 P'_3 W_2$; $P_2 P'_2 W_2$, $P_2 P'_1 W_3$, $P_2 P'_3 W_1$; $P_3 P'_3 W_3$, $P_3 P'_1 W_2$, $P_3 P'_2 W_1$ gerade Linien sind, so ist das Tripel der Punkte P dem Tripel der Punkte P' in gewisser Weise zugeordnet (die connexen Inflexionstripel des Herrn Durège). Jedes so mit den drei reellen Wendepunkten in Beziehung gesetzte System zugeordneter Osculationspunkte liegt immer auf einem Kegelschnitt, und jeder Punkt des einen Tripels bildet mit jedem Punkte des andern Tripels ein Paar von Punkten, in denen ein und derselbe Kegelschnitt je dreipunktig osculirt. Zieht man ferner in den 6 Punkten eines Systems einander zugeordneter Osculationspunkte die Tangenten, so schneiden diese die Curve in 6 neuen Punkten, welche wieder ein solches System bilden. Die unendlich vielen Kegelschnitte, auf denen diese unendlich vielen Systeme liegen, bilden eine vollständige Schaar mit doppelt imaginärer Berührung, für welche die Gerade der drei Wendepunkte und der Schnittpunkt ihrer harmonischen Polaren gemeinschaftliche Seite und Gegenecke unendlich vieler Tripeldreiecke conjugirter Punkte sind. Die Betrachtung der drei speziellen Systeme einander zugeordneter Osculationspunkte, welche von den Berührungspunkten der dreimal drei Tangenten aus den drei Wendepunkten gebildet werden, führt zu 9 Punkten, in welchen die beiden Osculationspunkte eines Kegelschnitts zusammenfallen, also sechspunktige Berührung mit einem Kegelschnitt möglich ist. Bekanntlich giebt es aber 27 solcher Punkte. Die übrigen 18 werden, wie Herr Gent zeigt, durch die 6 imaginären Wendepunkte geliefert. Die Berücksichtigung der letzteren führt am Schlusse der Abbandlung zu dem Resultate, das einem System einander zugeordneter Osculationspunkte ausser den 6 reellen noch 12 imaginäre Punkte angehören, und dass diese 18 Punkte auf 4 reellen und 8 imaginären Kegelschnitten vertheilt liegen, so dass jedesmal 6 einen und denselben Kegelschnitt bilden. Die Vertheilung der dadurch erzeugten Kegelschnittschaaren wird angegeben. Fällt einer der 18 Punkte eines Systems in einen

Wendepunkt, so fallen alle 18 Punkte mit den 9 Wendepunkten so zusammen, dass jeder Wendepunkt sowohl einen Punkt P wie einen Punkt P' vorstellt. Die 12 Kegelschnitte in denen diese 18 Punkte zu je 6en liegen müssen, sind dann natürlich die 12 Geraden, auf denen die 9 Wendepunkte zu je 3en liegen.

Scht.

K. Küpper. Ueber Curven dritter Ordnung als Einhüllende von Kegelschnitten. Prag. Ber. 1871. 2. Abth. 63-68.

K. Küpper. Beiträge zur Theorie der Curven dritter und vierter Ordnung. Prag. Abh. (6) V. 1871.

Die Untersuchung bezieht sich auf Kegelschnitte, welche durch zwei Doppelpunkte a und b einer Curve vierter Ordnung gehen und dieselbe ausserdem in zwei Punkten berühren; sie umschliesst somit im Besonderen Relationen zwischen denjenigen Kegelschnitten, welche eine Curve C^3 in zwei festen Punkten schneiden und dieselbe in zwei weiteren Punkten tangiren. Die Kegelschnitte, welche jenen Bedingungen entsprechen, ordnen sich in vier Systeme, jedes derselben besteht aus den conischen Polaren der Punkte eines bestimmten Kegelschnitts in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung mit den beiden Doppelpunkten a und b. Näher auf die Beziehungen zwischen den in der Untersuchung auftretenden Gebilden einzugehen, würde an dieser Stelle zu weit führen; nur eine Construction der Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten möge noch hervorgehoben werden. Bei derselben werden benutzt zwei Kegelschnitte H und Q in beliebiger Lage. Eine variabele Tangente des Q möge den Kegelschnitt H in α und β schneiden; projicirt man alsdann α und β aus zwei festen Punkten a und b des Kegelschnitts H, so schneiden sich die Projectionsstrahlen in zwei Punkten r und s einer Curve C^4, welche in a und b Doppelpunkte hat. Ist die Gerade ab Tangente an Q, so zerfällt C^4 in die Gerade ab und in eine allgemeine Curve C^3, welche durch a und b hindurchgeht.

Schn.

.ÖHLFR. Mémoire sur la théorie géométrique des courbes du troisième ordre. Nouv. Ann. (2) XI. 21-34, 66-78, 122-127.

Ausgehend von der Erzeugung der Curven dritter Ordnung ırch ein Kegelschnittbüschel und ein mit ihm projectivisches eradenbüschel giebt der Verfasser eine synthetische Entwickelung eist bekannter auf jene Curvengattung bezüglicher Relationen.

Schn.

. Durège. Ueber die Formen der Curven dritter Ordnung. Borchardt J. LXXV. 153-165.

Die Grundlage für die Classification der allgemeinen Curven itter Ordnung, welche der Verfasser giebt, bilden folgende itze: „Wenn bei einer Curve dritter Ordnung aus einem Curvenınkte zwei reelle und zwei imaginäre Tangenten an die Curve legt werden können, so hat jeder Curvenpunkt diese Eigenschaft" ıd „Wenn von einem Curvenpunkt vier reelle Tangenten aushen, so besitzt die Curve allemal auch solche Punkte, bei nen die vier von ihnen ausgehenden Tangenten alle imaginär nd, und umgekehrt". Demgemäss zerfallen alle Curven dritter rdnung ohne Doppelpunkte in zwei Gattungen. Zur „ersten" hören diejenigen Curven, aus deren Punkten theils vier reelle, ils vier imaginäre, niemals aber zwei reelle und zwei imaginäre ngenten an die Curve gelegt werden können, zur „zweiten" ejenigen, bei denen aus jedem Punkte zwei reelle und zwei naginäre Tangenten an die Curve gehen. Beide Gattungen igen eine wesentliche Formverschiedenheit. Indem man zwei s Unendliche sich erstreckende Curvenäste, welche der nämlichen eradlinigen oder parabolischen) Asymptote sich anschliessen, ls im Unendlichen zusammenhängend betrachtet, hat man bei er Curve erster Ordnung zwei getrennte Theile zu unterscheiden, er Art, dass der eine lauter Punkte enthält, von denen vier eelle, der andere lauter solche, von denen vier imaginäre Tangenten ausgehen, während die Curven zweiter Gattung aus einem inzigen vollständig zusammenhängenden Theile bestehen. Diese ormunterschiede hat Möbius bereits als die wesentlichen erkannt.

Je nachdem nunmehr die unendlich ferne Gerade ausser dem einen reellen Punkt, den sie stets mit der Curve gemein hat, diese noch in zwei imaginären, oder zwei reellen oder zwei zusammenfallenden Punkten trifft, in welchen drei Fällen die Curve entweder eine oder drei geradlinige Asymptoten, oder endlich eine geradlinige und eine parabolische Asymptote hat, lassen sich noch für jede Gattung drei Unterabtheilungen unterscheiden. Das Eintheilungsschema, zu dem der Verfasser gelangt, ist mithin folgendes:

Erste Gattung. Die Curve besteht aus zwei getrennten Theilen U und S; aus jedem Punkte von U gehen vier reelle, aus jedem Punkte von S vier imaginäre Tangenten an die Curve. U erstreckt sich in's Unendliche und schliesst sich mit seinen beiden Aesten derselben Asymptote an.

a) Eine gerade Asymptote. S bildet ein Oval.

b) Drei gerade Asymptoten. S besteht aus zwei im Unendlichen zusammenhängenden Stücken, deren Aeste sich paarweise den beiden anderen Asymptoten nach Art einer Hyperbel anschliessen.

c) Eine gerade und eine parabolische Asymptote. S besteht aus einem in's Unendliche gehenden Stücke, dessen Aeste sich einer Parabel anschliessen.

Zweite Gattung. Die Curve besteht aus einem einzigen im Unendlichen zusammenhängenden Theile. Aus jedem Curvenpunkte gehen zwei reelle und zwei imaginäre Tangenten an die Curve.

a) Eine gerade Asymptote. Die Curve besteht aus einem Stücke, dessen unendliche Aeste sich der Asymptote anschliessen.

b) Drei gerade Asymptoten. Die Curve besteht aus drei in's Unendliche gehenden Stücken; je zwei nicht demselben Stücke angehörende Aeste schliessen sich derselben Asymptote an.

c) Eine gerade und eine parabolische Asymptote. Die Curve besteht aus zwei in's Unendliche gehenden Stücken. Der eine Ast jedes Stückes schliesst sich der geraden, der andere der parabolischen Asymptote an.

Im zweiten Theile der Arbeit wendet sich der Verfasser zu

einer Reihe bemerkenswerther Eigenschaften, welche sowohl dem Theil U der Curven erster Gattung, welcher gesondert betrachtet wird, als auch den Curven zweiter Gattung zukommen.

Da von dem Theile S der Curve erster Gattung keine reellen Tangenten ausgehen, so enthält U sämmtliche reelle Tangentialpunkte, S dagegen keine. Auf U liegen daher auch die reellen Wendepunkte w, w', w''. Ferner zeigt sich, dass von den vier m einem auf U liegenden Punkte ausgehenden reellen Tangenten ımer zwei den Theil U und zwei den Theil S berühren. In eser Beziehung verhält sich also der Theil U ganz wie eine ırve zweiter Gattung; es gehen nämlich von jedem Punkte eser Curven, welche unter dem Namen U-Curven zusammengefasst erden, zwei reelle Tangenten an dieselben. Wählt man statt ıes beliebigen Punktes auf einer U-Curve einen reellen Wendeınkt, so ist die eine dieser reellen Tangenten die Wendetangente, ährend die andere die U-Curve in einem Punkte d berühren ag. Diese Punkte d, d', d'', welche den drei reellen Wendeınkten w, w', w'' entsprechen, liegen in folgender Reihenfolge: $w'\, d''\, w\, d'\, w''\, d$, so dass also jeder Wendepunkt zwischen denenigen beiden Punkten d gelegen ist, welche den anderen beiden Wendepunkten entsprechen. Die Punkte d theilen die Curve U n drei Theile, in deren jedem ein reeller Wendepunkt enthalten ist. Zieht man nunmehr von einem beliebigen Punkte t die beiden reellen Tangenten an die U-Curve, so liegt ein Berührungspunkt stets in demselben Abschnitt, wie der Tangentialpunkt. Legt man von diesem wiederum die beiden reellen Tangenten und zeichnet den Berührungspunkt aus, welcher in demselben Abschnitt gelegen ist, und setzt dies Verfahren ohne Ende fort, so nähert sich der Berührungspunkt unaufhörlich dem in dem Abschnitte gelegenen Wendepunkte, indem er abwechselnd von der einen Seite des letzteren auf die andere hinübergeht.

Aus der Uebereinstimmung, welche die betrachteten Curven in ihren Eigenschaften zeigen, lässt sich ersehen, auf welche Weise eine Curve der ersten Gattung in eine der zweiten übergeht. Indem nämlich bei einer Curve der ersten Gattung der Theil S in einen Punkt zusammenschrumpft, entsteht eine Curve

mit einem isolirten Doppelpunkt, und diese geht in eine Curve zweiter Gattung über, dadurch dass S in allen seinen Theilen imaginär wird. Bei diesen Uebergängen behält der Theil U die Eigenschaften, die ihm, wenn er für sich allein betrachtet wird, in seinen reellen Punkten zukommen. Die Curven mit einem Doppelpunkt entstehen dadurch, dass der Theil S mit dem Theile U sich verbindet und zur Schleife wird. Diese Curven gehören weder zur ersten, noch zur zweiten Gattung, oder wenn man will, gleichzeitig zu beiden, indem sie mit jener das gemein haben, dass von ihren Punkten theils nur reelle, theils nur imaginäre Tangenten auslaufen, mit dieser dagegen das, dass sie nur aus einem zusammenhängenden Theile bestehen. Schn.

H. Grassmann. Zur Theorie der Curven dritter Ordnung. Gött. Nachr. 1872. 505-509.

Bei einer Curve dritter Ordnung lassen sich zwei Züge unterscheiden, von denen der eine durch jede Gerade in einer ungraden, der andere, der auch imaginär werden kann, in einer graden Anzahl von Punkten geschnitten wird. Den einen nennt der Verfasser den Hauptzug, den anderen den Nebenzug. Ist der Nebenzug reell, so liegt nach der Classification der Curven dritter Ordnung, welche Herr Durège gegeben hat (Borchardt J. LXXV. 153 s. p. 277) eine Curve erster Gattung vor, und zwar ist der Nebenzug derjenige Theil, von dessen Punkten keine der möglichen vier Tangenten reell ist, der Hauptzug aber derjenige, von dessen Punkten aus vier reelle Tangenten an die Curve gehen. Ist der Nebenzug imaginär, so gehört die Curve der zweiten Gattung an, von jedem Punkte des Hauptzuges gehen alsdann nur zwei reelle Tangenten an die Curve.

Man denke nunmehr auf einer Curve dritter Ordnung eine ungrade Anzahl n von einfachen festen Punkten $a_1, a_2, \cdots a_n$ und ziehe von a_1 durch einen beliebigen Punkt x_1 eine Gerade, welche die Curve zum drittenmale in x_2 schneidet, ziehe von x_2 durch a_2 eine Gerade, welche die Curve zum drittenmale in x_3 schneidet u. s. f. zuletzt von x_n durch a_n eine Gerade, welche die Curve

ım drittenmal in x_{n+1} schneidet. Die Frage: Unter welchen edingungen und wie oft wird x_{n+1} mit x_1 zusammenfallen, wird so ein geschlossenes Polygon entstehen? ist der Gegenstand vorəgender Arbeit Es wird darüber Auskunft durch folgenden ıtz gegeben: „Wenn auf einer Curve dritter Ordnung eine un-ade Anzahl n von Punkten gegeben ist, von denen eine grade nzahl auf dem Nebenzuge, die übrigen auf dem Hauptzuge gen, so giebt es vier n-Ecke, deren Ecken auf der Curve gen und deren Seiten einzeln durch die n gegebenen Punkte hen. Von diesen vier n-Ecken werden nur dann zwei imanär, wenn der Nebenzug imaginär wird. Wenn aber eine unade Anzahl der n Punkte auf dem Nebenzuge liegt, so ist kein eleck der genannten Art möglich". Für $n = 1$ gehen für ıupt- und Nebenzug der Curven dritter Ordnung diejenigen genschaften hervor, welche oben für die Tangenten, die von nem Punkt der Curve auslaufen, bemerkt sind. Schn.

. Schröter. Ueber eine besondere Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curven dritter Ordnung. Clebsch Ann. V. 50-83.

Die besondere Curve dritter Ordnung, mit der sich der Verasser im ersten Theil der Abhandlung beschäftigt, ist die Brennnktscurve einer Kegelschnittschaar, welche durch vier Tanten bestimmt ist. Diese lässt sich auffassen als der geometrische rt des Punktes, für welchen das aus den Tangentenpaaren n die Kegelschnittschaar gebildete Strahlsystem ein hyperbolisch leichseitiges wird. Indem der Verfasser nunmehr diesen Ort ı interessanter Weise synthetisch discutirt, gelangt er zu dem rgebniss, dass die Brennpunktscurve das Erzeugniss zweier rojectivischer, hyperbolisch-gleichseitiger Strahlsysteme ist, elche so liegen, dass in die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte heile entsprechender Strahlenpaare hineinfallen. Als Scheitel eser Strahlsysteme ist ein Brennpunktenpaar eines Kegelschnitts wählen, welcher der Schaar angehört. Das Erzeugniss ist ıe Curve dritter Ordnung, auf welcher jedes Brennpunktenpaar ıes Kegelschnitts als ein Paar conjugirter Punkte aufzufassen

ist; eine charakteristische Eigenschaft derselben ist die, dass die in diesen Punkten gezogenen Tangenten denselben Tangentialpunkt haben. Die Curve selbst hat den partikulären Charakter, dass die imaginären Kreispunkte im Unendlichen gleichfalls als conjugirte Punkte der Curve auftreten, so dass ihr eine ähnliche Stellung zu der allgemeinen Curve dritter Ordnung zukommt, wie dem Kreise zum allgemeinen Kegelschnitt. Dieser besondere Charakter ermöglicht eine höchst einfache Construction, die Herr Küpper zuerst angegeben hat. Indem man nämlich in einer Kreisschaar die Durchmesser zieht, welche sich in einem Punkte der Ebene schneiden, beschreiben die Schnittpunkte derselben mit dem Kreise jene Curve, von der der Verfasser handelt.

Im zweiten Theile wird die allgemeine Curve dritter Ordnung als Erzeugniss zweier projectivischer Strahlsysteme dargestellt, welche so zu einander liegen, dass der Verbindungsstrahl ihrer Mittelpunkte ein Theil entsprechender Strahlenpaare ist. Jedem Strahlenpaar ($x\,\xi$) des einen Strahlsystems entspricht ein Strahlenpaar ($y\,\eta$) des anderen Strahlsystems; diese geben Veranlassung zu zwei Paaren von Schnittpunkten

$$(x,y) \text{ und } (\xi,\eta),\ (x,\eta) \text{ und } (\xi,y).$$

Jedes dieser Paare ist als ein Paar conjugirter Punkte der erzeugten Curve aufzufassen. Die Mittelpunkte der Strahlsysteme treten gleichfalls als ein derartiges Punktenpaar auf. Eine charakteristische Eigenschaft solcher Punktenpaare ist die, dass die beiden Punkte eines Paars stets denselben Tangentialpunkt haben. Irgend zwei conjugirte Punkte können wieder als Mittelpunkte zweier anderer erzeugender Strahlsysteme aufgefasst werden, deren entsprechende Strahlenpaare nach zwei conjugirten Punkten der Curve gehen, und welche so liegen, dass in die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte Theile entsprechender Strahlenpaare hineinfallen. Daraus erhellt, dass die gegebene Erzeugung der Curve dritter Ordnung eine gewisse Analogie bietet zu der Erzeugung des Kegelschnitts durch zwei projectivische Strahlbüschel, doch mit dem Unterschiede, dass die Mittelpunkte der erzeugenden Strahlsysteme nicht ganz willkürlich auf der Curve angenommen werden dürfen, sondern eben in conjugirten Punkten

›r Curve. Von diesen Gesichtspunkten ausgehend entwickelt ›r Verfasser die wichtigsten Eigenschaften der Curve dritter rdnung und giebt zahlreiche Sätze über den Zusammenhang ›n Kegelschnittsgebilden mit jener Curve. Was letztere anbe-iﬀt, so muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Schn.

. Durège. Ueber die Curve dritter Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet. Clebsch Ann. V. 83-95.

Die allgemeine Curve dritter Ordnung wird durch zwei pro-:tivische Strahleninvolutionen erzeugt, welche so zu einander :gen, dass in die Verbindungslinie ihrer Scheitel Theile ent-rechender Strahlenpaare hineinfallen. Von derselben Erzeugung : Herr Schröter bei der Behandlung der Curve dritter Ordnung ısgegangen in einer Arbeit, welche gleichzeitig mit der vorliegen-:n in den Annalen erschienen ist (s. p. 281). Während in dieser :r Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar, welche durch vier angenten bestimmt ist, den Ausgangspunkt der Untersuchung ildet, und die Erzeugung dieses Ortes die Gedanken auf die ırzeugung der allgemeinen Curven dritter Ordnung hinüberleitet, elangt Herr Durège von der allgemeinen Curve zu der speciellen, idem er die Scheitel der Strahleninvolutionen in den imaginären reispunkten annimmt. In der That erhält man projectivische ıvolutionen von obigem Character, wenn man aus zwei be-iebigen Punkten o und o' Tangentenpaare an die Kegelschnitte einer chaar legt, welche vier feste Gerade berühren. Die Durch-chnitte entsprechender Tangentenpaare erzeugen eine Curve ritter Ordnung, auf welcher sowohl je zwei Durchschnittspunkte, ie nicht auf derselben Tangente liegen, als auch o und o' con-ıgirte Pole desselben Systems sind. Treten an die Stelle von und o' die imaginären Kreispunkte ω und ω', so schneiden sich zwei von ω und ω' an denselben Kegelschnitt gelegte Tan-:nten in den Brennpunkten dieses Kegelschnitts; es ist deshalb :r Ort der Brennpunkte diejenige Curve dritter Ordnung, welche ırch die imaginären Kreispunkte hindurchgeht und sie zu con-

jugirten Polen hat. Die Tangenten in diesen Punkten schneiden sich auf der Curve selbst; ihr reeller Durchschnittspunkt ist der Brennpunkt der in der Schaar auftretenden Parabel. Die bezeichneten Singularitäten der Curve lassen eine einfache Construction derselben zu, welche Herr Küpper zuerst angegeben hat, und die nunmehr entwickelt wird. (Vergl. den Bericht über die Abh. von H. Schröter, Clebsch Ann. V. 50—83 s. p. 281.) Zum Schluss wird der besondere Fall erörtert, dass die projectivische Zuordnung der Strahlenpaare in den involutorischen Strahlsystemen, welche die Curve dritter Ordnung erzeugen, der Art ist, dass die Doppelstrahlen einander entsprechen. Es zerfällt in diesem Fall die erzeugte Curve in eine Gerade und einen Kegelschnitt. Schn.

A. V. Bäcklund. Om några egenskaper has den plana kurvan af 3^die^ ordningen. Öfv. af Forh. Stockh. 1872.

Diese Note verfolgt zuerst eine schon früher in derselben Zeitschrift eingeschlagene Behandlung eines Entsprechens zwischen den Punkten einer Curve 3ter Ordnung und den Kegelschnitten eines Büschels, vermöge dessen diejenigen Chorden in der Curve 3ter Ordnung, die an einen und denselben Punkt der Curve gezogen sind, sich als diejenigen Chorden in einem (beliebig genommenen) Kegelschnitte abbilden, die einen und denselben Kegelschnitt berühren. Dann stellt sie ein Entsprechen dar zwischen Punkten einer Curve 3ter Ordnung einerseits und einer gewissen Reihe von Curven 4ter Ordnung mit drei Spitzen anderseits. Eigenschaften, die sich auf einen gebrochenen Linienzug beziehen, welcher einem Kegelschnitte eines Büschels eingeschrieben ist, und mittelst seiner verschiedenen Seiten verschiedene Kegelschnitte des nämlichen Büschels berührt, übertragen sich gewissermaassen auf Linienzüge, die einem Kegelschnitte eingeschrieben sind und verschiedene Curven 4ter Ordnung der obengenannten Reihe berühren. Bg.

A. Milinowski. Die Polaren der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkten. Pr. Tilsit.

Es werden mit den Mitteln der Geometrie der Lage die polaren Eigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkten entwickelt, und zwar zunächst derer mit drei Doppelpunkten, die also in drei Gerade zerfallen, dann derer mit zwei Doppelpunkten, welche aus einer Geraden und einem Kegelschnitte bestehn, endlich derer mit einem Doppelpunkte. Wesentlich Neues enthält die Arbeit nicht. A.

. A. Hirst, S. Watson, J. J. Walker. Solution of questions 3567 and 3509. Educ. Times XVI. 98-99.

1) Gegeben drei feste Gerade l, m, n und drei collineare feste unkte L, M, N. Von einem veränderlichen Punkte in l werden erade durch M und N gezogen, bis sie m und n schneiden, und urch diese 4 Schnittpunkte und L wird ein Kegelschnitt gelegt. ann ist die Einhüllende dieses Kegelschnittes ein anderer Kegelhnitt, welcher m und n in den Punkten berührt, wo diese Geaden von l geschnitten werden.

2) Gegeben drei Gerade l, m, n durch einen Punkt und ein ester Punkt L. Die Einhüllende des Kegelschnittes, welcher l berührt und ein Paar Brennpunkte auf m und n in beiden Geraden durch L hat, ist ein Kreis mit L als Mittelpunkt.

Die letzte Aufgabe ist ein specieller Fall von der reciproken der ersten. Hi.

Em. Weyr. Ueber die involutorischen Winkelrelationen der Cardioide. Prag. Ber. 1871. 69-70.

Die Cardioide wird aufgefasst als die Fusspunktencurve eines Kreises mit dem Mittelpunkte o, wobei der Pol p auf der Kreisperipherie liegend angenommen wird. Ist m der Mittelpunkt des Radius op, so gilt folgender Satz von der Cardioide: „Verbindet man die Schnittpunkte der reellen Doppeltangente und dreier unter einander paralleler Tangenten mit dem Punkte m, so erhält man drei Strahlen, welche mit einander Winkel von 60 Grad bilden.“ Schn.

R. Townsend and J. J. Walker. Solution of question 3595. Educ. Times XVII. 55-56.

Ist A der erste Punkt einer Cycloide, P irgend eine Lage des beschreibenden Punktes, T der unterste Punkt des rollenden Kreises; dann geht die Senkrechte von T auf die Gerade AP durch den Schwerpunkt des Bogens PT. Hi.

K. Hippauf. Lösung des Problems der Trisection mittelst der Conchoide auf circularer Basis. Hoffmann Z. III. 215-240.

Siehe Abschn. I. Cap. 1. p. 28.

C. Pelz. Ueber das Problem der Glanzpunkte. Wien. Ber. LXIV. Abth. II.

Die geometrische Lösung des Problemes der Glanzpunkte, d. i. die Bestimmung derjenigen Punkte einer Curve, in welchen ein von einem gegebenen Punkte A kommender Lichtstrahl nach einem zweiten ebenfalls gegebenen Punkte A' reflectirt wird, besteht bekanntlich in der Construction derjenigen Punkte der Curve, in welchen sie von einem Kegelschnitt aus der durch A und A' als Brennpunkte bestimmten Schaar zugeordnet ist (vergl. das Referat zu den Aufsätzen des Hrn. Verfassers über die Axenbestimmung von Centralprojectionen p. 262). Für einen Kegelschnitt im Allgemeinen mit den Brennpunkten FF', werden die Berührungspunkte erhalten als die Schnittpunkte mit einer Curve dritten Grades, welche auf dreierlei Weise erhalten werden kann:

1) als Ort der Schnittpunkte der von A und A' an Kegelschnitte, welche F, F' zu Brennpunkten haben, gelegten Tangentenpaare;

2) als Ort der Schnittpunkte der von F und F' an Kegelschnitte, welche A, A' zu Brennpunkten haben, gelegten Tangentenpaare;

3) als Ort der Schnittpunkte gemeinschaftlicher Tangenten dieser beiden Schaaren confocaler Kegelschnitte.

Die Tangentenpaare im ersten Falle sind die Strahlenpaare

weier projectivischer Involutionen, welche den Strahl AA' als ntsprechenden gemeinsam haben und daher die sogenannte albperspectivische Lage haben. Dieselbe projectivische Beehung kann bekanntlich mittelst eines festen Kreises und zweier erspectivischer Strahlbüschel hergestellt werden, woraus sich ine leichte lineare Construction der entsprechenden Strahlensp. Tangentenpaare und ihrer Schnittpunkte, also der Curve C_3 rgiebt. Diese Construction wird vollständig ausgeführt, und usserdem die hieraus hervorgehende Construction der von einem urvenpunkt ausgehenden Curventangenten angegeben.

Es sei schliesslich noch gestattet, an dieser Stelle auf die st gleichzeitig veröffentlichten, wie es scheint, jedoch wenige Vochen früher abgeschlossenen Aufsätze der Herren Schroeter nd Durège im V. Bande der Mathematischen Annalen (siehe . 282) zu verweisen, welche dieselbe Entstehung der allgemeinen urve dritten Grades aus einer beliebigen Kegelschnittschaar esp. als Erzeugniss zweier halbperspectivischer Strahlen-Involuonen und daraus fliessende Eigenschaften und Constructionen um Gegenstand haben. Schz.

B. Räumliche Gebilde.

A. Mannheim. Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces. Liouville J. (2) XVII. 109-167.

Die Theorie der Strahlenbündel, welche der Verfasser in vorliegender Arbeit entwickelt, und die sich daran schliessende Theorie der Krümmung der Flächen ist wesentlich aus den Theoremen über die Verrückung starrer Systeme erwachsen, welche er Verfasser in dem Mémoire: „Étude sur le déplacement d'une gure de forme invariable" (Journal de l'École Polytechnique, h. 43. 57—122, siehe F. d. M, II. 654) veröffentlicht hat. Es elingt ihm mit den einfachsten Mitteln auf rein geometrischem

Wege sowohl alle die wichtigen Lehrsätze herzuleiten, welche Kummer durch analytische Behandlung dieser Gebilde (Borchardt J. LVII.) gewonnen hat, als auch eine Reihe neuer Eigenschaften aufzudecken. Bevor ich daran gehe, den Gedankengang, welchen der Verfasser nimmt, zu skizziren, ist es nothwendig, mit einigen Vorbegriffen vertraut zu machen, welche Herr Mannheim mit besonderem Erfolge bei der Entwickelung der Theorie verwendet.

G sei eine Generatrix einer windschiefen Fläche. Zwischen den Punkten der Generatrix und den Tangentialebenen in diesen Punkten besteht eine eindeutige Wechselbeziehung. Denkt man in einem beliebigen Punkte o der Generatrix die Tangentialebene, so lassen sich alle Punkte durch ihre Abstände y von o und alle Tangentialebenen, welche den einzelnen Punkten entsprechen, durch ihre Neigungen Y gegen jene Tangentialebene in o bestimmen, und die eindeutige Wechselbeziehung zwischen Tangentialpunkt und Tangentialebene lässt sich durch eine in Bezug auf y und $\operatorname{tg} Y$ lineare Relation darstellen, welche, da y und $\operatorname{tg} Y$ gleichzeitig verschwinden, in der Form

$$y \operatorname{tg} Y + \lambda y + \mu \operatorname{tg} Y = o,$$

worin λ und μ Constanten bezeichnen, zum Ausdruck gelangt. Indem man $\frac{y}{\operatorname{tg} Y} = x$ setzt, erhält die Relation die Form

$$y + \lambda x + \mu = o;$$

diese Gleichung lässt sich auffassen als die Gleichung einer Geraden A, bezogen auf G als Axe der y und auf ein Perpendikel in o als Axe der x. Ist a' ein Punkt auf A, dem als y-Coordinate oa und als x-Coordinate aa' zukommt, so ist $y = x \operatorname{tg} aa'o$, und da andererseits $y = x \operatorname{tg} Y$ ist, so ist Y durch den Winkel $aa'o$ dargestellt oder auch durch den Winkel, welchen der Radiusvector oa' mit der x-Axe bildet. Mit Hülfe der Geraden A ist es demnach leicht möglich zu jedem y den Winkel Y zu finden; sie veranschaulicht daher das Gesetz der Veränderung der Y, wenn y alle Werthe durchläuft. Zu jedem Punkt o der Generatrix gehört eine besondere Gerade A, sie wird „Hülfsgerade“ (droite auxiliaire) in Bezug auf o genannt und mit besonderem Erfolg den folgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt.

Wenn a auf der Generatrix sich in das Unendliche entfernt, wird der correspondirende Radius vector oa' parallel mit A; ıdererseits gehört zu dem Radius vector oc', welcher senkrecht ›gen A gerichtet ist, ein Punkt c auf der Generatrix, das ist ır Projectionspunkt des Punktes c' auf dieselbe. Daraus folgt, ıss die Ebene, welche die windschiefe Fläche im unendlich ıtfernten Punkt der Generatrix berührt, senkrecht steht auf der ıngentialebene im Punkte c, oder mit anderen Worten, dass e Tangentialebene im unendlich fernen Punkt der Generatrix, ›rmal im Punkte c der windschiefen Fläche ist. Dieser Punkt ist gleichfalls ein für die fernere Betrachtung ausgezeichneter ınkt; er wird „Centralpunkt" (point central) genannt, und die ıngentialebene in ihm „Centralebene" (plan central).

Für den Centralpunkt c der Generatrix stellt sich die Hülfs-rade A als eine Linie dar, welche mit der Generatrix parallel ıft; ihre Gleichung erscheint deshalb unter der Form $x = k$. ie Relation zwischen y und Y ist daher $y = k \operatorname{tg} Y$. Die Con-ante k heisst „Vertheilungsparameter der Tangentialebenen" ›aramètre de distribution des plans tangents).

Errichtet man in c ein Perpendikel zu G und schneidet auf emselben $cc' = k$ ab, so ist c' ein durch den Charakter der rindschiefen Fläche bestimmter Punkt; durch ihn gehen hindurch ie Hülfsgeraden, welche den verschiedenen Punkten der Ge-ratrix entsprechen. Ist der Punkt c' also bekannt, so wird zu em Punkt o' die Hülfsgerade A' dadurch gefunden, dass man uf $o'c'$ in c' eine Senkrechte A' errichtet.

Hiermit sind im Wesentlichen die Elemente dargelegt, auf welche der Verfasser sich bei Betrachtung der windschiefen Flächen ützt; die Probleme, welche sich bieten, finden mit ihrer Hülfe ine Schwierigkeiten ihre Lösung.

Im § II wendet sich der Verfasser nunmehr zur Entwickelung er Theorie der Strahlenbündel.

Die Geraden, welche der Betrachtung zu Grunde liegen, nd durch einen ihrer Punkte bestimmt, dieselben sind also zwei edingungen unterworfen. Eine Gerade G mit den ihr unendlich ıhen Geraden bildet das Strahlenbündel (pinceau de droites).

Dieses schneide man durch eine Fläche S, welche von G in a getroffen wird, und trage von a aus zwei beliebige Strecken ab und ac auf G und dieselben Strecken auf den benachbarten Strahlen von den Punkten aus ab, in denen S geschnitten wird. Die Punkte b gehören alsdann einer Fläche S_I, die Punkte c einer Fläche S_{II} an. Die Nachbarstrahlen von G können nun aufgefasst werden als verschiedene Lagen der Geraden G, wenn man diese so verschiebt, dass drei ihrer Punkte a, b, c, auf drei gegebenen Flächen S, S_I, S_{II} gleiten. Jeder andere Punkt von G beschreibt bei dieser Verschiebung eine Flächentrajectorie und die Normalen aller Flächentrajectorien, welche von den einzelnen Punkten der beweglichen Geraden beschrieben werden, gehören einem Hyperboloid an. Dieses Hyperboloid hat zwei reelle oder imaginäre Erzeugende, welche senkrecht zu G gerichtet sind; diese mögen G in f_1 und f_2 schneiden, denen wieder die Flächentrajectorien F_1 und F_2 entsprechen. Diese beiden Flächen berühren die Gerade G, also auch die Strahlen des Bündels. Somit ist der Satz von Malus gewonnen: „Die Strahlen eines Bündels sind Tangenten an zwei reellen oder imaginären Flächen". Diese Flächen heissen „Brennpunktenflächen" (surfaces focales) und die Punkte, in denen sie einen Strahl des Bündels berühren, sind die „Brennpunkte" dieses Strahls, die Ebenen aber, welche in diesen Punkten die Brennpunktenflächen berühren, die „Focalebenen".

Die Gerade G bestimmt mit jeder Nachbargeraden ein Element einer windschiefen Fläche, „Elementarfläche des Bündels" (surface élémentaire du pinceau) genannt. Alle diese Elementarflächen berühren die Brennpunktenflächen in den Brennpunkten f_1 und f_2 von G. Nimmt man f_2 zum Anfangspunkt, und die Senkrechte in f_2 zur Axe der x, so gehört in Bezug auf ihn zu jeder Elementarfläche eine Hülfsgerade. Alle diese Hülfsgeraden gehen durch einen Punkt f, welcher auf dem Lothe, das in f_1 errichtet ist, liegt, und dessen Radiusvector $f_2 f$ mit der x-Axe den Winkel φ bildet, welchen die beiden Focalebenen mit einander einschliessen. Ein Kreis durch f, f_1, f_2 hat $f_2 f$ zum Durchmesser. Irgend eine Gerade durch f schneide den Kreis in c', dessen senkrechte

ojection auf G der Punkt c sei. Die gezogene Gerade ist eine
llfsgerade einer Elementarfläche, für welche, da $f_2 c'$ senkrecht
dieser Geraden steht, der Punkt c der Centralpunkt ist. Die
ntralpunkte aller Elementarflächen sind also die senkrechten
ojectionen der Punkte des Kreises $(f f_1 f_2)$. Sie bedecken ein
wisses Stück $c_1 c_2$ der Geraden G, welches gleich dem Durch-
sser des Kreises ist; daher ist $f_1 f_2 = c_1 c_2 \sin\psi$. Die Punkte
und c_2 sind von Kummer „Grenzpunkte" genannt, und somit
der Satz gewonnen: „Die Focaldistanz ist gleich dem Abstand
r Grenzpunkte, multiplicirt mit dem Sinus des Winkels, welchen
Focalebenen bilden". Die Centralebenen in den Grenzpunkten
d die Kummer'schen Hauptebenen; dass diese senkrecht auf
ander stehen, liest man unmittelbar aus der ebenen Figur
, welche die wichtigsten Elemente des Strahlenbündels und
en gegenseitigen Zusammenhang versinnlicht. Somit wäre
den Hauptzügen die Methode gekennzeichnet, welche der Ver-
ser bei der Untersuchung der Strahlenbündel anwendet; in
treff der Entwickelung der zahlreichen Eigenschaften derselben
uss auf das Mémoire selbst verwiesen werden.

Der § III beschäftigt sich mit den besonderen Strahlenbündeln,
lche aus Normalen einer Fläche gebildet sind. Die Elementar-
chen eines solchen Bündels sind die Elemente von windschiefen
chen, welche Herr Mannheim mit dem Namen „normalies"
ichnet, worunter er den Ort der Normalen einer Fläche ver-
t, welche durch irgend eine auf die Fläche verzeichnete Curve
timmt sind. Um die Realität der Brennpunkte eines solchen
rmalenbündels zu beweisen, geht der Verfasser abermals von
em Theorem über die Verrückung eines starren Systems aus.
selbe lautet: „Wenn ein starres System sich so verschiebt, dass
r seiner Punkte auf vier festen Flächen gleiten, so gehen in
dem Moment die Normalen der Flächentrajectorien aller Punkte
s Systems durch zwei bestimmte Gerade". Gleiten die drei
nkte a, b, c eines starren Systems auf einer Fläche S, während
n vierter Punkt e auf einer Fläche E sich bewegt, so sind die
iden im Theorem gekennzeichneten Geraden D und Δ diejenigen,
lche die vier Normalen schneiden, die in a, b, c, e an den be-

züglichen Flächen, auf denen die Punkte gleiten, gezogen sind.
Denkt man b und c unendlich nahe an a, so ist die Bewegung
des Systems der Bedingung unterworfen, dass eine seiner Ebenen
in einem Punkte a die Fläche S berührt, während ein anderer
Punkt e sich auf einer Fläche E bewegt. Die beiden Geraden
D und Δ schneiden nunmehr drei Nachbarnormalen von S und
die Normale der Flächentrajectorie von e. Da aber die Ver-
schiebung des Systems dieselbe bleibt, welche von den Nachbar-
punkten von a man auch auszeichnen möge, so müssen die beiden
Geraden D und Δ alle Normalen schneiden, welche der Normale A
in a benachbart sind. Die beiden Ebenen (A, D) und (A, Δ) be-
rühren demnach alle Normalflächen (normalies), deren Directricen
Curven sind, die auf der Fläche S von a auslaufen, oder in an-
derer Form ausgedrückt, die Normale A beschreibt bei allen mög-
lichen Bewegungen des Systems Flächen, welche dieselben zwei
Tangentialebenen (A, D) und (A, Δ) haben. Die beiden Geraden
D und Δ sind nichts anderes als die augenblicklichen Drehaxen
(axes simultanés de rotation), vermittelst welcher man alle mög-
lichen Verschiebungen von A erhalten kann.

Dass die Normalflächen für den Punkt a sich in denselben
zwei Punkten f_1 und f_2 der Normale A berühren, ist eine Eigen-
schaft, welche unabhängig ist von E. Wenn E sich ändert,
werden sich allerdings die Geraden D und Δ in der Lage ändern,
indessen die Punkte f_1 und f_2, in denen sie die Gerade A treffen,
werden dieselben bleiben. Es genügt also, um die Realität der
Brennpunkte f_1 und f_2 zu zeigen, nachzuweisen, dass ein Paar
reeller Geraden D und Δ existirt. Diese Geraden sind aber Er-
zeugende des Hyperboloids, welches durch A und zwei Nachbar-
normalen bestimmt ist, und zwar sind es diejenigen, welche durch
die Punkte hindurch gehen, in denen das Hyperboloid von der
Normale in e getroffen wird. Da man nunmehr über diese Nor-
male so disponiren darf, dass sie das Hyperboloid in reellen
Punkten schneidet, so gelangt man zu zwei reellen Geraden D
und Δ, welchen wieder reelle Punkte f_1 und f_2 entsprechen.

Unter den möglichen Verschiebungen von A giebt es zwei,
welche durch einfache Rotation um jede der Geraden D und Δ

hervorgebracht werden. Bei einer einfachen Drehung um D muss Δ ein Flächenelement beschreiben, für welches die Ebene (A, Δ) Tangentialebene ist; daher stehen die Ebenen (A, D) und (A, Δ) senkrecht auf einander. Da die Focalebenen (A, D) und (A, Δ) aber senkrecht auf einander stehen, so muss, weil $f_1 f_2 = c_1 c_2 \sin\psi$, beim Normalenbündel $f_1 f_2 = c_1 c_2$ sein, also jener Kreis, welcher bei der Theorie der Strahlenbündel auftrat, muss sein Centrum auf A haben. Aus dieser besonderen Lage des Kreises, gewissermaassen der Characteristik des Normalenbündels, gegen die Gerade A wird nunmehr die ganze Theorie der Krümmung der Flächen entwickelt. Schn.

A. Mannheim. Exposition sommaire d'une théorie géométrique de la courbure des surfaces. C. R. LXXIV. 598-602.

Die Grundgedanken der Krümmungstheorie sind angedeutet in dem Referat: „A. Mannheim, Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces. Liouville J.(2) XVII. 109—167". Siehe das obige Referat. Schn.

A. Mannheim. Détermination de la liaison géométrique qui existe entre les éléments de la courbure des deux nappes de la surface des centres de courbure principaux d'une surface donnée. C. R. LXXIV. 458-461.

Es sei A eine Normale zur Fläche (S) und b und c seien die Hauptkrümmungscentra auf derselben. Durch den Punkt b ziehe man eine Normale B zu der Schaale (B), dem Ort der Hauptkrümmungscentra b, und durch den Punkt c eine Normale C zu der Schaale (C), dem Ort der Hauptkrümmungscentra c. Die Hauptkrümmungscentra auf B für die Schaale (B) seien d und e, und diejenigen auf C für die Schaale (C) seien g und h. Gegenstand der Betrachtung bildet nunmehr der Zusammenhang zwischen den Hauptschnitten von (B) und (C) und der Lage der Hauptkrümmungscentra d, e, g, h. Schn.

A. Mannheim. Recherches géométriques sur le contact du 3e ordre de deux surfaces. C. R. LXXIV. 856-860, 928-932.

Der Weg, welchen Herr Mannheim eingeschlagen hat, um die Theorie der Strahlenbündel und die Krümmungstheorie der Flächen zu entwickeln, hat ihn zu einer Methode geführt, die besonders geeignet erscheint, zwischen Flächen die Berührungen höherer Ordnung zu studiren. Auf jeder Normale A einer Fläche S liegen zwei Hauptkrümmungscentra, der Ort derselben ist eine zweischalige Fläche, jede Schale wird von der Normale A berührt in einem Hauptkrümmungscentrum und die Tangentialebenen in jenen Punkten sind die Hauptschnitte der Fläche S für die Normale A. Die Berührung zweier Flächen S und S' in einem Punkte a wird charakterisirt durch eine einfache Beziehung der beiden Flächen, welche als Ort der Hauptkrümmungscentra den Flächen S und S' entsprechen, und aus dem gegenseitigen Verhalten dieser beiden Flächen wird auf die Natur der Berührung von S und S' in a geschlossen. Es mag genügen einige der wichtigsten Resultate der Betrachtung anzuführen. Herr Dupin hatte bewiesen: „Wenn zwei Flächen in einem Punkte längs dreier willkürlicher Schnitte sich osculiren, so osculiren sie sich in jedem Schnitte, welchen eine durch den Berührungspunkt gehende willkürliche Fläche erzeugt". Herr Mannheim verallgemeinert das Theorem dahin: „Wenn zwei Flächen in einem Punkte längs vier verschiedener Schnitte eine Berührung dritter Ordnung haben, so haben sie in jedem Schnitte, den eine willkürliche durch den Berührungspunkt gehende Fläche erzeugt, eine Berührung derselben Ordnung". Wenn zwei Flächen S und S' sich in einem Punkte a so berühren, dass ihre Hauptkrümmungscentra für a übereinstimmen und sich in ihnen die den Flächen S und S' entsprechenden Flächen der Hauptkrümmungscentra osculiren, so bilden S und S' in a eine Berührung dritter Ordnung". Endlich mag noch das Theorem bemerkt werden: „Wenn zwei Flächen S und S' sich in einem Punkte a so berühren, dass ihre Krümmungslinien eine Berührung dritter Ordnung bilden, so bilden die Flächen S und S' in a eine Berührung derselben Ordnung.

Sehn.

MANNHEIM. Sur la surface gauche, lieu des normales principales de deux courbes. Liouville J. (2) XVII. 406-418.

Herr de Saint-Venant hatte die Frage aufgeworfen (Mémoire les lignes courbes non planes, J. de l'Èc. Pol., 30e cah.): iebt es auf der windschiefen Fläche, welche durch die Hauptrmalen einer Curve gebildet wird, eine zweite Curve, deren uptnormalen gleichfalls die Erzeugenden dieser Fläche sind?" d Herr Bertrand hatte die Frage beantwortet (Liouville J. (1) XV, 332) indem er die Relation angab, welche zwischen dem Radius der ten und dem der zweiten Krümmung einer Curve existiren ss, damit jene Forderung erfüllt werde. In der vorliegenden beit entwickelt der Verfasser durch elegante Schlussweisen die n Bertrand aufgestellte Relation, und indem er in geistvoller eise auf die windschiefe Fläche, welche den Ort der Hauptrmalen zweier Curven bildet, die Theorie der Strahlenbündel d der Normalenflächen (normalies) anwendet, gewinnt er zuich eine Reihe neuer Eigenschaften dieser Fläche.

Nachdem er den Satz bewiesen: „Wenn zwei Curven dieben Hauptnormalen haben, so schliessen die Osculationsebenen ser Curven in den Punkten, in denen sie von ein und derben Normale getroffen werden, denselben Winkel ein, welches h die Normale sein mag", wird die Theorie der Strahlendel mit jener windschiefen Fläche, dem Ort der Hauptnormalen ier Curven, durch folgende Betrachtung in Beziehung gesetzt. seien (*o*) und (*a*) die beiden Curven, welche dieselben Hauptmalen haben und (*G*) die durch diese Normalen gebildete che; *G* sei eine Generatrix dieser Fläche, welche jene beiden rven bezüglich in *o* und *a* trifft. Irgend eine zweite Genetix *G'* schneide diese beiden Curven in *i* und *j*. Denkt man nmehr *G'* mit *G* zur Coincidenz gebracht so, dass *i* mit *o* und e Tangentialebene in *i* an (*G*) mit der Tangentialebene in *o* sammenfällt, so geht *j* in *a* über und die Tangentialebene in fällt zu Folge obigen Theorems mit der Tangentialebene in zusammen. Indem man alle Erzeugenden von (*G*) in dieser eise mit *G* zur Coincidenz bringt, und gleichzeitig mit jeder

Erzeugenden ein unendlich kleines Flächenelement der Fläche (G) mitgeführt denkt, so bilden diese unendlich kleinen Flächenelemente, die in der angegebenen Art bei der Generatrix G vereinigt sind, die Elementarflächen (surfaces élémentaires) eines Strahlenbündels, in welchem o und a die Brennpunkte des Strahls G und die Tangentialebenen in o und a die Focalebenen des Bündels sind. Dieses Strahlenbündel wird durch die Hülfsgeraden der Elementarflächen (Vergl. des Verf. Mémoire sur les pinceaux de droites, Liouville J. (2) XVII 109—167 p. 287) untersucht und durch einfache geometrische Betrachtung jene Bertand'sche Relation gewonnen. Bezeichnet man mit a den Focalabstand, mit α den Winkel der Focalebenen und bedeutet ϱ den Radius der ersten, r den Radius der zweiten Krümmung für irgend einen Punkt der Curve (o), so erscheint jene Relation in der Form

$$\varrho = a + \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}\,\frac{\varrho}{r}.$$

Zugleich gewinnt der Verfasser zwei andere höchst einfache Relationen zwischen den Krümmungsradien entsprechender Punkte der Curven (o) und (a). Sind r und r_1 die Radien zweiter und ϱ und ϱ_1 die Radien erster Krümmung in zwei Punkten der Curven, denen dieselbe Hauptnormale zukommt, so ist

$$(1)\qquad r\cdot r_1 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}$$

$$(2)\qquad \cos^2\alpha = \left(1-\frac{a}{\varrho}\right)\left(1+\frac{a}{\varrho_1}\right).$$

Auf die anderen Theoreme, die durch unmittelbare Anwendung der Sätze aus der Theorie der Strahlenbündel gewonnen werden, kann hier nicht näher eingegangen werdeu. Schn.

A. Mannheim. Théorème sur les courbes et les rayons de courbure. Inst. XL. 173.

Siehe das Referat über die obige Arbeit.

A. Mannheim. Généralisation du théorème de Meusnier. C. R. LXXIV. 372-375.

„Krümmungsaxe einer Curve“ nennt Herr Mannheim die Durchschnittsgerade zweier in zwei benachbarten Punkten der Curve errichteten Normalebenen, und „die Krümmungsaxe einer abwickelbaren Fläche“ die Schnittgerade zweier Normalebenen, welche durch zwei benachbarte Erzeugende der Fläche gelegt sind. Mit Einführung dieser Begriffe giebt er den Satz: „Wenn die Curven, welche auf einer Fläche gezogen sind, in einem Punkte a eine Berührung erster Ordnung haben, so gehen die Krümmungsaxen der Curven in Bezug auf diesen Punkt durch ein und denselben Punkt a“.

Die Enveloppe der Normalebenen aller Punkte einer Curve bezeichnet Monge mit dem Namen Polarfläche (surface polaire). Die zweite Polarfläche der Curve nennt Herr Mannheim die Enveloppe der Ebenen, welche normal gegen die erste Polarfläche durch die Erzeugenden dieser Fläche gelegt sind, die dritte Polarfläche ist das aus der zweiten analog abgeleitete Gebilde u. s. w. Das Theorem, mit welchem die Bemerkungen Mannheim's schliessen, lautet nunmehr: „Wenn Curven, welche auf einer Fläche gezogen sind, eine n-fache Berührung haben, so haben ihre $(n-1)^{\text{ten}}$ Polarflächen zu Krümmungsaxen Gerade, welche durch ein und denselben Punkt gehen“. Schn.

A. Mannheim. Démonstration géométrique d'une proposition due à M. Bertrand. Liouville J. (2) XVII. 403-406.

Mit Hülfe der Darstellung der „normalies“ durch Hülfsgeraden, einer Betrachtungsweise, welche in dem Bericht über des Verfassers Mémoire sur les pinceaux de droites··· näher auseinandergesetzt ist, wird der Beweis folgender von Bertrand aufgestellter Relation gegeben: „Wenn von dem Punkte o einer Fläche zwei geodätische Linien ausgehen, welche den Winkel O bilden, und ψ und ψ' die bezüglichen Contingenzwinkel der Curven im Punkte o bedeuten und φ und φ' die Winkel, welche zwei in o benachbarte Osculationsebenen jener Curve mit einander einschliessen, so ist

$$\operatorname{tg} O = \frac{\psi - \psi'}{\varphi + \varphi'}.\text{“}$$

Schn.

Em. Weyr. Erzeugnisse mehrdeutiger Elementargebilde im Raume. Prag. Abh. (6) V.

Im ersten kürzeren Theile wird das Erzeugniss mehrdeutiger Elementargebilde im räumlichen Bündel; im zweiten, dem Haupttheile, werden die beiden wichtigeren Fälle der mehrdeutigen Beziehung im Raume untersucht, wo beide Elementargebilde Punktreihen oder Ebenenbüschel sind. Der Hauptsatz ist: Wenn zwei Punktreihen $m-n$deutig auf einander bezogen sind, so sind die Büschel, welche deren Träger zu Axen haben, $n-m$deutig auf einander bezogen; das Erzeugniss ist eine Linienfläche vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade „Indice", wie Herr Weyr sagt). Die Leitlinien und $mn+m+n$ Erzeugende bestimmen die Fläche, wobei natürlich festzusetzen ist, von welcher Reihe (welchem Büschel) jede der Leitlinien Träger (Axe) ist. Es werden ferner die ebenen Schnittcurven und die umschriebenen Kegel betrachtet. Die Verzweigungselemente der erzeugenden Gebilde führen zu den Cuspidalpunkten und Cuspidalebenen und den singulären Erzeugenden: Auf dem Träger der m-deutigen Punktreihe (der Axe des n-deutigen Büschels) liegen $2m(n-1)$ Cuspidalpunkte, und durch ihn gehen $2n(m-1)$ Cuspidalebenen; die Cuspidalebenen der einen Geraden gehen durch die Cuspidalpunkte der andern, jede Curve der Fläche berührt die Cuspidalebenen, jede umschriebene Developpable geht durch die Cuspidalpunkte. Bei der Betrachtung der Schnittcurve der erzeugten Fläche mit einer beliebigen andern Fläche macht der Verfasser das Versehen, dass er die Ordnung des der letzteren umschriebenen Kegels (ihren „Rang") mit der Klasse verwechselt.

Die Ordnung der Berührungscurve des der Linienfläche umschriebenen Kegels ist $2mn$, die den Punkten einer Geraden als Polen zugehörigen Berührungscurven bilden ein Büschel und erzeugen auf den Generatricen projectivische Punktreihen. Durch eine eigenthümliche Beziehung, „windschiefe Projection" genannt, wird endlich jeder Curve der Fläche ein System rational auf sie bezogener anderer Curven der Fläche zugeordnet.

Sm.

M. WEYR. Intorno all' involuzione cubica nella quale hanno luogo proprietà anarmoniche. Rend. d. Ist. Lomb. 1871.

Der Verfasser geht von dem anderwärts von ihm bewiesenen ätze aus, dass in einer cubischen Involution, welche zwei dreiche Elemente besitzt, die entsprechenden (einer Gruppe angeörigen) Elemente projectivischen Gebilden angehören, welche in en dreifachen Elementen der Involution ihre Doppelelemente esitzen. Zunächst wird das Auftreten solcher Involutionen an egelschnitten besprochen und hierauf das allgemeine Theorem on der in solchen Involutionen auftretenden Projectivität auf inzelne besondere Fälle angewendet. Unter Anderem werden lgende Lehrsätze bewiesen: „Die Scheitel der einem festen reise eingeschriebenen regulären Dreiecke bilden eine cubische nvolution mit zwei dreifachen in den imaginären Kreispunkten legenen Elementen". „Die Strahlentripel, welche den vollen inkel in sechs gleiche Theile theilen, bilden eine cubische rahleninvolution mit zwei dreifachen durch die imaginären Kreisunkte gehenden Strahlen".

Die durch den Schnittpunkt zweier Inflexionstangenten einer it einem Doppelpunkt versehenen Curve dritter Ordnung hindurch henden Strahlen schneiden dieselbe in Punkttripeln, welche mit m Doppelpunkte verbunden zu den projectivischen Büscheln eranlassung geben. Die gemeinsamen Doppelstrahlen der Büschel nd die Tangenten der Curve im Doppelpunkte".

„Die durch eine Axe einer Raumcurve dritter Ordnung indurchgehenden Ebenen bestimmen auf derselben Punkttripel, elche drei projectivischen Systemen angehören. Die Doppelunkte dieser Systeme sind Berührungspunkte der beiden durch ie Axe gehenden Schmiegungsebenen".

„Die Tripel der Berührungspunkte der Schmiegungsebenen ner mit einem Doppelpunkte versehenen Raumcurve vierter rdnung, welche durch die einzelnen Punkte dieser Curve hinrchgehen, gehören drei projectivischen Systemen an, welche re Doppelpunkte in den beiden Nachbarpunkten des Doppelunktes der Curve besitzen". W.

Em. Weyr. Intorno alle cubiche gobbe. Rend. d. Ist. Lomb. 1871.

Die Abhandlung besteht aus zwei Abtheilungen; die erste: „Sopra una certa corrispondenza stabilita mediante una cubica gobba ed una conica", beschäftigt sich mit der quadratischen Strahlenverwandtschaft, welche in der Ebene eines Kegelschnittes C_2 mittelst einer Curve C_3 in folgender Weise hergestellt wird: Durch irgend eine Gerade R der Ebene P des Kegelschnittes C_2 lege man eine beliebige Ebene π, welche C_3 in $p_1 p_2 p_3$ schneiden möge; hierauf lege man durch diese Punkte $p_1 p_2 p_3$ und durch C_2 eine beliebige Fläche zweiten Grades, welche C_3 in drei weiteren Punkten $q_1 q_2 q_3$ schneiden wird; die Ebene $(q_1 q_2 q_3)$ schneidet nun P in der Geraden R', welche der Geraden R verwandschaftlich entspricht. Das Hauptdreiseit dieser Verwandschaft in der Ebene P hat die Schnittpunkte $a_1 a_2 a_3$ von C_3 mit P zu Scheiteln. Die vier Doppelgeraden $D_1 D_2 D_3 D_4$ dieses in P auftretenden involutorischen Systemes (RR') sind die Berührungssehnen des Kegelschnittes C_2 mit den vier Kegelschnitten, welche dem $\triangle a_1 a_2 a_3$ umgeschrieben sind und mit C_2 einen doppelten Contact haben.

Auf Grund dieser Ergebnisse werden verschiedene Theoreme bewiesen, so z. B.:

„Durch C_2 gehen 16 Flächen zweiter Ordnung, welche mit C_3 einen Contact zweiter und einen erster Ordnung besitzen".

Durch drei feste Punkte von C_3 und durch C_2 gehen vier Flächen zweiten Grades, welche C_3 berühren". Durch C_2 gehen neun Flächen zweiten Grades, welche mit C_3 zwei Berührungen zweiter Ordnung eingehen". „Durch einen Kegelschnitt gehen zehn Flächen zweiter Ordnung, welche mit einer Raumcurve dritter Ordnung eine Berührung vierter Ordnung eingehen" u. s. w.

Die zweite Abtheilung: „Sulle sfere osculatrici e la loro costruzione" handelt von den Krümmungs-Kugeln der Raumcurven dritter Ordnung und deren Construction. Es wird nämlich für eine beliebige Raumcurve dritter Ordnung C_3 die Ebene P ins Unendliche versetzt und der imaginäre Kugelkreis als der Kegelschnitt C_2 verwendet. Dann sind $a_1 a_2 a_3$ die unendlich weiten

unkte von C_3, welche mit irgend einem beliebig angenommenen unkte o ein räumliches Dreikant $o(a_1\, a_2\, a_3)$ bestimmen, welchem an vier Rotationskegel umschreiben kann. Die sechs Winkelalbirenden der drei Winkel $a_1\, o\, a_2$, $a_2\, o\, a_3$, $a_3\, o\, a_1$ liegen viermal zu eien in vier (durch o gehenden) Ebenen $d_1\, d_2\, d_3\, d_4$, deren unendlich eite Gerade die Linien $D_1\, D_2\, D_3\, D_4$ sind. „Soll nun zu irgend nem Punkte a der Raumcurve C_3 die Krümmungskugel geunden werden, so lege man durch o zur Schmiegungsebene a n a eine parallele Ebene a', bestimme die Ebene a'', welche er Ort aller zu a' conjugirten Geraden in Bezug auf die dem ierflach $d_1\, d_2\, d_3\, d_4$ eingeschriebenen Kegel zweiten Grades ist, nd lege zu dieser Ebene a'' durch a eine parallele Ebene a_1, elche die Raumcurve in zwei weiteren Punkten b, c, schneiden öge. Dann ist die durch b und c gehende, die Raumcurve in berührende Kugel zugleich die Krümmungskugel in letzterem unkte".

Ausserdem werden einige Sätze nachgewiesen, z. B.:

„Durch drei Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung gehen er sie berührende Kugeln".

„Es giebt neun Kugeln, welche mit einer Raumcurve dritter rdnung einen Doppelkontact zweiten Grades besitzen".

„Es giebt zehn stationäre Krümmungskugeln einer Raumurve dritter Ordnung, d. h. zehn Kugeln, welche mit der Curve fünf unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich haben".

W.

FUORTES. Le sezioni piane nel toro. Battaglini G. X. 97.

Der Verfasser betrachtet den Torus, d. i. die Fläche, welche urch Rotation der Punkte eines Kreises um eine in der Kreisene liegende feste Axe entsteht, und zeigt dass diese Fläche m vierten Grade ist, und zwei imaginäre parallele Doppelgerade Unendlichen hat. Jeder ebene Schnitt des Torus ist eine urve 4ter Ordnung, die zwei imaginäre Doppelpunkte im Unendhen hat. Eine Tangentenebene schneidet den Torus in einer rve vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten (indem zu den

beiden vorgenannten der Berührungspunkt hinzukommt). Eine Doppeltangentenebene schneidet den Torus in 2 Kreisen.

Mz.

T. Fuortes. Sulle curve e sulle superficie di 2° ordine, che dividono dati segmenti armonicamente. Battaglini G. X. 93-102.

Nach einigen recht fasslich dargestellten Vorbemerkungen über Kegelschnittsbüschel und Kegelschnittsnetze geht der Verfasser zur Lösung der Aufgabe, einen Kegelschnitt zu construiren, der fünf gegebene Strecken harmonisch theilt. Eine Fortsetzung ist in Aussicht gestellt.

Mz.

P. H. Schoute. Homographie en haare toepassing op de theorie des oppervlakker van den tweeden graad. Academisch Proefschrift. Leiden 1870.

P. H. Schoute. Homographie et son application à la théorie des surfaces du second ordre. Arch. Néerl. VI. 348-353.

Der Verfasser nennt zwei Punktsysteme im Raum homographisch, wenn die Punkte des einen denen des andern derart entsprechen, dass Punkten in einer Ebene im andern System auch Punkte einer Ebene entsprechen. Er zeigt dann, dass die anharmonischen Verhältnisse x und y zweier entsprechender Systeme von je vier Punkten, durch die Relation verbunden sind

$$axy + bx + cy + d = 0.$$

Im ersten Capitel werden dann Folgerungen aus diesem Fundamentalsatz abgeleitet. Das zweite Capitel ist den homologen Figuren gewidmet. Das dritte Capitel enthält eine geometrische Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die Eigenschaften definirt werden, dass sie von einer Geraden nur in zwei Punkten geschnitten werden. Capitel IV. enthält den Beweis der Existenz des zweien dieser Oberflächen gemeinsamen Polartetraeders und die Bestimmung der Oberfläche durch neun

'unkte oder neun Ebenen. Ferner werden darin die verschiedenen Arten auseinandergesetzt, zwei Oberflächen zweiter Ordnung einander homographisch entsprechen zu lassen, sowie die Classification der Oberflächen zweiter Ordnung in ellipsoidische und hyperbolische Flächen. Der Behandlung der einzelnen Flächen sind Capitel V und VI gewidmet. — Man sieht aus dieser Inhaltsübersicht, dass der Verfasser für Raumfiguren auf rein geometrischem Wege die Theorie der Homographie abgeleitet hat, wie Chasles in mehr analytischer Weise in seiner Géométrie supérieure und in der dem Aperçu historique beigefügten Abhandlung gegeben hat.

(Vorstehendes Referat ist, da die oben zuerst angeführte Hauptabhandlung nicht zugänglich war, nach der zweiten der obigen Arbeiten, einer Analyse der ersten gemacht.) Mn. (Wn.)

. MISTER. Sur l'hyperboloide de révolution. Nouv. Ann. (2) XI. 353.

Wird eine von zwei nicht in derselben Ebene befindlichen Graden um die andere als Axe herumgedreht, so beschreibt sie bekanntlich ein Rotationshyperboloid. Es wird in einfacher Weise ausgeführt, dass die Schnittpunkte der bewegten Geraden mit der beliebigen Meridianebene eine Hyperbel bilden, da die Differenz ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten constant ist.

Schz.

AGUERRE. Sur la surface de Steiner. Inst. XL. 116.

Der Verfasser giebt über die Steiner'sche (oder römische) Fläche folgende Mittheilungen: Aus den asymptotischen Linien der Steiner'schen Fläche, die Clebsch angegeben hat, findet man leicht die asymptotischen Linien derjenigen Fläche dritten Grades, die der Steiner'schen reciprok ist. *M* sei ein Punkt dieser Fläche dritten Grades; der Berührungskegel an diese Fläche, dessen Spitze *M* ist, zerfällt in 2 Kegel zweiten Grades, von denen jeder die Fläche längs einer Raumcurve dritter Ordnung berührt. Diejenigen beiden abwickelbaren Flächen, deren Wendungscurven

diese Raumcurven sind, schneiden die Fläche in den asymptotischen Linien, die durch *M* gehen. Es sei nun irgend eine asymptotische Linie *Z* auf der Fläche (dritten Grades) gezogen. Von jedem Punkt dieser Curve kann man an die Fläche zwei Berührungskegel zweiten Grades legen. Die Raumcurve dritter Ordnung, welche die Berührungscurve eines dieser Kegel ist, ist die Wendungscurve einer abwickelbaren Fläche, die durch *Z* geht. Alle diese Raumcurven dritter Ordnung gehen durch die 4 Knotenpunkte der Fläche dritten Grades, die Berührungskegel der Fläche längs diesen Curven haben ihre Scheitel auf *Z*; die abwickelbaren Flächen, deren Wendungscurven sie sind, enthalten *Z*. Zwei unter ihnen schneiden sich ausser in den 4 Knotenpunkten in einem fünften Punkt, der Spitze eines Kegels zweiten Grades ist, welcher diese beiden Raumcurven dritter Ordnung enthält.

Mz.

E. Catalan. Théorème de géométrie. Bull. de Belg. (2) XXXIII. 107.

Der Bericht über den Satz von Catalan wird später erfolgen, wenn der Verfasser die zahlreichen Folgerungen, die sich aus demselben ergeben, veröffentlicht haben wird. Mn. (Wn.)

Liguine. Un théorème de M. Chasles relatif aux axes conjugués étendu au cas des déplacements finis. Mém. d. l. S. Phil. de Moscou 1872.

Z.

G. Bruno. Generalizzazione e corollari di un noto teorema di geometria. Atti di Torino VII. 235-249.

Der Satz No. 992 von de la Gournerie (Traité de la géométrie descriptive) wird, wie folgt, erweitert: „Wenn auf einer krummen Oberfläche eine Generatrix gegeben ist, deren Centralebene vertical ist, so gehören die Geraden, welche die Oberfläche in der Generatrix berühren und mit dem Horizont einen Maximumwinkel bilden, zu einem Hyperboloid, dessen horizontale Schnitte Kreise sind, welches aber kein Rotationshyperboloid ist."

Jg. (O.)

C. Geometrie der Anzahl.

H. G. ZEUTHEN. Déterminations des caractéristiques des systèmes élémentaires de cubiques. C. R. LXXIV. 521-524. 604-607, 726-730.

MAILLARD. Recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires de courbes planes du troisième ordre. Thèse pour le doctorat, soumise à la Faculté des sciences de Paris en juillet 1870, publiée en décembre 1871.

Die genannten Abhandlungen und einige spätere des Herrn Zeuthen enthalten einen wichtigen Fortschritt in dem Ausbau desjenigen Theiles der modernen Geometrie, der hier den Namen Geometrie der Anzahl trägt. Nachdem nämlich in den grundlegenden Arbeiten der Herren Chasles, Jonquières, Zeuthen und einiger anderer Mathematiker die Methode der Charakteristiken in die Geometrie eingeführt war, und die Berechnung der Elementarcharakteristiken von Kegelschnitten und Flächen zweiter Ordnung es gestattete, die Anzahlen der allen möglichen hinreichend vielen Bedingungen unterworfenen Gebilde zweiter Ordnung zu bestimmen, handelte es sich darum, die entwickelten Methoden durch die Bestimmung der Elementarcharacteristiken von Gebilden höherer Ordnung, auch für diese fruchtbar zu machen.

Dies ist in den beiden vorliegenden Arbeiten geschehen, welche unabhängig von einander entstanden sind, und zu denselben Zahlen für die Elementarcharacteristiken der ebenen Curven dritter Ordnung gelangen. Zugleich ist damit der Weg gezeigt, in welcher Weise man vorzugehen habe, um zur Lösung der entsprechenden Probleme für Curven noch höherer Ordnung zu kommen. In der That hat Herr Zeuthen in einer späteren Abhandlung in den C. R. (siehe diesen Bd. d. F. d. M. pag. 309) die Elementarcharacteristiken der ebenen Curven vierter Ordnung berechnet und in einer grösseren Abhandlung (Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Curver, Vidensk. Selsk. Skr. 5 Raekke, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 10. B. IV., dazu

gehörig ein Résumé in französischer Sprache) über welche im nächsten Bande d. F. d. M. referirt werden soll, auch die hierher gehörigen Eigenschaften der Systeme von ebenen Curven n^{ter} Ordnung aufgedeckt.

Die Methode des Herrn Zeuthen besteht in der durch das Princip der Correspondenz ermöglichten Aufstellung von Gleichungen zwischen den Characteristiken μ und μ' eines Systems von Curven, der Ordnung oder Klasse des Ortes der singulären Punkte oder Geraden, mit denen sämmtliche Curven des Systems behaftet sein sollen, und den entweder bekannten oder durch specielle Untersuchung zu bestimmenden Anzahlen der die gemeinsamen Bedingungen des Systems befriedigenden singulären Curven, d. h. derjenigen Curven des Systems, welche andere singuläre Punkte oder Tangenten haben, als eine beliebige Curve des Systems. In der Bestimmung dieser singulären Curven, namentlich aber in der Bestimmung der Zahl, wie vielfach eine solche Curve in jedem Falle zu zählen ist, bestehen die Hauptschwierigkeiten der Methode.

Die Arbeit des Herrn Zeuthen zerfällt naturgemäss in drei Capitel. Das erste behandelt die sich selbst reciproken Curven dritter Ordnung und dritter Klasse mit einer Spitze und einer Wendetangente, das zweite die Curven dritter Ordnung und vierter Klasse mit einem Doppelpunkt und drei Wendetangenten, und das dritte die Curven dritter Ordnung und sechster Klasse mit neun Wendetangenten. Vorausgesetzt wird bei den aufgestellten Gleichungen, dass die behandelten Curvensysteme keinen andern als Berührungsbedingungen unterliegen. Dann enthält ein System von Curven der ersten Art nur solche singuläre Curven, deren sämmtliche Punkte die eines Kegelschnitts und einer Tangente desselben sind, und deren sämmtliche Tangenten die Tangenten dieses Kegelschnitts und die durch den Berührungspunkt jener Tangenten gehenden Strahlen sind. Versteht man unter Klassenpunkt (sommet) einen Punkt der singulären Curve von der Beschaffenheit, dass jede durch ihn gehende Curve in ihm auch die Curve berührt, und reciprok unter Ordnungsgerade eine Tangente der Curve von der Beschaffenheit, dass jede sie berührende Curve in

ar auch die Curve berührt, so haben die erwähnten singulären urven eine einfache Ordnungsgerade und einen einfachen lassenpunkt. Ist σ die in einem Systeme (μ, μ') vorhandene nzahl solcher singulärer Curven, so ergiebt sich $2\sigma = \mu + \mu'$. iese Gleichung verbunden mit der Berechnung der σ aller lementarsysteme und der Gleichung $\mu = \mu'$ in dem Systeme, für elches drei Punkte und drei Tangenten gegeben sind, ermöglicht e Bestimmung aller Elementarcharacteristiken. Daran schliesst ch, behufs späterer Anwendung, die Berechnung der Zahlen r die Fälle, wo die Doppelbedingung eine Gerade in einem unkt zu berühren, vorkommt, und für die Fälle, wo die Doppeldingung die Spitze in einem gegebenen Punkt zu haben, vorkommt. Endlich ergiebt der Satz des Herrn Chasles, dass $\mu + n\mu'$ Curven eines Systems (μ, μ') eine Curve von der Ordnung n und der Klasse n' berühren, die Zahl der Curven dritter dnung und dritter Klasse, welche 7 gegebene Curven von kannten Ordnungen und Klassen berühren.

Die Systeme der im zweiten Abschnitte behandelten Curven itter Ordnung mit einem Doppelpunkt, enthalten als singuläre rven erstens ω solche, welche aus einem Kegelschnitt und einer dnungsgeraden bestehen, von dessen beiden Schnittpunkten dem Kegelschnitt der eine der Doppelpunkt, der andere ein pelter Klassenpunkt ist, zweitens γ solche bei denen der ppelpunkt eine Spitze, und damit auch ein Klassenpunkt geden ist. Dann gelten die Gleichungen

$$\gamma = 2\mu, \quad 2\omega = 3\mu' - 2\mu,$$

lche nach vorangegangener Bestimmung aller Zahlen γ und ω, e Berechnung der Elementarcharacteristiken mit Bestätigungen statten. Darauf folgt die Behandlung der Fälle, welche die dingungen, eine Gerade in einem Punkt zu berühren, den ppelpunkt auf einer gegebenen Geraden zu haben, und einen gebenen Punkt zum Doppelpunkt zu haben, mit berücksichtigen. dlich ergiebt sich nun, wie vorher, sehr leicht die Zahl der rven dritter Ordnung und vierter Klasse, welche 8 gegebene rven berühren.

In den Systemen der im dritten Abschnitte behandelten

Curven dritter Ordnung und sechster Klasse treten als singuläre Curven eines Systems auf erstens ω mit einem Doppelpunkt behaftete, der dadurch ein doppelter Klassenpunkt wird, zweitens ν Curven, welche aus einer einfachen und einer doppelten Ordnungsgeraden bestehen mit einem doppelten Klassenpunkt im Schnitt beider, und vier einfachen Klassenpunkten auf der doppelten Ordnungsgeraden, und drittens λ Curven, welche aus einer dreifachen Ordnungsgeraden mit 6 auf ihr gelegenen Klassenpunkten bestehen. Dann gelten die Gleichungen

$$4\mu = \mu' + 2\nu + 240\lambda \text{ uud } 12\mu = \omega + 12\nu + 960\lambda,$$

woraus sich nach der Berechnung der Zahlen ω, ν, λ die Elementar-Charakteristiken mit vielen Bestätigungen ergeben.

Der Weg des Herrn Maillard ist etwas verschieden von dem des Herrn Zeuthen. Derselbe betrachtet nämlich gleichzeitig die drei Arten von Curven dritter Ordnung, um eine Reihe von Formeln aufzustellen, welche er durch das Princip der Correspondenz beweist. In der Berechnung der Elementar-Charakteristiken unterwirft er die sonst elementaren Bedingungen genügenden Curven nach einander den Bedingungen, 1) ihre Spitze in einem gegebenen Punkte, 2) ihre Spitze in einer gegebenen Geraden, 3) überhaupt eine Spitze, 4) ihren Doppelpunkt in einem gegebenen Punkte, 5) ihren Doppelpunkt auf einer gegebenen Geraden, 6) überhaupt einen Doppelpunkt, 7) keinen Doppelpunkt zu haben, also allgemein von der sechsten Klasse zu [illegible] Den Schluss der Arbeit bilden Betrachtungen über einen [illegible] Theorie der Charakteristiken äusserst wichtigen und interessanten Gegenstand, nämlich über den Grad der Vielfachheit der singulären Curven in den verschiedenen Systemen, welcher sich [illegible] der Vergleichung der wirklichen Zahl der singulären Curven [illegible] einem System mit der in die Formel eintretenden Zahl ergeben.

Es erscheint vielleicht nicht überflüssig, von den von den Herren Maillard und Zeuthen berechneten Zahlen an dieser Stelle wenigstens diejenigen Zahlen (a, b) anzuführen, welche angeben, wieviel Curven dritter Ordnung durch a Punkte gehen und b Gerade berühren. In der ersten der folgenden drei Verticalreihen stehen die Zahlen für die Curven dritter Klasse, i[illegible]

veiten die für die Curven vierter Klasse, in der dritten die
e Curven sechster Klasse.

(7,0) = 24	(8,0) = 12	(9,0) = 1
(6,1) = 60	(7,1) = 36	(8,1) = 4
(5,2) = 114	(6,2) = 100	(7,2) = 16
(4,3) = 168	(5,3) = 240	(6,3) = 64
(3,4) = 168	(4,4) = 480	(5,4) = 256
(2,5) = 114	(3,5) = 712	(4,5) = 976
(1,6) = 60	(2,6) = 756	(3,6) = 3424
(0,7) = 24	(1,7) = 600	(2,7) = 9766
	(0,8) = 400	(1,8) = 21004
		(0,9) = 33616.

Scht.

ṛ. Zeuthen. Résultats d'une recherche des caracté-
tiques des systèmes élémentaires de quartiques.
R. LXXV. 703-707.

Jachdem Herr Zeuthen durch seine Bestimmung der Elementar-
kteristiken der Curven dritter Ordnung die Wege gezeigt
um zu den entsprechenden Problemen für Curven höherer
ıng überzugehen, zugleich aber auch die Schwierigkeiten
erkennen lassen, welche die in die Formeln eintretenden
n für die singulären Curven eines Curvensystems den
ıgen dieser Probleme entgegenstellen, beschäftigte er sich
Zweck dieser Lösungen mit den allgemeinen Eigenschaften
Systeme ebener Curven n^{ter} Ordnung. Das Resultat dieser
en ist die im Jahre 1873 erschienene, und darum im nächsten
e der F. d. M. zu besprechende grössere Abhandlung „Al-
elige Egenskaber ved Systemer af plane Curver, med An-
else til Bestemmelse af Karacteristikerne i de elementaere
mer af fjerde Orden“ (Vidensk. Selsk. Skr. 5 Raecke,
vidensk. og mathem. Afd. 10 B. IV), begleitet von einem
ösischen Résumé.

Die vorliegende Abhandlung, der Vorläufer der eben er-
nten, enthält nur die wichtigsten Resultate von des Verfassers

Untersuchungen über die Elementarcharacteristiken der Curven vierter Ordnung. Bei den Elementarsystemen der allgemeinen Curven vierter Ordnung und zwölfter Klasse sind folgende Arten von singulären Curven zu berücksichtigen: 1) ν Curven, welche aus einem Kegelschnitt und einer doppelten Ordnungsgeraden bestehen mit zwei doppelten Klassenpunkten in den beiden Schnittpunkten des Kegelschnitts und der Geraden, und 6 einfachen Klassenpunkten auf der Doppelgeraden, 2) λ Curven, welche aus einem Kegelschnitt und einer ihn berührenden doppelten Ordnungsgeraden bestehen mit einem dreifachen Klassenpunkt im Berührungspunkt und 7 einfachen Klassenpunkten auf der Doppelgeraden, 3) ξ Curven, welche aus zwei einfachen Ordnungs-Geraden und einer durch ihren Schnittpunkt gehenden doppelten Ordnungsgeraden bestehen mit einem vierfachen Klassenpunkt in dem Schnittpunkt und 8 einfachen Klassenpunkten auf der Doppelgeraden, 4) η Curven, welche aus einem doppelten Kegelschnitt bestehen mit 8 einfachen Klassenpunkten auf diesem und dem Kegelschnitt als doppelten Klassenkegelschnitt, 5) ζ Curven, welche aus zwei doppelten Ordnungsgeraden bestehen mit einem dreifachen Klassenpunkt im Schnitt beider und 6 einfachen Klassenpunkten auf einer derselben und 3 auf der andern, 6) ϱ Curven, welche aus einer einfachen und einer dreifachen Ordnungsgeraden bestehen mit einem doppelten Klassenpunkt im Schnitt und 10 einfachen Klassenpunkten auf der dreifachen Geraden, 7) θ Curven, welche aus einer vierfachen Ordnungsgeraden bestehen mit 12 einfachen Klassenpunkten auf ihr, 8) π Curven, welche, nicht zerfallen, einen Doppelpunkt besitzen. Dann bestehen die beiden Gleichungen:

$$\mu' = 6\mu - 4\nu - 3\lambda - 4\xi - 2\eta - 3\zeta - 6\varrho - 12\theta,$$

$$27\mu = \pi + 40\nu + 32\lambda + 46\xi + 14\eta + 24\zeta + 45\varrho + 72\theta,$$

woraus sich die Elementarcharacteristiken mit vielen Bestätigungen ergeben. Doch war es zur Berechnung der Zahlen π nothwendig, vorher die Elementarsysteme aller Curven vierter Ordnung mit singulären Punkten zu behandeln. Bei einigen der oben erwähnten singulären Curven ist ein Klassenpunkt durch die übrigen bestimmt, was damit zusammenhängt, dass eine Relation zwischen

12 von einem Punkte aus an eine Curve vierter Ordnung
genen Tangenten besteht. Am Schluss der Note werden die
nen der Gleichungen einiger der oben aufgezählten Grenzcurven
geben. Die übrigen sind erst in einer folgenden Note
e F. d. M. unten) entwickelt. Scht.

G. ZEUTHEN. Équations de quartiques dont une
artie se réduit à une droite double. C. R. LXXV. 950-954.

Der Verfasser hatte am Schlusse seiner Note über die
entarsysteme der Curven vierter Ordnung (siehe das obige
at) die Gleichungen der in diesen enthaltenen Grenzcurven
auf zwei aufgestellt. In dieser Note werden alle Curven
er Ordnung, von denen der eine Theil eine Doppelgerade
behandelt, und damit ist die angedeutete Lücke ausgefüllt.
eres über diese Gleichungen werden wir im nächsten Bande
F. d. M. zu sagen Gelegenheit haben. Scht.

HALPHÉN. Sur les droites qui satisfont à des con-
tions données. C. R. LXXIV. 41-44.

Der schon früher vom Herrn Verfasser in C. R. LXVIII.
-149, 1869 (F. d. M. II. p. 446) aufgestellte und dort noch
allgemein bewiesene Satz, dass „die Zahl der Geraden,
ie zwei Doppelbedingungen (μ,ν) und (μ_1,ν_1) genügen, gleich
$+\nu\cdot\nu_1$ ist, wenn μ resp. μ_1 die Zahlen der der ersten resp.
en Bedingung genügenden und durch einen Punkt gehenden
den, ν resp. ν_1 die Zahlen der der ersten resp. zweiten Be-
ng genügenden und in einer Ebene liegenden Geraden be-
n" wird hier allgemein und rein geometrisch bewiesen.
Scht.

CHASLES. Détermination immédiate, par le principe
correspondance, du nombre de points d'intersection
deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent
distance finie. C. R. LXXV. 736.

21*

Der Verfasser beweist mit Hülfe des Correspondenzprincips den Fundamentalsatz der analytischen Geometrie: „dass zwei Curven von der Ordnung p und p' sich in $p \cdot p'$ (reellen oder imaginären) Punkten schneiden"; sodann das (in unvollständiger Form schon von Bézout ausgesprochene) Theorem, dass „wenn 2 Curven von der Ordnung p und p' durch ihre Gleichungen dargestellt sind:

$$(x^m, y^n)^p = o; \quad (x^{m'}, y^{n'})^{p'} = o,$$

welche bezw. von dem Grad p und p', in Bezug auf die Variabeln x und y einzeln nur bis zum Grad m, n und m', n' ansteigen, die Zahl der im Endlichen gelegenen Schnittpunkte derselben gleich

$$pp' - (p-m)(p'-m') - (p-n)(p'-n') - \omega$$

ist, wo ω die Zahl der im Unendlichen gelegenen Schnittpunkte darstellt, welche die Curven ausser den

$$(p-m)(p'-m') + (p-n)(p'-n')$$

auf den Coordinatenaxen gelegenen besitzen".

Die Zahl ω, auf deren Bestimmung es hauptsächlich ankommt, erhält man durch Untersuchung der jeweilig vorliegenden Curvengleichung in Bezug auf die im Unendlichen gelegenen Punkte und deren Tangenten. Wie hierbei zu verfahren ist, wird an Beispielen gezeigt.

Der Weg, welchen der Verfasser zur Lösung des genannten Problems einschlägt (die Untersuchung der unendlich entfernten Schnittpunkte lässt sich, nach Einführung homogener Coordinaten, vielleicht einfacher mit Hülfe der Puiseux'schen Betrachtungen über algebraische Functionen führen), ist übrigens schon vor ihm von Baltzer (in einer wenig verbreiteten Abhandlung über Auflösung eines Systems von Gleichungen, Programm des Gymnasiums zum heil. Kreuz, Dresden 1868, siehe F. d. M. I, p. 26) betreten worden. Bl.

O. Tognoli. Corrispondenza. Battaglini G. X. 117-119.

Entsprechen den Flächen eines Flächenbüschels φ von der Ordnung r im Raume Σ die Ebenen eines Ebenenbüschels im Raume Σ', und entspricht dann einer Curve C, von der Ordnung

m und vom Geschlecht p mit β Spitzen, in Σ, eine Curve C' in Σ', so ergiebt sich die Klasse V der von C' oder die Zahl der Flächen φ, welche mit C eine zweipunktige Berührung haben, durch die Formel

$$V = 2(mr - k + p - 1) - \beta,$$

wo k angiebt, wie oft C durch Basispunkte des Flächenbüschels φ geht. Weiterhin wird die analoge Formel für ein Flächennetz resp. dreipunktige Berührung entwickelt. Scht.

M. Chasles. Théorèmes relatifs aux obliques menées par les points d'une courbe sous des angles de même grandeur. C. R. LXXIV. 1146-1154, 1277-1280.

Réaumur untersuchte zuerst (Mémoires de l'Académie des sciences, 1709, p. 149—162 et 185—192) die Geraden, welche die Tangenten einer Curve in ihren Berührungspunkten unter einem gegebenen constanten Winkel in constantem Drehungssinne schneiden. Diese naheliegende Verallgemeinerung sowohl der Tangenten wie der Normalen wurde von Lancret (Mémoire sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure, et des surfaces développables, lu à l'Institut 1806) weiter studirt. Derselbe nannte die einhüllende Curve der so in Punkten einer Curve zugeordneten Geraden, développoïde, und dehnte den Begriff derselben auf Raumcurven aus. Dann hat Dewulf (Mémoire sur les polaires inclinées in den Nouv. Ann., tome XVIII. 1859, p. 322—333 und tome XIX. 1860, p. 175—180) bei Gelegenheit des Beweises einiger Sätze Steiner's über die Normalen unter anderm auch bewiesen, dass sich von einem Punkte m^2 Gerade ziehen lassen, die eine Curve m^{ter} Ordnung unter einem bestimmten Winkel in einem gegebenen Drehungssinne schneiden. Herr Chasles hatte schon in einigen früheren Aufsätzen dieser Verallgemeinerung der Normalen gedacht, z. B. bei dem Beweise des Satzes, dass von einem Punkte aus $m+n$ Normalen an eine Curve m^{ter} Ordnung n^{ter} Klasse gehen (C. R. LXXII. p. 397, Nouv. Ann. (2) X. p. 97, siehe F. d. M. III. p. 290), und in der Abhandlung „Théorèmes relatifs

aux axes harmoniques des courbes géométriques" (C. R. LXXIII. p. 23, F. d. M. III. p. 275). Jetzt leitet Herr Chasles in den beiden vorliegenden Abhandlungen vermittelst des Princips der Correspondenz 30 Sätze ab, welche mit diesen „Schiefe" genannten Geraden in Zusammenhang stehende Anzahlsbestimmungen enthalten, und nur dadurch allgemeiner sind, als die entsprechenden Sätze über Normalen, dass für den speciellen Werth -1 des Doppelverhältnisses, welches Tangente und zugehörige Normale mit den beiden imaginären Kreispunkten auf der unendlich fernen Geraden bestimmen, ein allgemeiner Werth eintritt. Wie immer bei der Anwendung des Princips der Correspondenz, so bestehen auch hier die Schwierigkeiten nur in der richtigen Ausscheidung der besonderen Lösungen. Die Curven werden als mit den Plücker'schen Singularitäten behaftet, vorausgesetzt. Nebenbei sei bemerkt, dass es statt der auf p. 1152 oben angegebenen Formel heissen muss:

„Die gesuchte Curve ist von der Klasse

$$\frac{2m(n-1)-m-t'}{2} = \frac{n(2m-3)-d'}{2},$$

da $3m+t' = 3n+d'$ ist". Scht.

L. Marcks. Bestimmung der Ordnung der Krümmungsmittelpunktsfläche einer Fläche n^{ter} Ordnung.

Clebsch Ann. V. 27-30.

Die vorliegende Mittheilung ist ein Auszug aus den hinterlassenen Manuscripten des im Kriege gefallenen Verfassers, welcher das in der Ueberschrift benannte Problem in der ersten Hälfte des Jahres 1870 gelöst hat. Indess war schon Herr Darboux in den C. R. LXX. p. 1329—1333 (F. d. M. II. p. 556) auf anderem Wege zu demselben Resultate gekommen. Beide setzen eine sogenannte allgemeine Fläche ohne singuläre Elemente voraus. Dann ist die Ordnung der Krümmungsmittelpunktsfläche $2n(n-1)(2n-1)$, die Klasse $2n(n^2-n-1)$. Ist die Fläche allgemeiner von der Ordnung n, der Klasse n', die Zahl ihrer in einer Ebene liegenden Wendetangenten k', die Zahl ihrer von einem Punkt ausgehenden Wendetangenten k, so ergiebt sich

zuerst Herr Sturm vor Kurzem fand, $3n+k'+3n'+k$ als für die Ordnung, $n+k'+n'+k$ als Zahl für die Klasse Krümmungsmittelpunktsfläche, wenn die ursprüngliche Fläche e besonderen Beziehungen der Lage zur unendlich fernen ne und zum Kugelkreis auf dieser hat.

Die zum Referat vorliegende Abhandlung von Marcks findet Ordnung der Krümmungsmittelpunktsfläche durch Addition Ordnungen der drei Curven, welche diese Fläche mit der idlich fernen Ebene gemein hat (analog Steiner die Ordnung Evolute, Crelle Bd. 49). Die Punkte zweier dieser Curven sind lie den unendlich fernen Punkten der ursprünglichen Fläche hörigen Krümmungsmittelpunkte, und die Punkte der dritten e als die den parabolischen Punkten angehörigen Krümmungs-lpunkte zu betrachten. Dabei ist jedoch das Versehen ge-it, dass die eine der beiden ersten Curven, welche eine 'e Beziehung zum Kugelkreise hat, wie die Evolute einer ner endlichen Ebene gelegenen Curve angesehen, also statt einen Kegelschnitt auf zwei ausgezeichnete Punkte polar be-n ist. Scht.

CHASLES. Théorèmes relatifs aux axes harmoniques es courbes géométriques. C. R. LXXIV. 21-23.

Die vorliegende Abhandlung bildet die Fortsetzung einiger rer, welche in den C. R. LXXIII. 1242—1247, 1289—1296 1405—1413 (siehe F. d. M. III. p. 275) enthalten sind, und elben Titel führen. Vermittelst der harmonischen Axen, nter der Herr Verfasser die letzten oder geraden Polaren eht, werden die Punkte mehrerer Curven zu einander in hung gesetzt. Dadurch werden Oerter von Punkten resp. den definirt, deren Ordnungen resp. Klassen in 172 Theo-n angegeben werden.

Die hinzugefügte Bemerkung bezieht sich auf die gestellte ngung, dass zwei Gerade durch zwei entsprechende Punkte Curve vom Geschlechte Null gehen sollen. Ist nämlich Curve die unendlich ferne Gerade, und fallen die Doppel-

punkte der Involution mit den beiden imaginären Kreispunkten zusammen, so specialisirt sich diese Bedingung dahin, dass die beiden Geraden einen Winkel von constanter Grösse bei constantem Drehungssinne bilden sollen. Diese Bemerkung des Herrn Chasles wird fruchtbar in seiner späteren Abhandlung „Théorèmes relatifs aux obliques menées par les points d'une courbe sous des angles de même grandeur" (C. R. LXXIV, p. 1146 u. f., F. d. M. p. 313). Scht.

A. Cayley. On the surfaces each the locus of the vertex of a cone which passes through m given points and touches $6-m$ given lines. Proc. of L. M. S. IV. 11-47.

Nennt man die gegebenen Punkte a, b, c etc. und die gegebenen Linien α, β, γ etc., so sind die betrachteten Oberflächen

$abcdef$ 4ter, $abcde\alpha$ 8ter,
$abcd\alpha\beta$ 16ter, $abc\alpha\beta\gamma$ 24ter,
$ab\alpha\beta\gamma\delta$ 24ter, $a\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ 14ter,
$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ 8ter Ordnung.

Die Ordnung ist schon bekannt durch die Untersuchungen von Chasles, der auch die Fläche a, b, c, d, e, f discutirte und in Beziehung zu der Fläche $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ setzte. Diese beiden und auch die Flächen $a, b, c, d, e\alpha$ und $a, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sind discutirt in Hierholzer's Abhandlung „Ueber Kegelschnitte im Raume" (Clebsch Ann. II. 563—586 siehe F. d. M. II. p. 570). Die gegenwärtige Arbeit ist eine Fortsetzung und Weiterentwickelung der Arbeit von Hierholzer. Die Resultate sind in einer Tabelle der Singularitäten p. 12 enthalten. Cly. (O.)

Em. Weyr. Ueber die Anzahl der Doppelnormalen einer rationalen Raumcurve. Borchardt J. LXXIV. 279-281.

Doppelnormale einer Raumcurve ist eine Gerade, welche für zwei Punkte der Raumcurve Normale ist. Für eine rationale Raumcurve n^{ter} Ordnung beträgt ihre Anzahl $(n-1)(5n-7)$; davon sind im Endlichen gelegen $\frac{(n-1)(9n-14)}{2}$. Schn.

. WEYR. Ueber Normalen rationaler Raumcurven.
Borchardt J. LXXIV. 277-279.

Es wird bewiesen, dass durch einen beliebigen Punkt des
ımes $3n-2$ Normale einer rationalen Raumcurve n^{ter} Ord-
ıg hindurchgehen. Schn.

PAINVIN. Sur la théorie des caractéristiques.
Darboux Bull. III. 155-160.

Der Begriff der Charakteristiken bei Curven und Flächen
d definirt. Darauf folgt ein Litteraturverzeichniss aller Ar-
ten, welche die Theorie der Charakteristiken ausgebildet und
ördert haben, bis zu den ersten Monaten des Jahres 1872.
grösste Theil dieser Arbeiten ist in den C. R. von 1864 an
ıalten. Scht.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Capitel 1.

Coordinaten.

R. Heger. Elemente der analytischen Geometrie mit homogenen Coordinaten. Braunschweig. Vieweg.

Siehe F. d. M. II. p. 448, III. p. 307.

F. Lucas. Nouvelle méthode d'analyse fondée sur l'emploi des coordonnées imaginaires. C. R. LXXV. 1250 — 1253.

Principiell Neues enthält die Methode nicht. Wird der Punkt M durch $\mu = x + iy$ dargestellt, so heisst

$$\frac{(\mu-\mu')\ (\nu-\nu')}{(\mu-\nu')\ (\nu-\mu')}$$

das anharmonische Verhältniss der Punkte M, M', N, N'. Sind zwei Paare von festen Punkten $M_1, \cdots M_p$; $N_1, \cdots N_p$ gegeben, und ein beweglicher V, so bestimmen die Lagen, für welche $\frac{\Pi VM_\lambda}{\Pi VN_\lambda}$ zum Maximum oder Minimum wird, die Kreispunkte des Systems.

No.

Mac Berlin. Om komplexa koordinater inom plan Geometrin. Lunds Univ. Årsk. 1872.

Wenn x und y die reellen rechtwinkligen Coordinaten eines
ktes in der Ebene sind, so kann man bekanntlich diesen
kt als den geometrischen Repräsentanten der Grösse $x+yi$
ıchten. Wenn aber ξ und η complex sind, so kann man
och die Grösse $\xi+\eta i$ auf die Form $x+yi$ bringen, und
ich dieselbe in der Ebene construiren. Dieses ist der der
ındlung zu Grunde liegende Gedanke, den der Verfasser
nders zur Construction „der complexen Durchschnittspunkte
er Curven" (Gerade und Kreis, zwei Kreise, zwei Kegel-
itte etc.) in Anwendung bringt. Leider kommt man dabei
Widersprüche. Es lässt sich ebensowohl beweisen, dass die
ıdenen Punkte Durchschnitte der Curven sind, als das Gegen-
. Eine Gleichung mit zwei Veränderlichen repräsentirt für
Verfasser „die ganze Ebene"; man kann aber ebensowohl
ɛisen, dass es keinen einzigen Punkt in der Ebene giebt,
lerselben angehört. Bg.

PAINVIN. Courbure d'une courbe donnée par son
ɿuation tangentielle. Darboux Bull. III. 174-190.

Coordinaten einer Geraden werden die Coordinaten des Fuss-
:ts des vom Anfangspunkt auf sie gefällten Lothes dividirt
h dessen Quadrat genannt. Der Verfasser entwickelt nun
ɑeln, welche die Bestimmungsstücke einer beliebigen ebenen
'e durch die Coordinaten ihrer Tangente ausdrücken, und
let sie auf eine Reihe specieller Curven an. Resultate, die
t mit aller Bequemlichkeit auch ohne diese neuen Formeln
ergeben, kommen indess nicht vor. H.

'ST. Théorie des coordonnées curvilignes quelconques.
rioschi Ann. (2) V. 261.

Das Referat folgt im nächsten Bande nach Vollendung der
it. K.

DARBOUX. Sur un nouveau système de coordonnées
sur les polygones circonscrits aux coniques.
st. XL. 180-182.

Die bekannten Sätze über Polygone, die Kegelschnitten ein- und umgeschrieben sind, sowie manche neue ergeben sich mit Leichtigkeit bei Zugrundelegung folgenden Coordinatensystems:

Variirt m in der Gleichung:

$$(1) \qquad \alpha m^2 + \beta m + \gamma = 0,$$

wo α, β, γ lineare Functionen von x und y sind, so drückt sie bekanntlich nach und nach alle Tangenten des Kegelschnitts:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

aus. Damit die Gerade (1) durch einen bestimmten Punkt $(\alpha', \beta', \gamma')$ gehe, muss m der Gleichung genügen:

$$\alpha' m^2 + \beta' m + \gamma' = 0.$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung ϱ und ϱ_1, so hat man:

$$\alpha' = \frac{-\beta'}{\varrho + \varrho_1} = \frac{\gamma'}{\varrho\varrho_1}.$$

Da man nun α', β', γ' als durch ϱ und ϱ_1 bestimmt ansehen kann, so sind ϱ und ϱ_1 als Coordinaten des Punktes $(\alpha' \beta' \gamma')$ aufzufassen. In diesem System ist z. B. die Gleichung des Kegelschnitts:

$$(\varrho - \varrho_1)^2 = 0.$$

Hat man eine algebraische Gleichung: $f(\varrho, \varrho_1) = 0$, die nicht symmetrisch für ϱ und ϱ_1 ist, und ist sie für ϱ vom Grade m, für ϱ_1 vom Grade m_1, so stellt sie eine Curve vom Grade $m + m_1$ dar. Ist aber die Gleichung symmetrisch und vom Grade m, so drückt sie eine Curve vom Grade m aus. Der Fall, dass $f(\varrho, \varrho_1)$ zerlegbar ist, wird nicht behandelt, weil er im Folgenden keine Anwendung findet. Umgekehrt wird jede Curve m^{ten} Grades durch die allgemeinste in ϱ und ϱ_1 symmetrische Gleichung vom Grade m ausgedrückt. Um eine Vorstellung von der Anwendbarkeit dieser Coordinaten zu geben, sei noch Folgendes angeführt:

Geht eine Curve n^{ten} Grades durch den Durchschnitt zweier Systeme von n Geraden $A_1, A_2, \cdots A_n$ und $B_1, B_2, \cdots B_n$, so hat sie die Gleichung:

$$A_1 \cdot A_2 \cdots A_n = k . B_1 \cdot B_2 \cdots B_n.$$

Sind nun A_i, B_i Tangenten des Kegelschnitts:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0,$$

ist:

$$A_i = \alpha a_i^2 + \beta a_i + \gamma = \alpha (a_i - \varrho)(a_i - \varrho_1),$$
$$B_i = \alpha b_i^2 + \beta b_i + \gamma = \alpha (b_i - \varrho)(b_i - \varrho_1).$$

Setzt man:

$$\varphi(\varrho) = (\varrho - a_1)(\varrho - a_2) \cdots (\varrho - a_n),$$
$$\psi(\varrho) = \sqrt{k} \cdot (\varrho - b_1)(\varrho - b_2) \cdots (\varrho - b_n),$$

wird die Gleichung jener Curve n^{ten} Grades:

$$(2) \qquad \frac{\varphi(\varrho)}{\psi(\varrho)} = \frac{\psi(\varrho_1)}{\varphi(\varrho_1)},$$

er auch:

$$\frac{m\varphi(\varrho) + n\psi(\varrho)}{m'\varphi(\varrho) + n'\psi(\varrho)} = \frac{m\psi(\varrho_1) + n\varphi(\varrho_1)}{m'\psi(\varrho_1) + n'\varphi(\varrho_1)},$$

d wenn:

$$\Phi(\varrho) = m\varphi(\varrho) + n\psi(\varrho),$$
$$\Psi(\varrho) = n\varphi(\varrho) + m\psi(\varrho),$$
$$m = n'; \quad n = m',$$

bringt man (2) auf die Form:

$$\frac{\Phi(\varrho)}{\Psi(\varrho)} = \frac{\Psi(\varrho_1)}{\Phi(\varrho_1)},$$

lche Gleichung derjenigen (2) ganz ähnlich ist, aber eine Con-
nte enthält, der man alle möglichen Werthe geben kann.
lso: „Geht eine Curve n^{ten} Grades durch die n^2 Durchschnitts-
nkte zweier Systeme von n Tangenten eines Kegelschnitts, so
thält sie unendlich viel andere Systeme von n^2 Punkten, die
e Durchschnitte zweier Systeme von n Tangenten des Kegel-
hnitts sind.“

In dieser Weise folgen dann noch ähnliche Sätze.

Mz.

Darboux. Polygones inscrits et circonscrits aux coniques, nouveau système de coordonnées, propriétés des courbes de quatrième ordre. Inst. XL. 259-263.

Fortsetzung der vorigen Betrachtungen mit Benutzung eines
tzes über ultra-elliptische Functionen.

Mz.

E. Hutt. Eine neue Form der elliptischen Kugelcoordinaten. Pr. Berlin.

Diese neuen Coordinaten entstehen folgendermaassen: In der XZ-Ebene eines geradlinig-rechtwinkligen Coordinatensystems seien zwei durch den Anfangspunkt O gehende, symmetrisch zur Z-Axe liegende feste gerade Linien S und S_1. Jede von diesen bilde mit der Z-Axe den Winkel s; S liege zwischen der positiven z und der positiven x-Richtung; S_1 zwischen der positiven z und der negativen x-Richtung. Jede durch O gehende Gerade L kann dann ihrer Richtung nach durch diejenigen beiden Winkel u und v bestimmt werden, die sie mit S, resp. S_1 bildet. Es sollen u und v diejenigen Winkel sein, welche ganz auf der einen oder ganz auf der andern Seite der XY-Ebene liegen. Setzt man nun

$$\frac{v+u}{2} = \sigma, \quad \frac{v-u}{2} = \delta,$$

und ist r die Entfernung eines Punktes (xyz) der Richtung L vom Anfangspunkte O, so hat man die Gleichungen

$$x = \frac{r \sin\sigma \sin\delta}{\sin s},$$

$$y = \frac{r\sqrt{(\sin^2\sigma - \sin^2 s)(\sin^2 s - \sin^2\delta)}}{\sin s \cos s},$$

$$z = \frac{r \cos\sigma \cos\delta}{\cos s},$$

wodurch ein Coordinatensystem r, σ, δ im Raume, und ein solches σ, δ auf der Kugel um O, deren Radius r, definirt wird. Mit Zugrundelegung dieses Coordinatensystems wird nun die Rectification und Quadratur sphaerischer Kegelschnitte, ferner die Herleitung geometrischer Eigenschaften der Wellenoberfläche, sowie deren Cubatur durchgeführt. Mz.

G. Frattini. Sulle coordinate curvilinee. Battaglini G. X. 235. Siehe Abschn. IX. Cap. 5.

J. Versluys. Démonstration nouvelle de la propriété associative de la multiplication des quaternions. Arch. Néerl. VII. 177-182.

Der Verfasser sucht für das associative Princip der Quater-
)nen einen einfacheren Beweis zu geben, als Hamilton und
)bius. Dieser Beweis ist ähnlich dem für das distributive
incip und beruht auf demselben. Das distributive Princip wird
nächst für zwei collineare Quaternionen und zwei Vectoren be-
esen, zuerst für den Multiplicator, dann für den Multiplicandus,
nn für scalare Quaternionen, endlich für beliebige Quaternionen.
s associative Princip, das für die Tensoren evident ist, wird
Versoren bewiesen, indem dieselben durch grösste Kugelkreise
'gestellt werden, und zwar zunächst für den Fall, dass der
tte durch den Dividendus des Products der beiden andern
it, sodann wenn der zweite Faktor ein Scalar ist, endlich für
ı allgemeinen Fall. Zu erwähnen ist noch, dass der Verfasser
sen Beweis auf die Relation basirt, welche zwischen Multi-
:ation und Division der Quaternionen existirt, aber nicht auf
Eigenschaften der Symbole i, j, k. Mn. (Wn.)

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

. HATTENDORFF. Einleitung in die analytische Geometrie. Hannover.

Das Buch soll als Leitfaden bei den vom Verfasser an der
lytechnischen Schule gehaltenen Vorträgen dienen und einen
eil des Heftschreibens entbehrlich machen. Desshalb ist für
: Darstellung eine möglichst knappe Form gewählt, und die
sarbeitung nicht überflüssig gemacht, sondern nur durch die
:hte Uebersichtlichkeit der Gliederung erleichtert. M.

RNOY. Cours de géométrie analytique. Géométrie
plane. Louvain.

Dies Werk ist in demselben Sinne verfasst, wie die Kegelschnitte von Salmon, von denen es in Bezug auf die Curven zweiter Ordnung einen Auszug giebt. Es enthält ferner eine Einleitung in die Theorie der Determinanten, einige Sätze über Curven dritter und n^{ter} Ordnung, endlich die Fundamentalsätze der Geometrie der Richtung von P. Serret. An einigen Stellen hat Referent gefunden, dass die Beweise nicht genügend streng sind, aber im Ganzen ist das Werk eine gute Einleitung zu weitergehender Behandlung der angeführten Abschnitte.

Mn. (Wn.)

BOURDON. Application de l'algèbre à la géométrie, comprenant la géométrie analytique à deux et à trois dimensions. 7me édition revue et annotée par G. Darboux. 8. Paris Gauthier-Villars.

J. PETERSEN. Bidrag til Enveloppe-theorien. Zeuthen Tidsskr. (3) II. 81.

Neue Begründung der Theorie der Enveloppen.

Hn. (Wn.)

MAX MARIE. Sur quelques propriétés de l'enveloppe imaginaire de conjuguées d'un lieu plan. C. R. LXXV 7-10.

Unter einer conjugirten Tangente einer ebenen Curve versteht der Verfasser nach Poncelet's Vorgange eine Tangente mit imaginärem Berührungspunkte, aber reeller Richtung, deren unendlich entfernter Punkt also reell ist, wie solche im Allgemeinen vorhanden sind, wenn von den einer beliebigen reellen Richtung parallelen Tangenten einige imaginär werden. Ist

$$y = mx + p + qi$$

die Gleichung einer solchen Tangente, in welcher m, p, q reell sind, und $i = \sqrt{-1}$, so stellt der Verfasser dieselbe durch eine reelle Gerade dar, die durch einfache Fortlassung des Factors aus der obigen Gleichung entsteht. Lässt man nun den Richtungscoefficienten m sich ändern, so ändert sich auch die eben be-

rochene Gerade, und ihre Enveloppe ist eine Curve, welcher
r Verfasser den in der Ueberschrift angeführten Namen giebt.
ter den Eigenschaften derselben sind folgende zu nennen: Wenn
e Curve eine Enveloppe der conjugirten Tangenten hat, so
let zwischen beiden Curven in dieser Beziehung Reciprocität
tt; beide Curven berühren sich in ihren Wendepunkten. Wenn
: Krümmungsradius in einem Berührungspunkte einer der
hergenannten imaginären Tangenten $r+ir'$ ist, so hat die En-
oppe der Conjugirten im entsprechenden Punkte den Krüm-
ngsradius $r+r'$; der Krümmungsradius in dem dem conjugirten
nkte entsprechenden ist $r-r'$, so dass aus den Krümmungs-
ien in diesen beiden Punkten der reelle und der imaginäre
standtheil jenes Krümmungsradius sich ergiebt.

Die zu einer Hyperbel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ gehörige Enveloppe
conjugirten Tangenten ist

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Bezug auf dieselben ergiebt sich der Satz: Die imaginäre
riode des Bogenintegrals einer Hyperbel ist bis auf den ima-
ıären Einheits-Factor i gleich der Differenz der Längen der
ymptoten und der conjugirten Hyperbel. Die reelle Periode
gleich der Differenz der Gesammtlängen der Asymptoten und
r Hyperbel selbst. Beide Aussprüche haben allerdings nur
nn, wenn angegeben ist, wie das Differential der Differenz beider
ngen aufgefasst werden soll; also etwa, wenn man beide auf
als unabhängiges Differential bezieht, was der Verfasser indess
erwähnen nicht für nöthig hält.

Ebenso lässt sich der allgemeine Satz aussprechen, dass die
llen Perioden der Bogen-Integrale einer Curve absolut gleich
n imaginären Perioden der Bogenintegrale der conjugirten
rve sind.

Endlich lässt sich das Integral $\int y\,dx$, zwischen zwei ima-
ären Punkten $x_0\,y_0$, $x_1\,y_1$ einer reellen Curve, in denen die Tan-
ten reelle Richtungen haben, reell folgendermaassen darstellen:

Seien A und B die reellen Darstellungen der bezeichneten Punkte, Aa, Bb ihre Ordinaten, S gleich dem Segment $AabB$, S' gleich dem Segment für die Darstellung der conjugirten Punkte $A'a'b'B'$; CA der Ort der Mitten der Sehnen $AA', \cdots BB'$ und S_1 das ihnen entsprechende Segment $(CcdD)$. Dann ist in den bezeichneten Grenzen

$$\int y\,dx = 2S_1 - \tfrac{1}{2}(S+S') + \tfrac{1}{2}(S-S')i.$$

Obschon die Resultate somit, namentlich diejenigen, welche die Perioden betreffen, nicht ohne Interesse sind, so vermisst man doch eine Beziehung derselben zu irgend einer fundamentalen Behandlungsweise des Imaginären in der Geometrie. Einer solchen scheint der Verfasser überhaupt fern gestanden zu haben. Uebrigens sei bemerkt, dass die von ihm betrachteten Tangenten solche sind, die nach der v. Staudt'schen Auffassung dargestellt werden müssten durch einen elliptisch involutorischen Parallelstrahlbüschel, und dass wenn man dieselbe von der unendlich entfernten Geraden ausgehend harmonisch darstellt, man als das eine Strahlenpaar der Involution die beiden Geraden erhält, durch welche der Verfasser jene zwei conjugirten Tangenten darstellt. Hierdurch ist der Zusammenhang der Betrachtungen des Verfassers mit v. Staudt's Theorie des Imaginären ersichtlich.

A.

E. Pellet. Note sur les podaires obliques. Darboux Bull. III. 278-281.

Schiefe Fusspunktcurve nennt der Verfasser den Ort des Durchschnitts eines auf die Tangente einer Curve unter constantem Winkel auffallenden Strahles mit der Tangente. Ihre Gleichung stellt er erst mit Hülfe der normalen Fusspunktcurve relativ zu ihr, und dann die 2 Gleichungen auf, aus denen durch Elimination des Einfallswinkels α die Relation der Polarcoordinaten hervorgeht. Bei Variation von x erzeugt das Curvenelement ein Viereck

$$\partial\sigma = \frac{ct\,\partial\vartheta\,\partial\alpha}{\sin\alpha},$$

wo c den Strahl, t die vom Einfallspunkt begrenzte Tangente der Urcurve, ϑ den Richtungswinkel der Tangente bezeichnet.

t die Urcurve geschlossen und convex, das Strahlencentrum im nern, so gehen durch jeden Punkt der Ebene 2 Fusspunkt-rven, und man hat:

$$\int \frac{\partial \sigma}{c}\left(\frac{\sin \alpha}{t}+\frac{\sin \alpha_1}{t_1}\right)=2\pi^2,$$

$$\int \partial \sigma \left(\frac{\sin^2 \alpha}{t}+\frac{\sin^2 \alpha_1}{t_1}\right)=\pi L,$$

o die Integrale sich über den äusseren Flächenraum erstrecken. ür das letztere braucht das Centrum nicht im Innern zu liegen.

H.

. KIEPERT. Ueber rechtwinklige Trajektorien. Schlömilch Z. XVII. 420-424.

Das Problem, die rechtwinkligen Trajektorien für das Curven-stem $\mu = f(x,y)$ zu finden, wo μ ein alle Werthe von $-\infty$ s $+\infty$ durchlaufender Parameter ist, führt bekanntlich auf die tegration der Differentialgleichung $\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dy}{dx}=0$. Diese tegration ist, wie Euler angegeben, leicht ausführbar, wenn (x,y) eine Summe oder ein Produkt einer rationalen Function n x und einer eben solchen von y ist. Dem analog entwickelt err Kiepert die Differentialgleichung der rechtwinkligen Tra-ctorien, wenn das Curvensystem in Polarcoordinaten $\mu = f(r,t)$ geben ist, und zeigt, dass diese namentlich integrirbar ist, wenn (r,t) eine Summe oder ein Product einer rationalen Function on r und einer rationalen Function von t oder $\sin t$ und $\cos t$ st. Endlich wird für den Fall, dass ein Curvensystem die peciellere Gleichung $\mu = r^n \cdot T$ hat, wo T eine rationale Function on t oder $\sin t$ und $\cos t$ ist, ein besonderer, durch ein Beispiel rläuterter Satz abgeleitet.

Scht.

. PICQUET. Étude géométrique des systèmes ponctuels et tangentiels de sections coniques. Paris, Gauthier-Villars.

Wir geben die Ueberschriften der einzelnen Kapitel nach em ausführlicheren Referat, welches sich in Darboux Bull. III. —68 findet. Chap. Ier: Théorie de l'involution plane; Chap. II:

Des systèmes ponctuels (Schaar der resp. 2, 3, 4, 5 Curven C, C', C'', C''', C^{IV}: $\lambda C + \mu C' + \nu C'' + \varrho C''' + \sigma C^{IV} = o$); Chap. III: Des systèmes tangentiels (entsprechend dem vorigen); Chap. IV: Propriétés générales des coniques en involution. — Cas particuliers: und Chap. V: Examen des cinq cas dans lesquels deux systèmes peuvent être contravariants. M.

B. Theorie der algebraischen Curven.

Em. Weyr. Bestimmung unendlich weiter Elemente der geometrischen Gebilde. Casopis I. 161-186. (Böhmisch.)

Von den Hesse'schen homogenen Coordinaten ausgehend, entwickelt der Verfasser die Gleichung der unendlich fernen Geraden, parallelen Geraden, bestimmt die unendlich weiten Punkte und Asymptoten der algebraischen ebenen Curven, besonders für die Kegelschnitte im Besonderen und Allgemeinen, die Gleichung der imaginären Kreispunkte ($x^2 + y^2 = o$). Hierauf wird auf ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte eingegangen. Wenn man die Gleichung einer algebraischen ebenen Curve n^{ten} Grades in der Form schreibt $u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots u_1 + u_0 = o$, wobei allgemein u_k das Glied k^{ten} Grades bezeichnet, so erhält man die unendlich weiten Punkte (resp. die Werthe des Verhältnisses $\frac{y}{x}$ für diese Punkte) aus der Gleichung $u_n = o$, welche für das Verhältniss $\frac{y}{x}$ n Werthe $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ liefert. Unter Benutzung der bekannten Eigenschaften homogener Funktionen zeigt nun der Verfasser, dass die Gleichung der Asymptoten lautet:

$$\frac{\xi \frac{\partial u_n}{\partial x} + \eta \frac{\partial u_n}{\partial y} + u_{n-1}}{x^{n-1}} = o,$$

wobei nach durchgeführter Division mit x^{n-1} statt $\frac{y}{x}$ der Reihe nach $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ zu setzen ist. Nachdem einige allgemeine Be-

ıerkungen über das Fehlen von Gliedern (u) in der Curven-leichung vorausgeschickt worden, wird auf Grund der entwickelten heorie die Cissoïde, Cardioïde und Conchoïde besonders be-andelt, resp. die Gleichungen der Asymptoten dieser Curven estimmt. W.

ıAGUERRE. Mémoire de géométrie analytique. Liouville J. (2) XVII. 1-55. Sur les covariants doubles des formes binaires. Inst. XL. 77-78.

Ist $\lambda(Y-y) = \mu(X-x)$ die Gleichung der Tangenten einer gebraischen Curve im Punkte x, y; so kann die Grösse $\frac{\lambda y - \mu x}{\lambda}$ s algebraische Funktion von $\frac{\mu}{\lambda}$ betrachtet werden. Man er-ält dafür eine in den drei Grössen $\lambda, \mu, \lambda y - \mu x$ homogene leichung, welche nach Potenzen von λ, μ geordnet vom Ver-sser „gemischte Gleichung der Curve" genannt wird. Sie de-iirt die Curve vollständig, da sie nichts anderes ist als die leichung derselben in Linien-Coordinaten. Insbesondere ist ihr rad in λ, μ die Classe der Curve. Die Coefficienten der ge-ischten Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ sind ganze Funktionen von y, welche aber nicht völlig willkürlich gedacht werden dürfen. Aber auch abgesehen von den Beschränkungen der Coefficienten weist sich die geometrische Interpretation der Theorie der nären Formen, angewendet auf die Funktionen $f(\lambda, \mu)$, als uchtbare Quelle von Sätzen über die Curven 3ter und 4ter Classe, e theilweise auch verallgemeinert werden können. St.

. FOLIE. Fondements d'une géométrie supérieure car-tésienne. Mém. de Belg. XXXIX. I-II., 1-142.

I. Ebene Geometrie. A. Gewöhnliche rechtwinklige Coor-inaten. 1) Herr Folie giebt folgende Definitionen. Zwei Systeme n n Geraden von der Beschaffenheit, dass jede alle Geraden s andern Systems auf einer Curve n^{ter} Ordnung schneidet, lden „zwei conjugirte Polygone von n Seiten", die jener Curve

einbeschrieben sind. Z. B. ein einem Kegelschnitt einbeschriebenes Vierseit ist ein System von zwei dem Kegelschnitt einbeschriebenen Zweiecken. Zwei Systeme von $m+1$ Geraden von der Beschaffenheit, dass jede alle Geraden des andern Systems mit Ausnahme einer derselben auf einer Curve n^{ter} Ordnung schneidet, bilden zwei conjugirte Polygone von $n+1$ Seiten, die der Curve einbeschrieben sind; z. B. ein einem Kegelschnitt einbeschriebenes Rechteck ist gleich zwei conjugirten Dreiecken. [Herr Clebsch übersetzt in einem Briefe an den Referenten die genannten Figuren mit „Gitter", und nennt die beiden Arten resp. „vollständige" und „unvollständige Gitter".]

2) Fundamentalsatz. Sind δ_1, δ_2 zwei Secanten einer Curve n^{ter} Ordnung, so kann die Gleichung derselben $C_n = 0$ auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)$ verschiedene Arten in folgende Form gebracht werden $\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot C_{n-2} - K\delta'_1\,\delta_2' \cdots \delta_n' = 0$. Für Curven dritter, vierter und fünfter Ordnung kann man, wie der Verfasser zeigt, C_{n-2} auf ein System von Geraden reduciren und daher auf diese Curven die Sätze von Pappus, Desargues und Pascal ausdehnen. Der erste fällt mit dem Fundamentalsatze zusammen, der zweite folgt daraus auf sehr einfache Weise, während man zum Beweise des dritten noch folgenden Satz gebraucht: „Haben zwei Systeme von je zwei Polygonen von n Seiten, die einer Curve n^{ter} Ordnung einbeschrieben sind, zwei Gerade des einen und $n-3$ Gerade des andern Systems gemeinsam, so bilden die übrigbleibenden Geraden, $2(n+1)$ an Zahl, ein System von einbeschriebenen Polygonen von $(n+1)$ Seiten". Die Beweise jener Sätze für Curven dritter Ordnung werden auf folgende Weise geführt.

3) Satz von Desargues. Es sei $\delta_1\delta_2\delta_3 - K\delta_1'\delta_2'\delta_3' = 0$ die Gleichung einer Curve dritter Ordnung, wobei δ die Form hat $y - ax - b$. Durch einen Punkt M_1 der Curve ziehe man zu den sechs Geraden δ die Parallelen $f_1, f_2, f_3, f_1', f_2', f_3'$, welche die Form $y - ax - \gamma$ haben. Dann kann man die Gleichung der Curve auf die Form bringen

$$\frac{(\gamma_1 - b_1)(\gamma_2 - b_2)(\gamma_3 - b_3)}{(\gamma_1' - b_1')(\gamma_2' - b_2')(\gamma_3' - b_3')} = K.$$

Es seien nun $O_1, O_2, O_3, O_1', O_2', O_3'$ die Schnittpunkte der Geraden

einer durch M_1 zur y-Axe gezogenen Parallelen, so nimmt
tzte Gleichung die Form an:

$$\frac{O_1M_1\cdot O_2M_1\cdot O_3M_1}{O_1'M_1\cdot O_2'M_1\cdot O_3'M_1}=K.$$

be Gleichung besteht noch für die Punkte M_2, M_3, in denen
'arallele zur y-Axe die Curve ausser in M_1 schneidet. Dem-
lautet der verallgemeinerte Satz von Desargues:

$$\frac{O_1M_1\cdot O_2M_1\cdot O_3M_1}{O_1'M_1\cdot O_2'M_1\cdot O_3'M_1}=\frac{O_1M_2\cdot O_2M_2\cdot O_3M_2}{O_1'M_2\cdot O_2'M_2\cdot O_3'M_2}$$
$$=\frac{O_1M_3\cdot O_2M_3\cdot O_3M_3}{O_1'M_3\cdot O_2'M_3\cdot O_3'M_3}.$$

ülfssatz. Ein andres System von 2 conjugirten Dreiecken
eine ähnliche Gleichung, in der nur die 6 Punkte O durch
ere Punkte $P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3'$ ersetzt sind. Fallen nun
O_3, O_1', mit P_1, P_2, P_3, P_1' zusammen, so ergiebt die Combi-
der beiden Gleichungen

$$\frac{O_2'M_1\cdot O_3'M_1}{P_2'M_1\cdot P_3'M_1}=\frac{O_2'M_2\cdot O_3'M_2}{P_2'M_2\cdot P_3'M_2}=\frac{O_2'M_3\cdot O_3'M_3}{P_2'M_3\cdot P_3'M_3}.$$

etzt man nun $M_2M_1=a, M_3M_1=b, O_2'M_1=x_1, O_3'M_1=x_2,$
$=y_1, P_3'M_1=y_2$, so nehmen die vorhergehenden Glei-
en eine Form an, welche zeigt, dass die Gleichung zweiten
s für z

$$\frac{(x_1+z)(x_2+z)}{x_1x_2}=\frac{(y_1+z)(y_2+z)}{y_1y_2}$$

'urzeln hat, O, a, b und daher eine identische Gleichung ist.
s folgt dann, dass P_2', P_3' mit O_2', O_3' zusammenfallen. Sind
ch zwei Systeme von je zwei conjugirten Dreiecken, die
Curve dritter Ordnung einbeschrieben sind, so beschaffen.
ier Gerade des einen Systems vier Gerade des andern auf
geraden Linie schneiden, so schneiden die beiden fehlenden
sten Systems die beiden fehlenden des zweiten Systems auf
en Geraden. Daraus folgt leicht der Pascal'sche Satz.
erfasser beweist dann weiter den Satz noch einfacher durch
merkung, dass der Satz mit dem Fundamentaltheorem für
urve vierter Ordnung zusammenfällt, die aus einer Curve

dritter Ordnung und einer unbestimmten Geraden besteht. Durch Verallgemeinerung dieses Gedankens hat Herr Folie den Satz von Desargues auf conjugirte einbeschriebene Polygone ausgedehnt, die zum Theil von Curven gebildet werden.

B. Tangential-Coordinaten. Das Princip der Dualität liefert analoge Sätze für Curven von der Klasse *n*.

C. Polarcoordinaten. Herr Folie verallgemeinert auf elementare Weise den Newton'schen Satz über den Schnitt zweier Winkel, die sich um feste Punkte drehen.

II. Geometrie des Raumes. Die vorhergehende Theorie lässt sich auf Oberflächen zweiten und dritten Grades (oder Classe) ausdehnen, weil diese Oberflächen Gerade enthalten. Der Verfasser will später seine Methode auf Raumcurven anwenden.

Mn. (Wn.)

L. Crocchi. Teorema di geometria. Battaglini G. X. 302-304.

Beweis des Satzes: „Zwei geschlossene Curven, von denen die eine innerhalb der andern liegt, gehören derselben Familie an, wenn die Fläche des zwischen ihnen liegenden Stückes gleich derjenigen einer anderen geschlossenen Curve ist, die mit einer von den beiden ersten Curven von derselben Familie ist.

Mz.

S. Gundelfinger. Intorno ad alcune formole della teoria delle curve di secondo e di terzo ordine. Brioschi Ann. (2) V. 223-236.

Siehe Abschnitt II. Cap. 3. p. 66

H. Grassmann. Ueber zusammengehörige Pole. Gött. Nachr. 1872. 567-577.

Die Theorie conjugirter Pole bei Curven dritter Ordnung wird in einer Form behandelt, die es ermöglicht zusammengehörige Pole auch bei Curven höherer Grade aufzufassen und in ihren Beziehungen zur Curve zu behandeln.

Schn.

DEWULF. Des intersections des faisceaux de courbes et des faisceaux de leur polaires inclinées. Nouv. Ann. 2) XI. 297-305.

Der Aufsatz beginnt mit folgender dem Referenten unver- ıdlichen Erklärung: Erste schiefe Polare eines Punkts P in ug auf eine Curve C^n haben wir (Nouv. Ann. (1) XVIII. 232) Ort der Punkte genannt, wo alle von P ausgehenden Geraden Curve unter constantem Winkel treffen. H.

CAYLEY. Sur les courbes aplaties. C. R. LXXIV. 708-712, 1393-1395

Der Verfasser betrachtet eine ebene Curve, die durch eine ichung n^{ten} Grades gegeben ist: $f(x,y,k) = 0$, und welche für $= 0$ sich auf die Form $P^\alpha . Q^\beta \dots = 0$ reducirt. Für $k =$ un- llich klein, bezeichnet durch $k = 0^1$, wird die Curve die Penultima nultième) von $P^\alpha . Q^\beta \dots = 0$. Nach einigen Vorbemerkungen rachtet der Verfasser dann einen Kegelschnitt, der die Penul- a von $x^2 = 0$, und hierauf eine Curve 4ten Grades, die die nultima von $x^2 y^2 = 0$ ist. Mz.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

RITSERT. Die Herleitung der Determinante für den Inhalt des Dreiecks aus den drei Seiten. Schlömilch Z. XVII. 518-520.

Sind die Ecken des Dreiecks bestimmt durch die rechtwink- n Coordinaten $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3$, so gilt für den Inhalt J zu- hst die Gleichung:

$$2J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix};$$

drirt man beide Seiten und multiplicirt darauf mit 4, so wird:

$$16J^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & a^2+b^2-c^2 \\ 0 & a^2+b^2-c^2, & 2b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} \text{u.s.w.}$$

K.

J. Muir. Homologous triangles. Messenger. (2) II. 55-59, 99-102.

In einem dreistrahligen Büschel werden zwei oder mehr Dreiecke, von denen jedes einen Scheitel in jedem der Strahlen hat, homolog in Beziehung auf den Strahlenkegel genannt. Zwei Dreiecke sind doppelt homolog, wenn sie homolog sind in Beziehung auf zwei verschiedene Büschel, so dass, (wie leicht bewiesen werden kann) wenn zwei Dreiecke doppelt homolog sind, sie auch dreifach homolog sein werden. Die Arbeit enthält neue Sätze über homologe Dreiecke, welche man nicht in kurzen Worten aussprechen kann. Sie werden mittels Dreilinien-Coordinaten bewiesen. Glr. (O.)

J. Muir. An equation in the geometry of straight lines. Messenger (2) I. 150-151.

Die Gleichung zweier geraden Linien, die die Schnittpunkte von zwei Paaren von geraden Linien verbinden, in Dreilinien-Coordinaten. Glr. (O)

O. Hesse. Ein Cyclus von Determinanten-Gleichungen. (Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theorems.) Borchardt J. LXXV. 1-12.

Siehe Abschnitt II. Cap. 3. p. 57.

J. Siacci. Intorno ad una trasformazione simultanea di due forme quadratiche ed alla conica rispetto a cui due coniche date sono polari reciproche. Atti di Torino VII. 758-771.

H. Faure. Théorie des indices par rapport à une courbe et une surface du second ordre. Nouv. Ann. (2) XI. 261-268, 385-404.

Der Index eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt die Zahl $\frac{ma \cdot mb}{d^2}$, wenn a und b die Schnittpunkte des Kegel-ınitts mit einer durch m gehenden Transversalen, und d die ınge des dieser Transversalen parallelen Halbmessers ist. Für n Index einer Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt, eines ınktes, einer Geraden, und einer Ebene in Bezug auf eine äche zweiter Ordnung werden ähnliche metrische Definitionen ıfgestellt, welche es dem Verfasser ermöglichen, eine grosse ızahl metrischer Relationen aufzustellen. Scht.

M. WEYR. Ueber rationale Curven. Prag. Ber. 1872. 1-37.

Die Scheitelgleichung eines Kegelschnitts ist $y^2 = 2px + qx^2$. ; u die Tangente des Winkels, welchen ein Radius Vector ch einem Punkte des Kegelschnitts mit der x-Axe bildet, so ıst sich u als eindeutiger Parameter der Punkte des Kegel-hnitts auffassen. Sind u_1 und u_2 die Parameter für zwei Punkte s Kegelschnitts, so ist die durch sie bestimmte Gerade durch

$$y(u_1 + u_2) - x(u_1 u_2 + q) = 2p$$

ısgedrückt, und andererseits bestimmen alle Geraden durch nen festen Punkt (xy) eine Involution auf dem Kegelschnitt, ren Punktenpaare $(u_1 u_2)$ durch jene Gleichung verknüpft sind. ie Parameter $u_1 u_2$ werden als Liniencoordinaten der Geraden $\overline{u_1 u_2}$ aufgefasst; sind diese durch obige Gleichung verknüpft, so ellt jene Gleichung alle Linien durch den Punkt (xy) dar, sie t also die Gleichung des Punktes (xy). Mit Hülfe dieser sym-ıetrischen Liniencoordinaten wird eine Reihe elementarer Auf-aben behandelt.

Jedem Parameter entspricht ein Punkt des Kegelschnitts und esem die Tangente, welche in ihm den Kegelschnitt berührt, ı dass durch jeden Parameterwerth eine Tangente eindeutig stimmt ist. Die zwei Parametern $u_1 u_2$ entsprechenden zwei ıngenten bestimmen einen Punkt (xy); als Coordinaten dieses ınktes lassen sich die Parameter $u_1 u_2$ ansehen. Diese Be-ıchtungsweise findet wieder auf eine Reihe Kegelschnittsaufgaben ıwendung. Schn.

Em. Weyr. Zwei Sätze über Kegelschnittlinien.

Casopis I. 101-104. (Böhmisch.)

Auf Grund der Rationalität der Kegelschnitte werden mittelst Einführung eines rationalen Parameters die beiden bekannten Sätze abgeleitet; 1) die Hypotenuse eines eingeschriebenen um den Scheitel des rechten Winkels sich drehenden Dreiecks geht durch einen festen Punkt der Normale des Scheitels hindurch; 2) Die Verbindungslinie der zwei Schnittpunkte des Kegelschnitts mit zwei durch einen seiner Punkte gehenden zur Normale dieses Punktes gleichgeneigten Geraden geht durch einen festen Punkt der Tangente jenes Punktes. W.

v. Drach. Ueber das vollständige Fünfeck und gewisse durch dasselbe bestimmte Kegelschnitte. Clebsch Ann. V. 404-418.

Sind 1 2 3 4 5 6 die Ecken eines Pascal'schen Sechsecks und durchläuft eine derselben z. B. 6 den durch die übrigen bestimmten Kegelschnitt c, so drehen sich die 60 Pascal'schen Linien um 15 feste Punkte, nämlich um die Schnittpunkte der Geraden, welche durch die als fest angenommenen Punkte 1 2 3 4 5 bestimmt sind. Die Schnittpunkte der Pascal'schen Linien beschreiben daher Kegelschnitte. Jeder der Kegelschnitte, welche den 20 Steiner'schen Punkten entsprechen, geht ausser durch die 3 Drehpunkte der in ihm sich schneidenden Pascal'schen Linien noch durch je zwei der Ecken 1 2 3 4 5, was zu einer zweckmässigen symbolischen Bezeichnung der Pascal'schen Linien und der zugehörigen Sechsecke benutzt wird. Die zu je zwei Steiner'schen Gegenpunkten gehörigen Kegelschnitte S und S_1 gehen durch dieselben beiden Eckpunkte des gegebenen Fünfecks und bilden mit dem Kegelschnitt C ein geschlossenes cyklisches System, derart, dass für jeden der drei Kegelschnitte CSS_1 als Fundamentalkegelschnitt mit den auf ihm enthaltenen festen Punkten als Fünfeck die beiden anderen die Orte für ein Paar Steiner'scher Gegenpunkte sind.

Ein solches System von Kegelschnitten enthält ausser den

en gemeinsamen Punkten, beispielsweise 2 und 4, noch je
feste Punkte, welche drei Dreiecke bilden, die auf zweierlei
perspectivisch liegen, nämlich mit den Punkten 2 und 4 als
iectionscentren. Je zwei derselben liegen daher noch auf eine
:e Art perspectivisch; die neuen Projectionscentren $P_1 P_2 P_3$
en auf einer Geraden p, und die auf diese Art einander ent-
chenden Seiten der drei Dreiecke schneiden sich in denselben
Punkten einer Geraden g. Die weitere Untersuchung de-
iftigt sich nun mit dem Nachweise, dass wenn die Kegel-
iitte $C S S_1$ durch die gemäss dieser Perspectivität einander
prechenden Ecken der drei Dreiecke collinear auf einander
gen werden, die Verbindungslinien entsprechender Punkte,
bekannt, durch die Punkte $P_1 P_2 P_3$ gehen, und dass die beiden
kte, in welchen die von jedem Punkt λ eines der drei Kegel-
itte ausgehenden beiden Projectionsstrahlen die beiden andern
elschnitte zum zweiten Male treffen, ein Paar Steiner'scher
enpunkte für das durch λ und die festen Punkte des ersten
elschnittes bestimmte Sechseck sind. Die Verbindungslinien
er Gegenpunkte gehen nun ebenfalls durch drei feste Punkte
$_2 \pi_3$, welche mit den Punkten P auf derselben Geraden p
en und mit ihnen eine Involution bilden. Sie sind zugleich
Pole der drei Dreiecke in Bezug auf die Gerade g und die
der Geraden g in Bezug auf die Kegelschnitte, während
Punkte P die Pole der Geraden (24) in Bezug auf die Kegel-
iitte sind. Schz.

Faure. Théorèmes de géométrie. Nouv. Ann. (2) XI. 44-450.

Es werden ohne Beweis drei Sätze angegeben, die metrische
iehungen enthalten zwischen den Axen eines Kegelschnittes
dem Orthogonalkreis dreier Kreise, welche durch eine vorher
egebene längere Construction mit zwei in Bezug auf den
elschnitt reciprok polaren Dreiecken und einem vierten
kt mit seiner Polare in Verbindung stehen. Dadurch dass
er vierte Punkt mit dem Mittelpunkt des Kegelschnittes und
beiden Dreiecke mit einander zusammenfallen, so dass ein

dem Kegelschnitt conjugirtes Dreieck entsteht, werden speciellere Formen dieser Sätze erhalten, von denen es genügen muss einen anzuführen: Die Summe der Quadrate der Halbaxen eines Kegelschnittes ist gleich der Potenz seines Centrums für den einem conjugirten Dreieck umschriebenen Kreis. Desgleichen werden die entsprechenden Sätze für eine Fläche zweiter Ordnung und die in ähnlicher Weise mit zwei reciprok polaren Tetraedern und einem fünften Punkt und Polarebene in Verbindung stehenden Kugeln und ihrer Orthogonalkugel angegeben. Schz.

E. d'Ovidio. Sulle linee e superficie di 2° ordine. Battaglini G. X. 313-320.

Behandlung der Aufgabe, denjenigen Kegelschnitt (diejenige Fläche zweiten Grades) zu finden, in Bezug auf welchen (welche) zwei gegebene Kegelschnitte (Flächen zweiten Grades) reciproke Polaren sind. Mz.

A. G. J. Eurenius. Behandling af några partier i läran om treliniet koordinater. Upsala.

Die Abschnittte sind: 1) Berechnung von Durchmessern und Axen in Kegelschnitten; 2) Coordinaten-Transformation; Uebergang von einem Fundamentaldreieck zu einem anderen; 3) Brennpunkte und Direktricen der Kegelschnitte. Bg.

J. A. Grunert. Neue vollständige Lösung der Aufgabe: Mit einem gegebenen Brennpunkte einen durch drei gegebene Punkte gehenden Kegelschnitt zu beschreiben. Grunert Arch. LIV. 99-163.

Der Verfasser gelangt nach interessanten Untersuchungen zu folgendem Resultat:

Im Allgemeinen lassen sich mit einem gegebenen Brennpunkte durch drei gegebene Punkte immer vier Kegelschnitte beschreiben, von denen jederzeit wenigstens drei Hyperbeln sind, die aber auch alle vier Hyperbeln sein können. Die Hyperbeln lassen

nämlich jederzeit so beschreiben, dass in deren einem Zweige der drei gegebenen Punkte liegt, in dem anderen Zweige beiden andern gegebenen Punkte liegen; ausserdem lässt immer noch ein vierter Kegelschnitt durch die drei gegen Punkte beschreiben, welcher eine Parabel, eine Ellipse eine Hyperbel sein kann, so dass in dem letzten Falle alle gegebenen Punkte in einem und demselben Zweige dieser rbel liegen.

Sodann stellt der Verfasser die Bedingungen auf, welchen Punkte genügen müssen, wenn dieselben in einem aus einem benen Brennpunkt beschriebenen Kegelschnitt liegen sollen.

Pr.

BATTAGLINI. Nota intorno alla conica rispetto alla iale due coniche date sono polari reciproche fra di ro. Atti d. R. Acc. d. Linc. XXV.

BATTAGLINI. Nota intorno alla quadrica rispetto la quale due quadriche date sono polari reciproche a di loro. Att. d. R. Acc. d. Linc. XXV.

Der Titel dieser beiden Noten erklärt zur Genüge den Inhalt. Lösung des Problems wird vom Verfasser auf analytischem e erhalten. In der ersten Note findet sich eine Anwendung Theorie der Invarianten. Jg. (O.)

. GRUNERT. Ueber einige merkwürdige Sätze von n Kegelschnitten. Grunert Arch. LIV. 183-205, 361-374, 374-381.

1. Ausführliche Behandlung des in der „Theoria motuum etarum et Cometarum. Auct. Leonh. Eulero, pag. 150“ auflten Satzes: Si a tribus quibuscunque sectionis conicae tis F, G, H ad ejus alterum focum S ducantur rectae FS, GS S, atque duo eorum G et H cum tertio F jungantur rectis et HF, ac denique ex G ducatur recta GJK parallela ipsi ecans rectas HF, HS si opus est productas in J et K; erit d $SK+KG-SG$ uti SF ad semissem lateris recti.

2. Wenn um eine Ellipse oder eine Hyperbel ein Viereck beschrieben ist, so geht die durch die Mittelpunkte der beiden Diagonalen dieses Vierecks gehende Gerade jederzeit durch den Mittelpunkt der Ellipse oder der Hyperbel.

3. Wenn durch die beiden Endpunkte A_0 und A_1 eines Durchmessers einer Ellipse oder Hyperbel zwei einander parallele Berührende der Curve gezogen sind, und durch zwei andere beliebige Punkte A_2 und A_3 derselben gleichfalls zwei Berührende gezogen sind, und die Durchschnittspunkte der durch A_2 an die Curve gelegten Berührenden mit den durch A_0 und A_1 gezogenen einander parallelen Berührenden beziehungsweise durch A_{02} und A_{12}, die Durchschnittspunkte der durch A_3 an die Curve gelegten Berührenden mit der durch A_0 und A_1 gezogenen einander parallelen Berührenden beziehungsweise durch A_{03} und A_{13} bezeichnet werden, so schneiden die beiden Geraden A_{02} A_{13} und A_{03} A_{12} jederzeit den Durchmesser A_0 A_1 in einem und demselben Punkte. Pr.

F. D. Thomson. Solution of question 3252. Educ. Times XVI. 45.

Die Sehne eines Kegelschnittes erscheint von einem festen Punkte aus unter rechtem Winkel. Beweise: die Einhüllende derselben ist ein Kegelschnitt, welcher den festen Punkt als Brennpunkt hat, der Pol der Sehne beschreibt einen dritten Kegelschnitt; der gegebene Punkt hat dieselben Polaren in Bezug auf alle drei Kegelschnitte. Falls der erste Kegelschnitt ein Kreis ist, so ist der dritte es ebenfalls. Hi.

J. J. Walker. Solution of question 3384. Educ. Times XVI. 47.

Zeige, dass das Product der drei Normalen, welche man von einem Punkte auf einen Kegelschnitt ziehen kann, dem Product $2PG \cdot PM \cdot PM^1$ gleicht, wo PM, PM^1 die Abstände von den Directricen und PG die Länge der Normale vom Punkte P bis an die grosse Axe bedeuten. Hi.

'. WATSON. Solution of question 3548. Educ. Times XVII. 32.

Werden die Coordinaten eines Punktes (nicht auf einer Curve) den Ausdruck substituirt, welcher gleich Null gesetzt die rtesische Gleichung eines Kegelschnitts mit Mittelpunkt giebt, ist das Resultat proportional der Fläche des Vierecks, welches rch die Tangenten von dem Punkte und die Halbmesser nach n Berührungspunkten gebildet wird. Hi.

it Aufgaben über Kegelschnitte haben sich ausserdem beschäftigt die Herren: BOOTH, J. J. WALKER, R. TUCKER, S. WATSON, R. GENESE, H. LAVERTY, C. TAYLOR, J. J. WOLSTENHOLME, u. a. m. Educ. Times XVI., XVII.

Hi.

DE HUNYADY. Remarque sur un théorème de M. A. Pellissier. Nouv. Ann. (2) XI. 216-217.

Folgerungen des Satzes: „Zieht man durch den Brennpunkt nes Kegelschnitts Gerade, welche mit den Tangenten einen nstanten Winkel bilden, so ist der geometrische Ort der Geraden d der Tangenten ein Kreis.“ M.

. STEEN. Om Betingelsen for at tre Cirkler eller fire Kugler gaa gjennem samme Punkt. Zeuthen Tidsskr. (3) II. 56.

Angeregt durch einen Aufsatz von Enneper [Schlömilch Z. VI. 257; siehe F. d. M. III. p. 327] giebt der Verfasser eine hr einfache Ableitung der Bedingung dafür, dass drei Kreise ler vier Kugeln durch denselben Punkt gehen.

Hn. (Wn.)

. HILAIRE. Note sur le lieu du point de contact de deux cercles mobiles qui doivent être tangents chacun à deux cercles fixes. Nouv. Ann. (2) XI. 37-38.

Lösung der Aufgabe einen Kreis zu construiren, der drei gegebene Kreise berührt, mit Hülfe der Methode, die Salmon in den „Kegelschnitten" No. 119 gegeben hat. O.

R. Tucker. Solution of question 3393. Educ. Times XVI. 48.

Seien K, K' zwei Punkte auf einer Ellipse, die Tangenten in diesen Punkten schneiden sich in P, und die Normalen schneiden die grossen Axen in N, N': beweise 1) dass $\angle KPN = \angle K'PN'$, und 2) wenn O, O' die Mittelpunkte, ϱ, ϱ' die Radien der Krümmung in denselben Punkten bedeuten, dass

$$\operatorname{tg}^3 KPO : \operatorname{tg}^3 K'PO' = \varrho^2 : \varrho'^2.$$

Hi.

R. Tucker. Solution of question 3214. Educ. Times XVI. 32.

Durch die Brennpunkte einer Ellipse sind zwei parallele Sehnen gezogen und auf der einen ist ein Punkt so gewählt, dass die durch den Brennpunkt auf der andern bestimmten Abschnitte unter gleichen Winkeln erscheinen. Beweise, dass dieser Punkt auf einer Curve dritter Ordnung liegt, welche durch die Brennpunkte und den Fuss der entfernteren Directrix geht, und dass das Rechteck der Vectoren von dem einen Brennpunkt an die Curve constant ist. Hi.

J. J. A. Mathieu. Note sur l'ellipse. Nouv. Ann. (2) XI. 428.

Pr.

R. de Paullis. Soluzione di una quistione. Battaglini G. X. 320.

Alle einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ und ihrem Osculationskreise in jedem Punkte gemeinsamen Sehnen umhüllen die Curve:

$$\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 = \left(\frac{4}{3} - \frac{x^2}{3a^2} - \frac{y^2}{3b^2}\right)^3.$$

Mz.

O. Taylor. The hyperbola referred to its asymptotes. Messenger (2) II. 30-31.

Geometrischer Beweis gewisser Eigenschaften der Hyperbel, rgeleitet aus der Eigenschaft, die enthalten ist in der Gleichung $' = a^2$. Glr. (O.)

Townsend. Solution of question 3410. Educ. Times XVI. 34.

Ist ein Parallelogramm einer gleichseitigen Hyperbel eingehrieben und erscheint eine Sehne von den Endpunkten einer ite unter gleichen Winkeln, so erscheint sie auch von den Endınkten der anderen Seite unter gleichen Winkeln. Hi.

D. Andere specielle Curven.

Gundelfinger. Intorno ad alcune formole della teoria delle curve di secondo e di terzo ordine. Brioschi Ann. (2) V. 223-236.

Siehe Abschnitt II Cap. 3 p. 66.

Gundelfinger. Ueber die Wendepunktsdreiseite einer Curve dritter Ordnung. Clebsch Ann. V. 442-448.

Eine algebraische Methode zur Bestimmung der Wendepunktsreiseite einer Curve dritter Ordnung. Sie gestattet es, rein alytisch die Anzahl der reellen und imaginären Wendepunktseiseite abzuleiten. Schn.

d'Ovidio. Sulle curve del terz' ordine circoscritte ad un quadrilatero completo. Battaglini G. X. 16-32.

Die Gleichung einer Curve 3ten Grades, die durch die 6 Schnittınkte der 4 Geraden $X_0 = 0$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ geht, llt sich in der Form dar

$$\lambda_0 X_1 X_2 X_3 + \lambda_1 X_2 X_3 X_0 + \lambda_2 X_3 X_0 X_1 + \lambda_3 X_0 X_1 X_2 = 0.$$

urch verschiedene Zusammenfassung der Elemente dieser Gleiung stellt der Verfasser eine Reihe von Beobachtungen an in

Betreff der Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Kegel-schnitten, lässt dann die Curve durch einen 7[ten] Punkt gehen, nimmt ferner diesen Punkt zum Pol einer Geraden in Bezug auf das Dreieck der 3 übrigen, macht die Bedingung

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

und leitet schliesslich die gleichen Resultate auf rein geometri-schem Wege her. H.

A. Clebsch. Ueber zwei Erzeugungsarten der eben[en] Curven dritter Ordnung. Clebsch Ann. V. 422-427.

Die Punkte einer Curve dritter Ordnung können, wie Hes[se] gezeigt hat, auf drei verschiedene Arten in Punktenpaare (Pole[n]-paare) so geordnet werden, dass zwei Punktenpaare dessel[ben] Systems Ecken eines vollständigen Vierseits sind, dessen drit[tes] Eckenpaar auf der Curve liegt und abermals ein Paar dessel[ben] Systems ist. Auf diese Eigenschaft der Curven dritter Ordn[ung] hat Herr Schröter eine höchst einfache Construction dersel[ben] gegründet: Sind 1, 2, 3 die drei gegebenen Paare, so erhält [illegible] aus 1, 2 nach dem Satz von Hesse ein neues Paar 4, aus 1, [illegible] ein neues Paar 5, dann aus 4, 3 ein Paar 6, aus 5, 2 ein ne[ues] Paar 7 u. s. w., so dass jeder neue Punkt durch das Ziehen [illegible] zwei Linien ohne weitere Hülfslinien entsteht. Clebsch [illegible] nunmehr, wie man auf Hesse's Ausgangspunkt gestützt durch [illegible] einfachsten analytischen Betrachtungen aus drei beliebig gegeb[enen] Punktenpaaren, welche Polenpaare werden sollen, auf die C[urve] dritter Ordnung in bestimmter und eindeutiger Weise [illegible] führt wird.

Im zweiten Theile der Arbeit beschäftigt sich der Verf[asser] mit der Grassmann'schen Erzeugungsart (Crelle J. XXXVI): [illegible] Punkt x bewegt sich so, dass seine Verbindungslinien mit fest[en] Punkten a, b, c einzeln drei feste Gerade α, β, γ in drei Punkt[en] schneiden, welche in einer Geraden liegen. Er discutirt die Frag[e], wie man auf einer gegebenen Curve dritter Ordnung diejenigen Elemente finden kann, aus welchen sie vermöge der Grassmann'-schen Construction entsteht, und zeigt damit, dass jede Curv[e]

tter Ordnung in der angegebenen Weise erzeugt werden
ın. Schn.

Hippauf. Lösung des Problems der Trisection mittelst der Conchoide auf circularer Basis. Hoffmann Z. III. 215-240.

Albrich. Bemerkung über Hippauf's Aufsatz. Hoffmann Z. III. 537-539.

Die Conchoide auf demjenigen Kreise als Basis, von welchem Bogen in gleiche Theile getheilt werden soll, theilt die Sehne es halb so grossen Kreises vom gemeinschaftlichen Peripherieıkel nach dem Verhältniss der äussern und des Mittelstücks, welche die Sehne des gegebenen Bogens durch die trisectirenden dien getheilt wird. Ihrer Anwendung zur Trisection der Kreisgen kommt demnach der Vorzug einer grossen Einfachheit zu. richtig ist aber die in der Einleitung enthaltene Aussage, dass ı Anwendung der Hyperbel oder Parabel die Construction der rve für jeden Winkel eine neue sein müsste. Gleichviel ob asles, wie hier citirt, solche Lösungen in Betracht gezogen hat, liegt auf der Hand, dass jede feste Parabel l oder sonstige nie 2ten Grades) zur Construction der Wurzeln aller Gleichungen und 4ten Grades genügt. Das Motiv zur Wahl einer Curve Grades, als ob der 2te nicht hinreichte, beruht also auf einem thum. Die Behandlungsweise ist eine für Schüler instructive, sprechende und leicht verständliche; in der Auffassung des oblems ist jedoch die Klarheit der Fragestellung sehr zu verissen, sofern die praktische Aufgabe mit der ideell geometrischen, elche erst zu definiren gewesen wäre, beständig in einander sst. Auf die geometrische Darlegung folgt die darauf gegründete Beschreibung eines Instruments zur Dreitheilung der Winkel.

Albrich erinnert, dass er die Lösung im Programm des mnasiums zu Hermannstadt 1863/4 bekannt gemacht hat. he auch p. 28. H.

Cayley. On the mechanical description of a cubic curve. Proc. of L. M. S. IV. 175-178.

Schreibt man

$$a\sin\theta = u\sin\varphi \text{ und } x = a\sin\varphi,\ y = \frac{c - h\cos(\theta+\varphi)}{\sin\varphi},$$

so ist der Ort eine Curve vierten Grades mit zwei Wendepunkten; in dem speciellen Fall $h = c$, fällt der Factor $x \sin\varphi$ fort und die Curve wird vom dritten Grade. Cly. (O.)

A. Cayley. Note on the Cartesian. Quart. J. XII. 16-19.
Cly.

A. Cayley. On the mechanical description of certain quartic curves. By means of a modified oval chuck. Pr. of L. M. S. IV. 186-190.
Cly.

A. Cayley. On a penultimate quartic curve. Messenger (2) I. 178-180.

Der Verfasser betrachtet im Detail die Form einer Curve vierten Grades mit drei Knoten bei der Degeneration in die Form $x^2y^2 = 0$ d. h. eine Penultimate von $x^2y^2 = 0$.
Glr. (O.)

Em. Weyr. Sopra una proprieta metrica della cardioide. Rend. d. Ist. Lomb. (2) V. 204-206.

Der Verfasser betrachtet die Cardioide — eine Curve 4ter Ordnung und 3ter Classe mit 3 Rückkehrpunkten, von denen 2 Kreispunkte im Unendlichen sind — als die Fusspunktcurve des Kreises, die man dadurch erhält, dass man die Lothe auf die Tangenten des Kreises von einem Punkte F der Peripherie fällt. Der Punkt F ist der dritte Rückkehrpunkt der Cardioide. „Trifft nun die Tangente an die Cardioide in F die Curve noch einmal im Punkte A, ist B so auf derselben gewählt, dass $BF = \frac{1}{4}AF$, bezeichnet man endlich mit Δ die reelle Doppeltangente der Cardioide, so schneiden, wie der Verfasser beweist, je 3 parallele Tangenten der Cardioide die Doppeltangente Δ in Gruppen von 3

nkten, die vom Punkte *B* aus unter Winkeln von 60° gesehen
rden". Jg. (O.)

H. Aronhold. Sur les vingt-huit tangentes doubles d'une courbe du quatrième degré. Nouv. Ann. (2) XI. 438-443.

Der Verfasser geht von 7 beliebigen Geraden aus, durch ren Berührung ein Netz von Curven 3ter Classe definirt ist, d nennt den Theil des Netzes, welcher eine achte Gerade beart, ein Bündel. Alle dazu gehörigen Curven haben eine geinsame neunte Tangente; daher haben je 2 Curven des Netzes sser den 7 Urtangenten 2 gemeinsame Tangenten, die immer bestimmtes Bündel berühren. Diese heissen dessen Paar, Durchschnittspunkt dessen Scheitel. Es wird zuerst bewiesen, ss die Scheitel aller Bündel, zu denen eine bestimmte Curve s Netzes gehört, auf einer bestimmten Tangente, der Hauptgente dieser Curve, liegen. Um diese zu construiren, braucht an nur vom Scheitel eines einer andern Curve zugehörigen ındels die dritte Tangente zu ziehen; denn die Haupttangenten ler Curven eines Bündels gehen durch dessen Scheitel. Umkehrt ist auch eine beliebige Gerade Haupttangente einer eingen Curve des Netzes. Die nächste Aufgabe ist, die allgemeinste ırve 4ten Grades zu construiren, welche die 7 Geraden doppelt rührt. Man theile das Netz der Curven 3ter Classe so in Bündel, ss das Tangentenpaar eines jeden aus 2 zusammenfallenden raden besteht; dann ist die gesuchte Curve der Ort des heitels eines solchen Bündels, in welchem sich alle Curven des ztern berühren. Die 28 Doppeltangenten der Curve 4ten Gras sind Haupttangenten eben so vieler besonderen Curven des tzes: 7 solche Curven sind diejenigen, welche je eine der 7 raden zur Doppeltangente haben; die übrigen 21 bestehen jede s dem Schnittpunkt zweier der 7 Geraden und dem Kegelschnitt, lcher die 5 übrigen Geraden berührt. (Die Arbeit ist eine bersetzung aus den Berliner Monatsberichten 1864.) H.

Teichert. Ueber einige algebraische Curven vierten Grades. Pr. Freienwalde a. O.

In der Definition der zu untersuchenden Curve ist manche Unbestimmtheit. Schiefer Abstand eines Punkts von einem Kreise wird genannt der auf der Verbindungslinie des Punkts mit einem festen Punkte der Peripherie gemessene Abstand; es wird aber gemeint der Abstand desselben vom zweiten Durchschnitt mit dem Kreise. Die Aufgabe wird gestellt, den Ort der Punkte zu bestimmen, deren schiefer Abstand von einem festen Kreise mit ihrem Abstand von einer festen Geraden in constantem Verhältniss steht; in der Lösung wird jedoch stillschweigend vorausgesetzt, dass der zur Messung des schiefen Abstands gesetzte Peripherie-Punkt F mit dem Mittelpunkt auf einer Normale der Geraden liegt. In rechtwinkligen Coordinaten hat der Ort eine Gleichung 4ten Grades, welche nach Einführung der Polarcoordinaten r, φ übergeht in

$$r+\gamma = \frac{\alpha\beta+\gamma}{1-\beta\cos\varphi},$$

wo γ der Radius, β der Verhältnissexponent, α der Normalabstand des Punkts F von der Geraden ist. Hiernach zerlegt sich der Radiusvector in den eines Kegelschnitts und in eine Constante γ, durch deren einfache Abtragung sich die gesuchte Curve aus ersterm leicht construiren lässt. Es wird dann die Form der Curve discutirt, die Tangente, Normale und der Krümmungsradius berechnet und construirt. H.

F. W. NEWMAN. On quartan curves with three or four diameters. Rep. of Brit. Ass. 1872.

Lösung des Problems, in welchen Fällen Curven vierten Grades 3 oder 4 Durchmesser haben. Cly. (M.)

F. W. NEWMAN. On monodiametral curves. Rep. of Brit. Ass. 1872.

Fortsetzung der vor der Britischen Gesellschaft im Jahre 1871 gelesenen Arbeit (s. F. d. M. III, 339). Alle Curven vierten Grades mit Einem Durchmesser werden in 5 Gruppen mit 21 Klassen eingetheilt. Cly. (M.)

W. Newman. On tridiametral quartan curves. Rep. of Brit. Ass. 1872.

Lösung des Problems, die allgemeine Form der Gleichung ner Curve vierten Grades mit drei Durchmessern zu finden. re Polargleichung hat die Form

$$ar^4 + cr^2 = \tfrac{1}{2}br^3\cos 3\vartheta + p,$$

ıd wird für $a = 1$ in rechtwinkligen Coordinaten:

$$y^2 + x^2 + b'x + c' = \sqrt{\tfrac{8}{3}b'x^3 + (b'x + c')^2 + e}.$$

Cly. (M.)

Tucker. Solution of question 2830. Educ. Times XVI. 38-39.

Die Scheitel eines Dreiecks werden durch Gerade mit einem ınkt O, und die Schnittpunkte derselben mit den gegenüber-genden Seiten unter einander verbunden. Die hierdurch von m gegebenen Dreiecke abgeschnittenen Dreiecke werden durch β, γ bezeichnet. Finde den Ort von O, wenn eine der folgenden dingungen erfüllt ist.

$l\alpha + m\beta + n\gamma = \text{const.}$. (Curve dritter Ordnung)

$\alpha j = k\beta^2$ . . . . . „ vierter „

$\frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = \text{const.}$ „ dritter „

$l\frac{\alpha}{\beta} + m\frac{\beta}{\gamma} + n\frac{\gamma}{\alpha} = \text{const.}$ „ sechster „

$l\alpha\beta + m\beta\gamma + n\gamma\alpha = \text{const.}$ „ „ „

Hi.

Townsend. Solution of question 3542. Educ. Times XVI. 106

Die erste positive Fusspunktcurve (Bernoulli's Lemniscate) d die erste negative Fusspunktcurve einer gleichseitigen perbel sind reciproke Polaren in Bezug auf die Hyperbel.

Hi.

J. C. Miller and St. Watson. Solution of question 3383. Educ. Times XVII. 17-22.

Der Scheitel eines rechten Winkels bewegt sich auf einer Ellipse, während der eine Schenkel immer durch einen Brennpunkt geht; finde den Ort, den der Mittelpunkt der Strecke beschreibt, welche die Ellipse auf dem zweiten Schenkel abschneidet; zeichne die Curve und zeige, dass ihre Fläche sich zur Fläche der Ellipse verhält wie

$$a^6 - a^4 b^2 + 15 a^2 b^4 + b^6 : 2(a^2 + b^2)^3,$$

wo a und b die Halbaxen der Ellipse bezeichnen.

Die Gleichung der Curve, auf die Hauptaxen der Ellipse bezogen, ist

$$\frac{a^2 b^2 c^2 y^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2)}{a^2 b^2 - (a^2 y^2 + b^2 x^2)} = \left(\frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^2 + cx}\right)^2, \text{ wo } c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Oder

$$\frac{x}{a^2 \cos\varphi} = \frac{y}{b^2 \sin\varphi} = \frac{\lambda}{\varrho^2},$$

wenn λ die Länge der Senkrechten vom Mittelpunkt der Ellipse auf den zweiten Schenkel des rechten Winkels und φ den Winkel zwischen dieser Senkrechten und der Axe der x bezeichnet, während ϱ die Länge der Halbaxe ist, deren excentrischer Winkel $= \varphi$. Hi.

W. J. C. Miller and Booth. Solution of question 3430. Educ. Times XVI. 77-83.

Finde die Gleichung, Form, Länge und Fläche der ersten negativen Fusspunktcurven der Ellipse und Parabel, in Bezug auf den Brennpunkt, d. h. die Einhüllende der Senkrechten, welche durch die Endpunkte der von einem Brennpunkt ausgehenden Vectoren gezogen sind. Hi.

St. Watson and Booth. Solution of question 3431. Educ. Times XVI. 83-85.

Dieselbe Aufgabe in Bezug auf den Mittelpunkt der Ellipse. Hi.

S. Roberts. Solution of question 3360. Educ. Times XVI. 89.

Auf der Scheibe eines Schiffscompasses sei eine beliebige ırve gezeichnet, finde die Einhüllende dieser Curve, wenn der ttelpunkt der Scheibe sich auf einem Kreise bewegt?

Die Einhüllende ist eine Parallele der gegebenen Curve.

Hi.

Cotterill. Solution of question 3434. Educ. Times XVI. 95.

Zeige, dass

$$ax^3(y^2-z^2)+by^3(z^2-x^2)+cz^3(x^2-y^2)=0$$

ı System von Curven 5ter Ordnung repräsentirt (a, b, c als verderliche Parameter), die 22 Punkte gemeinschaftlich haben, ährend irgend zwei Curven sich in drei anderen Punkten schnei-n, die auf einem Kegelschnitt liegen, welcher dem Coordinateneieck umschrieben ist. Wenn eine der Curven gegeben ist, so hen alle entsprechenden Kegelschnitte durch einen festen ınkt auf der gegebenen Curve. Hi.

[. Willière. Solution de la question 959. Nouv. Ann. (2) XI. 132-139.

Eine Ellipse von constanter Grösse verändert ihre Lage so, ass sie immer eine feste Gerade in einem bestimmten Punkte erührt. In jeder Lage beschreibt man um dieselbe ein Rechteck, ssen Basis auf der Geraden liegt. Man soll finden den geoetrischen Ort 1) der Brennpunkte, 2) des Mittelpunktes, 3) der cht auf der Geraden liegenden Ecken des Rechtecks, 4) der rührungspunkte der Seiten mit der Ellipse, 5) die Enveloppe der ossen Axe. O.

Roberts. Note on the parallel curves of conics. Quart. J. XII. 59-65.

Der Verfasser betrachtet die Parallelen zu einem centralen egelschnitte und zu einer Parabel. Am Schluss der Arbeit verıüpft er seine Resultate mit einigen Sätzen der körperlichen eometrie. Er bemerkt nämlich, dass (r ist die normale Entrnung der parallelen Curven) wenn man $-z^2$ für r^2 in der

Gleichung der Parallelen eines centralen Kegelschnittes schreibt, man die Gleichung einer Developpabeln erhält, die einem System von confocalen Flächen zweiten Grades umschrieben ist.

Cly. (O.)

A. Cayley. On the mechanical description of certain sextic curves. Pr. of L. M. S. IV. 105-111.

Man kann die Curven beschrieben denken durch einen Punkt C, der fest verbunden ist mit zwei Punkten A und B, deren jeder einen Kreis beschreibt. Die Construction wird hier unter einem etwas allgemeineren Gesichtspunkte betrachtet. Man stelle sich ein Viereck vor mit den Seiten $abcd$, deren Neigungen gegen eine feste Linie $\alpha\beta\gamma\delta$ sein mögen. Dann ist

$$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma+d\cos\delta=o,$$
$$a\sin\alpha+b\sin\beta+c\cos\gamma+d\cos\delta=o.$$

Diese Gleichungen geben, wenn einer der Winkel, etwa α constant ist, Anlass zu einer Relation zwischen irgend zwei der variabeln Winkel; die betrachtete Curve ist nun der Art, dass die Coordinaten xy irgend eines Punktes darauf als lineare Functionen der sinus und cosinus der drei variabeln Winkel gegeben werden, oder was dasselbe ist, der sinus oder cosinus irgend zweier von ihnen. Dies führt zu einem Ausdruck der Coordinaten proportional zu den rationalen, ganzen quadriquadratischen Functionen $(u,1)^2(v,1)^2$ von zwei Parametern u,v, welche unter einander durch eine Gleichung von derselben Form

$$(u,1)^2(v,1)^2=0$$

verbunden sind. Die Curve wird also eine des achten Grades vom Flächengeschlecht 1 sein. Es giebt aber eine Reduction $=2$, die von den Kreispunkten im Unendlichen herkommt: die Curve wird dann also eine des sechsten Grades vom Flächengeschlecht 1, das ist mit neun Wendepunkten. In speciellen Fällen, wenn ein neuer Doppelpunkt hinzukommt, wird sie unicursal, und ferner kann ein Kegelschnitt vorkommen, der eine unicursale Curve vierten Grades (mit drei Knoten) wird.

Cly. (O.)

ↄ. WEYR. Ueber die Einhüllende aller Kegelschnittsehnen von constanter Länge. Schlömilch Z. XVII. 164-167.

Unabhängig von ähnlichen Untersuchungen im 47. Bande Grunert's Archiv und im 14. Jahrgang S. 158 in Schlömilch's entwickelt der Verfasser die Gleichung:

$$(u^2+v^2)(a^2u^2+b^2v^2-1)=c(a^2u^2+b^2v^2)^2$$

ɜ Gleichung der Einhüllenden aller Ellipsensehnen von constanter Länge und giebt sodann einige Eigenschaften dieser Curve ı. Pr.

. LECLERT. On certain theorems respecting the geometry of ships. Messenger (2) I. 167-175.

Die Arbeit ist aus dem 11ten Bande der Transactions of the ıstitute of Naval Architects abgedruckt und enthält eine kurze inleitung von Herrn C. W. Merrifield. Herrn Leclert's Satz macht ɜ in der That möglich, die wesentlichen Elemente der Curve zu rhalten, die umhüllt wird von einer Sehne, welche ein Segment ɔn constantem Flächeninhalt von einer gegebenen Curve abschneidet. Dies ergiebt einen Ausdruck für den Krümmungsradius, er für eine gegebene Richtung der Normale zu der Sehne mit lülfe von Quadraturen berechnet werden kann. Glr. (O.)

ɪLLÉGRET. Remarques sur une famille de courbes planes. Nouv. Ann. (2) XI. 162-167.

Der Krümmungskreis für einen jeden Punkt der Curve $' = a^m \cos m\vartheta$ schneidet auf dem nach dem Berührungspunkte ɜzogenen Leitstrahl ein Stück ab, welches sich zu dem Leitstrahl ie 2 zu $1+m$ verhält (cf. F. d. M. II. 517). Die vorliegenden ɜmerkungen beschäftigen sich nun damit, nachzuweisen, dass ıch die logarithmische Spirale zu diesen Curven gehöre, dass ıher auch auf diese Curve der genannte Satz Anwendung findet. aran schliessen sich dann historische Notizen, die Aufstellung ɜs obigen Satzes betreffend. Endlich wird der Zusammenhang ɪr Curve, für welche $m = \frac{1}{3}$ ist, mit der Elasticitätscurve ermittelt.

T.

L. Kiepert. Ueber Epicycloiden, Hypocycloiden und daraus abgeleitete Curven. Schlömilch Z. XVII. 129-147.

Die Steiner'sche Curve vierter Ordnung und dritter Klasse mit drei Spitzen, welche Steiner (Borchardt J. LIII, p. 23) als die Enveloppe der Geraden definirt, von denen jede die drei Fusspunkte der drei Lothe verbindet, die von jedem Punkte eines Kreises auf die Seiten eines einbeschriebenen Dreiecks gefällt sind, war ausser von Steiner selbst namentlich von Herrn Schröter (Ueber die Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde, Borchardt J. LIV. p. 31) und Herrn Eckhardt (Schlömilch Z. XV p. 129, siehe F. d. M. II. p. 520) studirt worden. Die vorliegende Arbeit, welche unabhängig von der letztgenannten entstanden ist, geht von einer andern, auch von Herrn Eckhardt benutzten Erzeugungsweise der Steiner'schen Curve aus, welche, durch eine naheliegende Verallgemeinerung, sich sogleich auf alle gemeinen Epicycloiden und Hypocycloiden überträgt, und deren Eigenschaften, bei Benutzung elementarer Sätze und bekannter Betrachtungsweisen, leicht erkennen lässt.

Herr Kiepert definirt nämlich die allgemeinere Steiner'sche Curve, von ihm Anfangscurve genannt, als die Enveloppe der Verbindungsgeraden zweier sich auf einem Kreise mit den Geschwindigkeiten φ und ψ bewegender Punkte μ und s, wobei φ und ψ durch eine gegebene Gleichung von einander abhängig sind. Ist $\psi = -2\varphi$, so ergiebt sich die Steiner'sche Curve. Herr Kiepert behandelt den Fall, dass $\psi = \pm n \cdot \varphi$. Aus der Anfangscurve entspringen zwei mit ihr in engem Zusammenhang stehende Curven, die Fusspunktscurve, der Ort des Fusspunktes des vom Kreismittelpunkt auf eine erzeugende Sehne gefällten Lothes, und die Polarcurve, der Ort des Poles einer Erzeugenden in Bezug auf den Kreis. Von den Resultaten sollen hier nur folgende hervorgehoben werden.

Die beiden Punkte, in denen jede Erzeugende μs im Verhältniss $1:n$ getheilt wird, sind der auf ihr liegende Berührungspunkt und der Schnittpunkt mit der zugehörigen Tangente der Polarcurve. Es giebt auf dem Fundamentalkreise $n \mp 1$ Punkte,

ein Punkt μ mit dem ihm zugehörigen s zusammenfällt. In diesen nkten berühren sich Kreis, Anfangscurve, Fusspunktscurve d Polarcurve. Sie theilen ferner jede der Curven in $n \mp 1$ iche Theile. Diejenigen Durchmesser des Kreises, welche von n $n \mp 1$ Halbirungspunkten der durch die eben genannten Punkte zeugten Bogen ausgehen, sind Rückkehrtangenten der Anfangsrve. Die ihnen zugehörigen Spitzen liegen auf einem mit dem ndamentalkreise concentrischen Kreise mit dem Radius $\frac{n \mp 1}{n \pm 1} r$, raus sich $n \mp 1$ unendlich ferne Punkte der Polarcurve ergeben, ren Asymptoten ein reguläres $(n \mp 1)$-Seit bilden, dessen eingeschriebener Kreis concentrisch mit dem Fundamentalkreise ist, d den Radius $\frac{n \pm 1}{n \mp 1} r$ hat. Rollt ein den ursprünglichen Kreis ständig berührender Kreis mit dem Radius $\frac{1}{n \pm 1} r$ auf jenem sterwähnten concentrischen Kreise mit dem Radius $\frac{n \mp 1}{n \pm 1} r$, so ird die Anfangscurve von demjenigen Punkte des rollenden eises durchlaufen, welcher bei dieser Bewegung mit den Punkten es Fundamentalkreises zusammen fällt, wo, wie vorher erwähnt, nkte μ und s vereinigt sind. Bei $\psi = + n \cdot \varphi$ geschieht die rührung der Kreise von aussen, bei $\psi = - n \cdot \varphi$ von innen. raus folgt, dass jede Anfangscurve eine gemeine Epicycloide er Hypocycloide ist. Es werden dann die Gleichungen der trachteten Curven abgeleitet, wobei sich ergiebt, dass die Fussnktscurve eine verlängerte Epicycloide oder Hypocycloide ist.
folgt dann die Ableitung von Eigenschaften der Curven, lche mit der Definition einer Gruppe von n Erzeugenden in sammenhang stehen, wobei unter Gruppe diejenigen n Erzeuiden verstanden werden, welche n den Kreis in gleiche Theile ilende Punkte μ mit dem ihnen gemeinsamen Punkt s verden. Weiterhin wird die Evolute und Evolvente der Anfangsve betrachtet. Dadurch wird die Berechnung der Länge der angscurve $= \frac{8n}{n \pm 1} r$ ermöglicht. Ihr Flächeninhalt ergiebt

sich $= \frac{n}{n+1} r^2 \pi$. Die Berechnung der Längen der anderen Curven führt auf elliptische Integrale zweiter Gattung. Ihre Flächeninhalte lassen sich dagegen einfacher ausdrücken. Am Schlusse giebt Herr Kiepert an, nach welchen Richtungen hin sich noch weitere Eigenschaften seiner Curven auffinden lassen. Wenn statt des erzeugenden Kreises eine Ellipse genommen wird, so haben die durch Projection nicht zerstörbaren Eigenschaften natürlich ihre Analoga. Scht.

F. J. Studnička. Notiz zur Theorie der Trochoiden. Casopis I. 252-253. (Böhmisch.)

In dieser kurzen Notiz werden als Ergänzung zur Theorie der Trochoiden, die in Studnička's Höh. Analysis, Bd. III. p. 85 enthalten ist, die Differentialgleichungen der Trochoiden für den Fall aufgestellt, dass die Basis eine Gerade ist, wobei gezeigt wird, dass man nur r und r' aus den Gleichungen

$$r = f(\varrho), \quad \eta' = \frac{r'}{r}, \quad \eta^2(1+\eta'^2) = r^2$$

zu eliminiren hat, um $\eta = \varphi(\xi)$ als Gleichung der gesuchten Trochoide zu erhalten.

Wird hingegen die Basis gesucht, auf welcher die Curve $r = f(\varrho)$ zu rollen hat, damit die Trochoide eine Gerade werde, so hat man ähnlich aus den Gleichungen

$$r = f(\varrho), \quad -y' = \frac{r'}{r}, \quad y = r$$

r und r' zu eliminiren, um $y = F(x)$ als Gleichung derselben zu erhalten. W.

A. Voss. Zur Theorie perspectivischer Punktsysteme. Schlömilch Z. XVII. 375-386.

Zwei auf einanderliegende ebene Systeme werden collinear so auf einander bezogen, dass jedem Punkt x ein unendlich naher x' entspricht, dann entspricht dem Punkt x' als einem Punkt des ersten Systems ein unendlich naher x'' u. s. f. Alle Punkte dieser Art bilden dann die aufeinander folgenden Punkte

n Curven, die Verbindungslinien u entsprechender Punkte sind
› Tangenten derselben, und je zwei entsprechende Gerade sind
feinander folgende Tangenten derselben Curve. Die Gleichungen
›ser Curven haben die Form:

$$x_0^\alpha \cdot x_1^\beta = x_2^{\alpha+\beta}.$$

Auch in allgemein collinearen und aufeinander liegenden
enen Systemen liegen die Punkte x, deren Projectionsstrahl u
ıe Curve

$$u_0^m u_1^n = u_2^{m+n}$$

rührt, auf einer Curve, deren Gleichung sich von dieser nur
rch die Constante unterscheidet.

Durch Anwendung der elementaren Beziehungen zwischen
n entsprechenden Gebilden in aufeinander liegenden allgemein
llinearen Systemen werden für die obigen Curven eine Reihe
meinsamer Eigenschaften erhalten, z. B.: Diese Curven besitzen
sser den drei sich selbst entsprechenden Punkten $F_1\,F_2\,F_3$,
rch welche sie gehen, weder vielfache, noch Inflexionspunkte,
ch Doppeltangenten. Durch jeden Punkt geht nur eine Curve
s Systems, wie auch jede Gerade nur von einer Curve berührt
ırd. Die Berührungspunkte der von einem Punkt A an die
mmtlichen Curven gezogenen Tangenten liegen auf einem Kegel-
hnitt, welcher die F-Punkte enthält und die durch A gehende
rve in A berührt, und umgekehrt, jede Gerade a schneidet die
rven in Punkten, deren Tangenten einen Kegelschnitt um-
llen, welcher die sich selbst entsprechenden Geraden $f_1\,f_2\,f_3$
erührt, und die Gerade a in demjenigen Punkte, in welchem
e von einer Curve berührt wird, etc. Diese allgemeineren Sätze
erden dann auf zwei specielle Fälle angewendet, nämlich:

1) auf den Fall $x_0\,x_1 = cx_2^2$; in welchem die Curven ein
üschel sich doppelt berührender Kegelschnitte mit den gemein-
men Tangenten $f_0\,f_1$ und der gemeinsamen Berührungssehne f_2
ilden.

2) auf die specielle Curve dritten Grades $x_0\,x_1^2 = cx_2^3$; da-
urch werden eine grosse Zahl wesentlich bekannter Sätze ab-
leitet.

Eine eingehende Kritik liegt nicht im Plane des Jahrbuchs;

eine Bemerkung möge jedoch hier Platz finden. In der Ueberschrift und auch vielfach in der Abhandlung wird nämlich von perspectivischen Gebilden gesprochen, während der Herr Verfasser offenbar allgemein projectivische und beliebig aufeinanderliegende Gebilde meint. Perspectivische Systeme in dem wenigstens in Deutschland allgemein üblichen Sinne (vergl. die Bücher von Steiner, v. Staudt u. a.), deren Projectionsstrahlen sämmtlich durch denselben Punkt gehen, hätte der Herr Verfasser grade ausnehmen müssen, da für diese seine Deductionen nicht gelten. Schz.

Capitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

F. Joachimsthal. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und Linien doppelter Krümmung. Leipzig. Teubner.

In dem vorliegenden Buche werden von Herrn Liersemann die Vorlesungen veröffentlicht, welche Joachimsthal im Winter 1856/57 zu Breslau über die Theorie der Raumcurven und Flächen gehalten hat. Die fassliche und elegante Darstellung, die Verbindung der geometrischen Vorstellung mit der Rechnung lassen das Buch für Studirende sehr empfehlenswerth erscheinen. Die behandelten Capitel sind: Analytischer Ausdruck der Raumcurve, Tangente und Normalebene, Schmiegungsebene, erste und zweite Krümmung, Schmiegungskugel der Curven. Analytischer Ausdruck einer Fläche. Untersuchung der Flächen mittelst schneidender Ebenen. Tangentialebene und Normale, Osculation der Flächen. Krümmung der Flächen, Theorie der geradlinigen Flächen, Krümmungscurven der Flächen zweiten Grades. Theorie der

rzesten Linien auf den Flächen. Die partiellen Differential-
›ichungen der Flächen. Wn.

LAURENT. Théorie des courbes gauches. Ann. de l'Éc. Norm. (2) I. 219-230.

Der Verfasser schliesst sich mit seiner Arbeit der noch ge-
ıgen Zahl derjenigen Mathematiker an, welche in neuester Zeit
ɜder begonnen haben, die Curventheorie auf dem natürlichen
ɜge fortzubilden, auf dem sie seit Monge länger als 60 Jahre
t unbeweglich stehen geblieben war. Serret gebührt das Ver-
ınst durch sein Beispiel die correcte Methode (Untersuchung
: allgemeinen Natur der Curven vor jeder Synthese), wenigstens
. den französischen Mathematikern, wieder zu Ehren gebracht
haben; dieses wird eher verringert als erhöht, wenn man ihn
richtigerweise zum Autor einer neu erfundenen Theorie macht.
cht die Originalität — er ist wohl kaum in einem Stücke der
ste gewesen, — sondern die Nothwendigkeit für den Erfolg
ldet den Vorzug seiner Aufstellungen, welcher wohl gegenüber
lchen künstlichen Einführungen wie der der tangentiellen Coor-
naten durch die Einfachheit auf den ersten Blick einleuchtet.

Laurent entwickelt zuerst, ausgehend von Serret's Formeln,
ie hauptsächlichsten Relationen zwischen den Bestimmungsstücken
er Curve und beschäftigt sich demnächst mit der osculirenden
rale. Hierbei ist ihm jedoch entgangen, dass das Bogenelement
i Anfang überflüssig, weiterhin hinderlich in die Rechnung ge-
gen worden ist, ein Mangel, der auch bei Serret hervortritt.
' fragt, welche Parallele mit der Axe der Spirale eine abwickel-
re Fläche erzeugt. Es ergiebt sich, dass 1) bei jeder Urcurve
ı Punkt auf der Hauptnormale in constantem Abstand von der
rve als Ausgangspunkt der Parallele genügt, und 2) der Ab-
nd nicht constant zu sein braucht, wenn das Krümmungsver-
ltniss der Urcurve constant ist. Die Axe der Spirale selbst
ːeugt eine abwickelbare Fläche, wenn die Urcurve der Be-
ɔgung genügt

$$\frac{RT^2}{R^2+T^2} = \text{const.},$$

wo R, T den Krümmungs- und Torsionsradius bezeichnen, eine Gleichung, die sich sofort als fertig zur Construction gelöst darstellen würde, wenn man das in R und T steckende Bogenelement heben wollte. Ferner wird die Einhüllende der die Urcurve schneidenden Parallele bestimmt, welche bekannt, hier jedoch viel zu complicirt dargestellt ist. Die von ihr erzeugte abwickelbare Fläche ist die Einhüllende der rectificirenden Ebenen; die Urcurve ist geodätische Linie auf ihr. Ferner wird der kürzeste Abstand der Hauptnormalen ermittelt als Projection des Bogenelements auf die Axe der osculirenden Spirale, in welcher er auch stattfindet. Die Projectionen der Krümmung und Torsion bezw. von der Tangente und Binormale auf den Radiusvector jenes kürzesten Abstands sind einander gleich. Ferner zeigt sich die Axe der osculirenden Spirale als Linie des kürzesten Abstands der consecutiven Hauptnormalen. Endlich wird eine die Binormale schneidende Parallele gesucht, welche eine abwickelbare Fläche erzeugt. Ihr Abstand längs der Binormale ist ausgedrückt durch

$$\int \frac{R}{T} ds.$$

Die Durchschnitte der hierin begriffenen Geraden mit der Binormale beschreiben auf der Binormalenfläche eine Schaar paralleler Curven, deren Tangenten normal zur Axe der osculirenden Spirale sind. Ihnen entspricht eine Schaar abwickelbarer Flächen, erzeugt von den Parallelen mit der Hauptnormale, und deren Gratlinien bilden die Polarfläche der Urcurve. H.

LAGUERRE. Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace. Nouv. Ann. (2) XI. 14-21, 108-1[illegible], 241-254.

Siehe Abschn. IX. Cap. 5.

LAGUERRE. Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces. Nouv. Ann. (2) XI. 60-66.

Die Variation eines rechtwinkligen Systems dreier von einem Punkte einer Fläche ausgehenden Geraden, nämlich die der beiden

ıngenten und der dritten Normale, wird durch die Differentialrela-›nen der 9 Richtungscosinus bestimmt, wobei 6 Coefficienten auf-›ten, die noch von der Richtung der Verschiebung und von dem .eiten der Tangenten in ihrer Ebene abhangen. Bringt man hiermit ɜ Variation des rechtwinkligen Systems der Tangente, Binormale .d Hauptnormale der Verschiebungscurve in gleicher Form dar-stellt in Verbindung, so erhält man zwischen den Variationen s Krümmungs- und Torsionswinkels, dem Richtungswinkel der ırve in der Berührungsebene, dem Winkelabstand der Haupt-rmale von der Flächennormale und jenen 6 Coefficienten 3 ›lationen, welche vermöge der Unabhängigkeit der 2 Parameter Gleichungen vertreten. Nach Elimination der Curvenelemente ɜiben noch 3 partielle Differentialgleichungen 1ter Ordnung ʳischen den 6 Coefficienten. Drittens wird das Quadrat des nienelements in folgender Form entwickelt

$$\partial s^2 = E^2 \partial u^2 + 2 EG \cos 2\omega \partial u \,\partial v + G^2 \partial v^2,$$

it der Bestimmung, dass die Axen in der Berührungsebene die 'inkel zwischen den Linien $u =$ const. und $v =$ const. halbiren. ach Einführung der vorigen Curvenbestimmungen erhält man Relationen zwischen E, G, ω und den 6 Coefficienten, nebst :nem Ausdruck für den Tangens des Richtungswinkels der ıngente der Curve. Die Anwendung dieser „Fundamental-meln der Flächentheorie" auf ein System dreier Flächenschaaren in einem späteren Aufsatz folgen. H.

ḷ. Blažek. Ueber das Flächendifferential. Casopis I. 30-31. (Böhmisch).

Der Verfasser zeigt in dieser kurzen Notiz, wie man in ıfacher Weise die bekannten Formeln für das Flächendifferential ' rechtwinklige und Polar-Coordinaten entwickeln könne, wenn ın von dem Satze ausgeht, dass das Quadrat einer ebenen ıche gleich ist der Summe der Quadrate ihrer Projectionen f die Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems. W.

Cayley. On the transformation of the equation of a surface to a set of chief axes. Quart J. XII. 34-38.

Die bezüglichen Axen sind Axen in einem Punkt der Oberfläche, eine von ihnen, z. B. die von Z in der Richtung der Normale, und die anderen in den Richtungen der Tangenten zu den beiden resp. Krümmungscurven. Die Gleichungen nehmen die Formen an

$$\nabla z + \tfrac{1}{2}\frac{X^2}{\varrho_1} + \tfrac{1}{2}\frac{Y^2}{\varrho_2} + \text{Gliedern in } XZ, YZ, Z^2 + \text{ etc.} = 0,$$

wo $\nabla\varrho_1, \nabla\varrho_2$ die Krümmungsradien sind. Das Neue besteht in der Bestimmung der Coefficienten von XZ, YZ und Z^2. Es wird bemerkt, dass wenn man X, Y als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet, Z von der zweiten Ordnung ist, also die Glieder in XZ, YZ von der dritten und in Z^2 von der vierten Ordnung sind.

Cly. (O.)

W. O. Jonson. Den Cauchyanska kontaktsteorien jemte en kort framställning af den generela kontaktsteoriens uppkomst och utveckling. Upsala.

Sehr ausführliche Darstellung der Berührungstheorie für Curven und Flächen. Der Verfasser citirt als Quellen sowohl die betreffenden Originalwerke von Cauchy, als auch die Vorlesungen des Herrn Prof. Daug an der Universität in Upsala. In einer Einleitung wird über die vorläufigen Arbeiten in derselben Richtung von Lagrange und seinen Vorgängern Bericht erstattet.

Bg.

A. Cayley. Sur les surfaces orthogonales. C. R. LXXV. 324-330, 381-385.

Man kann sich die Aufgabe stellen: „Es sei eine Fläche einer Familie, die einem orthogonalen System angehört, gegeben; man soll die Familie auf die allgemeinste Art finden".

Der Verfasser versucht die Lösung, indem er die drei Coordinaten nach den Potenzen eines Parameters entwickelt, und bemerkt, dass die gewonnenen Resultate, obgleich er erst die drei ersten Glieder der drei Entwickelungen bestimmt hat, dennoch schon Beachtung zu verdienen scheinen.

Mz.

A. CAYLEY. Sur la condition pour qu'une famille de surfaces données puisse faire partie d'un système orthogonal. C. R. LXXIV. 1800-1803, LXXV. 177-185, 246-250.

Ist $\varrho = f(x,y,z)$ die Gleichung einer Flächenfamilie, die einem orthogonalen System zugehört, so genügt ϱ einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung. Der Verfasser leitet diese ausführlich her. Im Anschluss daran fügt der Verfasser eine Verbesserung bei, indem er aus der gefundenen Differentialgleichung einen fremdartigen Factor: $\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)^2$ ausscheidet. Mz.

A. ENNEPER. Bemerkungen über die orthogonalen Flächen. Gött. Nachr. 1872. 17-30, 226-239.

Vereinfachung des Beweises eines Satzes von Darboux, nämlich: „Schneiden sich zwei Systeme von Flächen orthogonal in Krümmungslinien, so existirt ein drittes System, welches zu den beiden Systemen orthogonal ist.“ Mz.

D. CODAZZI. Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio. Memoria quinta. Brioschi Ann. (2) V. 206-222.

Diese 5te Abhandlung ist eine Fortsetzung des zweiten Theils der ersten Abhandlung (siehe F. d. M. I. 212). Eine Flächenschaar wird so bestimmt, dass ihr Durchschnitt mit einer zweiten orthogonal zu den isothermischen Linien sein soll, und daraus eine Reihe neuer Relationen entwickelt. H.

A. CAYLEY. A demonstration of Dupin's theorem. Quart J. XII. 185-191.

Die Notiz will den geometrischen Beweis des Satzes klar machen, dass drei Familien von Oberflächen, die sich unter rechten Winkeln schneiden, sich längs ihrer Krümmungslinien schneiden. Cly. (O.)

A. Cayley. Sur les surfaces divisibles en carrés par leurs courbes de courbure et sur la théorie de Dupin. C. R. LXXIV. 1445-1449.

Der Verfasser beweist folgenden Satz:

Es seien θ eine willkürliche Function von h, k; und x, y, z Functionen von h und k, so dass:

$$2\theta \frac{\partial^2 x}{\partial h \partial k} - \frac{\partial \theta}{\partial h}\frac{\partial x}{\partial k} - \frac{\partial \theta}{\partial k}\frac{\partial x}{\partial h} = 0,$$

$$2\theta \frac{\partial^2 y}{\partial h \partial k} - \frac{\partial \theta}{\partial h}\frac{\partial y}{\partial k} - \frac{\partial \theta}{\partial k}\frac{\partial y}{\partial h} = 0,$$

$$2\theta \frac{\partial^2 z}{\partial h \partial k} - \frac{\partial \theta}{\partial h}\frac{\partial z}{\partial k} - \frac{\partial \theta}{\partial k}\frac{\partial z}{\partial h} = 0,$$

und ferner:

$$\frac{\partial x}{\partial h}\frac{\partial x}{\partial k} + \frac{\partial y}{\partial h}\frac{\partial y}{\partial k} + \frac{\partial z}{\partial h}\frac{\partial z}{\partial k} = 0.$$

Dann erhält man durch Elimination von h und k zwischen x, y, z die Gleichung $V = 0$, die eine Fläche ausdrückt, und es bestimmen die Gleichungen $h = \text{const.}$, $k = \text{const.}$ die beiden Systeme von Krümmungslinien dieser Fläche. Ausserdem ist diese Fläche durch ihre Krümmungslinien in Quadrate theilbar.

Mz.

A. Cayley. On the surfaces divisible into squares by their curves of curvature. Pr. of L. M. S. IV. 120-121.

Bericht über eine Untersuchung, die neuerdings der Akademie der Wissenschaften zu Paris mitgetheilt worden und in den C. R. publicirt ist. Siehe das vorhergehende Referat.

Cly. (O.)

A. Cayley. On the determination of the surfaces divisible into squares by means of their curves of curvature. Pr. of L. M. S. IV. 8-9.

Der Satz ist als richtig bekannt für Oberflächen zweiten Grades, aber es ist nicht zu beweisen, dass er auf diese Flächen beschränkt ist. Das Problem der Bestimmung der Oberflächen,

e diese Eigenschaft besitzen, scheint mit bedeutenden
ıerigkeiten verhunden zu sein, die bisher noch nicht geprüft

Cly. (O.)

OMBESCURE. Sur quelques problèmes relatifs à deux
·ies de surfaces. Brioschi Ann. (2) V. 236-260.

)er erste Theil der Abhandlung, welche ursprünglich einen
einer andern über die permanenten isothermen Linien bil-
die noch erscheinen sollte, enthält eine Anzahl Formeln,
ıondere über die Einführung der Parameter der Krümmungs-
. Die Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1,$$

ihre vollständige Lösung, indem man x, y, z zu Coordinaten
Punkts auf der Normale einer willkürlichen Fläche im
nd u vom Fusspunkt macht. Sind p, q, r die Richtungs-
ıs der Normale, ξ, η die Parameter der Krümmungslinien,
die Hauptkrümmungsradien, und

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial p}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2;$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2,$$

für eine beliebige Function v

$$\ldots\Big)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2+\frac{\left(\frac{\partial v}{\Delta\partial \xi}\right)^2}{(u-R)^2}+\frac{\left(\frac{\partial v}{\nabla\partial y}\right)^2}{(u-R_1)^2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{u-R}+\frac{1}{u-R_1},$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)=\frac{\frac{\partial p}{\Delta^2\partial \xi}}{u-R};\quad \frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\frac{\partial p}{\nabla^2\partial \eta}}{u-R_1},$$

$$\frac{1}{-R_1}\;\frac{\partial R}{\partial \eta}+\frac{\partial \Delta}{\Delta\partial \eta}=0;\quad \frac{1}{R_1-R}\;\frac{\partial R_1}{\partial \xi}+\frac{\partial \nabla}{\nabla\partial \xi}=0.$$

$$
(7)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \Delta^2 p = \dfrac{\partial \Delta}{\Delta \partial \xi}\,\dfrac{\partial p}{\partial \xi} - \dfrac{\Delta}{\nabla^2}\,\dfrac{\partial \Delta}{\partial \eta}\,\dfrac{\partial p}{\partial \eta}, \\
\dfrac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} + \nabla^2 p = \dfrac{\partial \nabla}{\nabla \partial \eta}\,\dfrac{\partial p}{\partial \eta} - \dfrac{\nabla}{\Delta^2}\,\dfrac{\partial \nabla}{\partial \xi}\,\dfrac{\partial p}{\partial \xi}, \\
\dfrac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} \qquad = \dfrac{\partial \Delta}{\Delta \partial \eta}\,\dfrac{\partial p}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \nabla}{\nabla \partial \xi}\,\dfrac{\partial p}{\partial \eta}, \\
1 - p^2 \qquad = \left(\dfrac{\partial p}{\Delta \partial \xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial p}{\nabla \partial \eta}\right)^2.
\end{cases}
$$

Aus diesen Formeln werden dann Resultate von Weingarte
Lamé, Brioschi und Bertrand (Temperaturbewegung) abgeleit

Das erste Problem verlangt, 2 Schaaren sich schneidend
Flächen darzustellen, so dass der zwischen den 2 Paar con
cutiven Flächen eingeschlossene Canal einen durchweg s
congruenten Querschnitt habe, d. i. die Integration der Gleichung

$$
\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2 = g;
$$

$$
\frac{\partial \alpha}{\partial x}\,\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\,\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\,\frac{\partial \beta}{\partial z} = h,
$$

$$
\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial z}\right)^2 = k,
$$

wo g, h, k beliebige Functionen der Flächenparameter α, β si
Durch Einführung neuer Parameter u, v werden die Gleichung
verwandelt in:

$$
\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \cdots = 1;\quad \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \cdots = 0;\quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \cdots = F(u, v).
$$

Von den 2 Bedingungsgleichungen enthält die eine nur u, d
andre ist linear in v. Die Integration der ersten der so g
wonnenen Gleichungen ist im Anfang angegeben; der zweit
genügt jede Funktion von ξ, η; die dritte verwandelt sich nac
den Formeln in

$$
\left(\frac{\dfrac{\partial v}{\Delta \partial \xi}}{u - R}\right)^2 + \left(\frac{\dfrac{\partial v}{\nabla \partial \eta}}{u - R_1}\right)^2 = F(u, v).
$$

Sind nun R, R_1, die Hauptkrümmungsradien der Fläche $u = $ const
verschieden und endlich, und v von ξ, η abhängig, so kann di
Gleichung nur bestehen, wenn

$$R, R_1, \frac{\partial v}{\Delta \partial \xi}, \frac{\partial v}{\nabla \partial \eta},$$

lso nach Weingartens Satz auch Δ und ∇ Functionen von v llein sind. Dann aber ist v linear in ξ, η und kann $= \xi + \eta = t$ esetzt werden. Jetzt geht die Lamé'sche Formel

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \nabla}{\Delta \partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta}{\nabla \partial \eta} + \Delta \nabla = 0,$$

ıdem man $\Delta^2 + \nabla^2 = n^2$, $\Delta \nabla = \omega$ setzt, über in

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{n \partial n}{\omega \partial t} + \omega = 0$$

nd giebt integrirt:

$$\omega = \frac{\partial \vartheta}{\partial t}; \quad n^2 + \vartheta^2 = 4C^2.$$

[ittelst der Formeln (7) erhält man dann:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + C^2 \frac{\partial p}{\partial s} = 0 \quad (s = \xi - \eta),$$

ach deren Integration mit Beachtung von $R - R_1 = \frac{1}{\omega}$ die 'oordinaten durch Quadraturen erhalten werden. Das Resulıt ist:

$$x = Pp - Qq; \; y = Pp + Qq; \; z = \frac{2u\vartheta - \int (R + R_1) \omega \partial t - s}{4C},$$

$$P = u - \frac{R + R_1}{2} - \frac{1}{2C\omega} \frac{\partial \tau}{\partial t}; \quad Q = \frac{1}{2Cn\omega} \frac{\partial n}{\partial t};$$

$$\tau = C \int \frac{\Delta^2 - \nabla^2}{n^2} \partial t.$$

Ist hingegen $R = R_1$, also die Flächen $u = \text{const.}$ con'ntrische Kugeln, so ergiebt sich, wofern v von ξ und η abhängt, lgende Lösung:

$$\text{'s}\,\xi = \sin\zeta \cos(v + \pi); \; \cos(\eta + \varepsilon) = \cot\xi \cot\zeta; \; n = \int \cos\zeta \partial \varepsilon,$$

o ξ, η Höhe und Azimut,

$$\sin\omega = \frac{\partial v}{\partial \xi} = \sin\zeta \sin(\eta + \varepsilon); \; \sin\xi \cos\omega = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \cos\zeta;$$

willkürlich.

Ist v nur von ξ abhängig, so sind R, $\triangle$ desgleichen, und man hat:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + p = 0.$$

Das zweite Problem verlangt, dass der Querschnitt jedes Canals sich durchweg ähnlich sei. Sind μ, ν die Parameter der sich schneidenden Flächen, so sind die Bedingungen:

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \cdots = f(\mu, \nu)\left(\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right);$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}\,\frac{\partial \nu}{\partial x} + \cdots = f_1(\mu, \nu)\left(\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right).$$

Es werden neue Parameter ξ, η eingeführt, für welche die Querschnitte Quadrate werden, so dass $f = 1$; $f_1 = 0$. Zur Lösung dient die vorgängige Integration der Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \cdots = 0,$$

welche sich zerlegt in die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = i \cos \omega \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = i \sin \omega \frac{\partial u}{\partial z},$$

die nur bestehen können, wenn

$$\cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sin \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} - i \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

ist. Das Integral dieser Gleichung ist:

$$x = \alpha + iz \cos \omega; \quad y = \beta + iz \sin \omega; \quad \omega = f(\alpha, \beta),$$

und das der Differentialgleichung für u:

$$u = \varphi(\alpha, \beta)$$

$$x = \alpha + \frac{iz}{N}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \quad y = \beta + \frac{iz}{N}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \beta};$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)^2}.$$

Jetzt sind α, β zu eliminiren, für u zu setzen $\xi + i\eta$; dann erhält man eine Gleichung

$$\Psi(x, y, z, \xi, \eta) + i\,\Psi_1(x, y, z, \xi, \eta) = 0,$$

und die Gleichungen $\Psi = 0$; $\Psi_1 = 0$ bestimmen ξ, η in x, y, z. Hiervon folgt noch ein Beispiel. H.

. COMBESCURE. Sur un point de la théorie des surfaces. C. R. LXXIV. 1517-1520.

Im ersten Theil der Note wird für eine beliebige Fläche e Formel hergeleitet:

$$\pi^2 = (2Sq\pi\partial\beta + A)(2Sp\pi\partial\alpha + B),$$

o α, β Parameter der Krümmungslinien,

$$-\pi = \frac{\partial p}{\partial\alpha} + \frac{\partial q}{\partial\beta};\ p = \frac{\partial m}{l\partial\alpha};\ q = \frac{\partial l}{m\partial\beta},$$

$$l = \left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2;$$

$$m = \left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2,$$

ıd A, B willkürliche Functionen bzw. von α, β sind. Dieser leichung müsse die von Cayley in C. R. 3. juin 1872 eingeführte ınction θ, (siehe das obige Referat p. 364), welche identisch it l und m wird, genügen, sei daher nicht willkürlich.

Ferner geht jene Gleichung, wenn θ Function von $(\alpha+\beta)$ t, und man

$$\frac{\theta'}{\theta} = f$$

ətzt, über in

$$f'^2 = (a^2 - f^2)(b^2 - f^2),$$

nd f wird eine inverse elliptische Function erster Gattung von $\alpha + \beta$).

H.

ı. RIBAUCOUR. Sur la théorie des lignes de courbure. C. R. LXXIV. 1489-1491, 1570-1572.

Sind

$$Ax + By + Cz = D;\ A'x + B'y + C'z = D'$$

ə Berührungsebenen zweier orthogonalen Systeme abwickelbarer ächen in ihrer Schnittlinie, und u, v deren Parameter, so sind B, C, D Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} + \lambda\frac{\partial Z}{\partial u} + \gamma\frac{\partial Z}{\partial v} = \vartheta Z,$$

ɔ $\lambda, \gamma, \vartheta$ Functionen von u, v bezeichnen. Der Verfasser lässt ın ein System von Flächennormalen (S), die nach den von

ihnen gebildeten Abwickelbaren rangirt sind, auf einer Fläche 2ten Grades (A) reflectiren, betrachtet den Fall, wo die 2 Netze, welche die beiderseitigen Abwickelbaren auf (A) ausschneiden, conjugirt sind, und gelangt zu folgenden Sätzen:

Hat ein System von Geraden die Eigenschaft von (S) in Bezug auf eine Familie homofocaler Flächen 2ten Grades, so ist jede der davon gebildeten Abwickelbaren einer dieser homofocalen Flächen umschrieben.

Der Pol der Normalebene einer unter den Abwickelbaren längs ihrer Erzeugenden in Bezug auf jene eingeschriebene Fläche liegt auf der Tangente der Berührungscurve dieser Abwickelbaren mit der Abwickelbaren des Systemes (S).

Als interessantestes Beispiel bezeichnet er das Normalensystem einer anallagmatischen Fläche 4ter Ordnung.

H.

A. Ribaucour. Note sur les développées des surfaces. C. R. LXXIV. 1399-1403.

Sind u, v Parameter der Krümmungslinien, ist

$$\partial s^2 = f^2 \partial u^2 + g^2 \partial v^2,$$

sind

$$R_1 = \frac{f}{a}, \quad R_2 = \frac{g}{b}$$

die Hauptkrümmungsradien auf einer Fläche (A), und (B), (C) deren Mittelpunktsflächen, A, B, C ihre entsprechenden Punkte, ferner ξ der Abstand eines Punktes M der Normale in B von A, und ϑ der Winkel zwischen der Berührungsebene der Normalenfläche für beliebige Variation $\partial u, \partial v$ und zwischen der Berührungsebene von (A), so ist

$$-\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\left(a\xi + \frac{\partial R_1}{\partial u}\right)\partial u + \frac{\partial R_1}{\partial v}\partial v}{\left\{b(R_2 - R_1) + \frac{\partial g}{f\partial u}\xi\right\}\partial v - \frac{\partial f}{g\partial v}\partial u}.$$

Ist M Krümmungsmittelpunkt, so gilt die Gleichung unabhängig von $\partial u, \partial v$, zerfällt also in zwei, deren eine sich vom differentiirten R_1 frei machen lässt. Hieraus folgt zunächst ein

von Mannheim (C. R. 12. févr. 1872 siehe p. 293) geometrisch bewiesener Satz, nach welchem die Verbindungslinie eines Hauptkrümmungsmittelpunkts mit dem Durchschnitt der Berührungsbene der Mittelpunktsfläche von (B) und der Normale von (C) ı C ein Paraboloid

$$X\frac{R_2}{Z+R_2}\,\frac{\partial g}{fg\partial u}+Y\frac{R_1}{Z+R_1}\,\frac{\partial f}{fg\partial v}+1=0$$

zeugt, dasselbe nach Vertauschung der Hauptkrümmungen und isselbe für alle Flächen (A), die sich in A in 2[ter] Ordnung behren. — Längs einer Krümmungslinie von (B) ist ϑ unab- ngig von ξ, die Gleichung zerfällt wieder in zwei, aus denen e Sätze hervorgehen:

Damit die Krümmungslinien auf (B) und (C) einander oder njugirten Systemen auf (A) entsprechen, muss bzw. R_2-R_1 ler $R_1 R_2$ constant sein.

Eine andere einfache Betrachtung ergiebt: Die asymptotihen Curven auf (B) und (C) entsprechen sich, wenn R_2 Function n R_1 ist. Hiervon wird auf Flächen 2[ten] Grades Anwendung macht. H.

ı. Ribaucour. Sur la représentation sphérique des surfaces. C. R. LXXV. 533-536.

Auf der Kugel vom Radius 1, auf welcher eine gegebene läche nach gemeinsamer Normalenrichtung sich abbildet, wird in isometrisches orthogonales Netz, bestimmt durch

$$\partial s^2=\lambda^2(\partial u^2+\partial v^2)$$

ngenommen, und für die Parameter u, v conjugirte Complexe nderer Parameter substituirt. Dadurch treten Vereinfachungen in anchen Relationen ein. So werden dargestellt die gemeinsame leichung der Hauptkrümmungsradien, die Bedingungsgleichung onjugirter Tangenten und die der Minimalflächen. In Betreff er letztern ergiebt sich, dass die sphärische Abbildung der inien $\partial s=0$ auf einer Minimalfläche Generatricen der Kugelläche sind, und dass sich ein isometrisches Netz einer Minimalläche auf der Kugel als isometrisches Netz abbildet. Hiernach

untersucht der Verfasser die Bedingung, unter der eine Fläche familie einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehö welche sich in der Form ergiebt:

$$\partial x \frac{\partial}{\partial x} l\left(\frac{\frac{\partial b}{\partial y}}{\lambda^4 \frac{\partial a}{\partial x}}\right) - \partial y \frac{\partial}{\partial y} l\left(\frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{\lambda^4 \frac{\partial b}{\partial y}}\right)$$
$$+ \partial z\left(\frac{\partial}{\partial z} l \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} l \frac{\partial a}{\partial x}\right) = 0.$$

Das orthogonale System erhält man durch Elimination v $\partial x, \partial y, \partial z$ zwischen dieser und den 2 folgenden Gleichungen:

$$\partial x\left(\frac{p}{2} + c\right) + \partial y \frac{\partial b}{\partial y} + \partial z \frac{\partial b}{\partial z} = 0,$$

$$\partial x \frac{\partial a}{\partial x} + \partial y\left(\frac{p}{2} + c\right) + \partial z \frac{\partial a}{\partial z} = 0,$$

wo

$$p = f(x, y, z)$$

die Gleichung der vorliegenden Flächenfamilie,

$$a = \frac{\partial p}{\lambda^2 \partial x}; \quad b = \frac{\partial p}{\lambda^2 \partial y}; \quad c = \frac{\partial^2 p}{\lambda^2 \partial x \partial y}$$

ist, und l die Entfernung eines Punkts der Normale von de Ebene bezeichnet, die parallel der Berührungsebene durch da Kugelcentrum geht.

H.

A. Enneper. Ueber die Flächen mit einem Syste sphärischer Krümmungslinien. Gött. Nachr. 1872. 80-100.

Der Verfasser bemerkt, dass zur Behandlung der in de Ueberschrift angegebenen Flächen nicht eine partielle Differenti gleichung, sondern nur eine gewöhnliche integrirt zu werd braucht, wobei aber die auftretenden Constanten als Function einer Variabeln aufzufassen sind. Diesen Weg hatte Serret ei geschlagen, jedoch, wie der Verfasser bemerkt, unter Hinzunahme einer ganz willkürlichen Beschränkung. Der Verfasser giebt dann im Folgenden eine hiervon freie Auflösung.

Mz.

, ENNEPER. Ueber die Flächen, welche gegebenen Flächen der Krümmungsmittelpunkte entsprechen. Gött. Nachr. 1872. 577-600.

Behandlung des Falles, in welchem eine Schale der Krüm-ungsmittelpunktsfläche eine Kugel ist. Mz.

. EXNER. Ueber das Wachsthum der Krümmung ebener Schnitte krummer Flächen. Schlömilch Z. XVII. 416-418.

Ein schräger Schnitt einer krummen Fläche wird mit dem ormalschnitt von gemeinsamer Tangente verglichen; k und k' ien die Krümmungen des Normal- und schrägen Schnitts, α der 'inkel zwischen beiden Ebenen, w und w' ihre Differential-iotienten nach dem Bogen, p der Differentialquotient von k nach m Winkelabstand der Tangente von der Hauptkrümmungs-htung. Dann wird gefunden:

$$w' \cos\alpha = w + \tfrac{3}{2} kp \operatorname{tg} \alpha.$$

tsprechen w' und w'' zwei symmetrischen Schnitten zu beiden ten der Normalebene, so ist

$$\tfrac{1}{2}(w' + w'') \cos\alpha = w.$$

H.

. LÉVY. Sur une propriété des focales des surfaces. C. R. LXXIV. 176-177.

Aus einem allgemeineren Satze, wegen dessen Beweises ver-esen wird auf die 1870 von Herrn Laguerre veröffentlichte handlung: Sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie che F. d. M. II. p. 339), wird abgeleitet, dass irgend eine Ober-che und ihre Focal-Curve (Doppel-Curve der der Oberfläche d dem unendlich entfernten Kreise umschriebenen Developpa-en) sich in allen ihren Punkten in einem rechten Winkel hneiden. Schz.

. M. JEFFERY. On the principal radii of curvature of a surface referred to quadriplanar and tangential coordinates. Quart. J. XII. 86-111.

Cly.

U. Dini. Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane. Ann. d. Un. Tosc. XI. 1871. 5-43.

L. Painvin. Courbure en un point d'une surface définie par son équation tangentielle. Liouville J. (2) XVII. 219-248.

Der Aufsatz enthält eine grosse Anzahl von Transformationen des Ausdrucks der Krümmung einer Fläche; unter andern wird sie dargestellt durch den Quotienten zweier Determinanten 4ter und 5ter Ordnung von Differentialquotienten 2ter Ordnung.

H.

R. Pendlebury. Note on the indicatrix. Messenger (2) I. 148-149.

Es wird bemerkt, dass an gewissen Punkten auf gewissen Oberflächen (wie z. B. $(x^2+y^2)\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = f(z)$) die Indicatrix nicht nothwendig ein Kegelschnitt ist, sondern eine beliebige Form haben kann, indem die Zahl der Krümmungslinien, die durch diese Punkte gehen, gleich ist der Zahl der Wendepunkte in der Indicatrix.

Glr. (O.)

A. V. Bäcklund. Om orten för ytors krökningscentra. Öfvers. af Forh. Stockholm 1872.

Von Herrn Darboux sind in den C. R. LXX. (siehe F. d. M. II. p. 558) die Ordnung und Classe der Krümmungsmittelpunkts-Fläche gegeben. Die vorliegende Arbeit enthält ausser der Bestimmung derselben, auch die einiger anderer Singularitäten dieser Fläche, wie z. B. die der Ordnungszahlen ihrer Doppel- und Rückkehr-Curven. Sodann giebt der Verfasser eine Methode, um Sätze über die Krümmungsmittelpunkts-Fläche aus Sätzen über die gegebene Fläche zu gewinnen. Diese allgemeineren Betrachtungen werden dann auf Flächen 2ter Ordnung angewandt.

Bg.

. Enneper. Bemerkungen über die Enveloppe einer Fläche. Clebsch Ann. V. 304-309.

Der Verfasser gelangt durch Rechnung zu folgendem Lehr-tz: „Für die einhüllende und eingehüllte Fläche verhalten sich einem gemeinschaftlichen Punkte die Summen der Haupt-ümmungshalbmesser, vermindert um den Krümmungshalbmesser s Normalschnitts durch die Tangente der Charakteristik, zu nander wie die Producte der Hauptkrümmungshalbmesser." ieran schliessen sich noch weitere Folgerungen. Mz.

. Painvin. Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses équations tangentielles. Liouville J. (2) XVII. 177-218.

Es werden die Relationen zwischen den Bestimmungsstücken ner Raumcurve in tangentiellen Coordinaten u, v, w dargestellt, orunter die Coordinaten des Fusspunkts des Lothes vom An-ngspunkt auf eine zu bestimmende Ebene, hier die Berührungs-bene der Tangentenfläche, dividirt durch das Quadrat des Lothes ı verstehen sind. Als neues Element tritt der osculirende ge-de Kegel hinzu, d. i. derjenige, dessen Spitze der laufende ınkt ist, und der drei consecutive Tangentialebenen berührt. erauf folgt erst eine Bemerkung über den Fall, wo die Tan-ntenfläche in den imaginären Kegel $x^2+y^2+z^2=0$ degenerirt, nn eine Anwendung auf den Schnitt eines Ellipsoids und einer ncentrischen Kugel. H.

. Cayley. Corrections and additions to the memoir on the theory of reciprocal surfaces. Trans. of Lond. CLXII. 83-85.

Berichtigung eines Fehlers in der früheren Arbeit, Phil. ans. CLIX. 201 (siehe F. d. M. II. 556), auf den Zeuthen auf-erksam gemacht hat. Er betrifft die Singularitäten, die der erfasser „off. points" und „off. planes" genannt hat, und einige ahlenwerthe, die durch ein falsches Zeichen eines Gliedes in unrichtig geworden waren. So wird bemerkt, dass der in

No. 51—64 der Abhandlung sich ergebende Werth von β' nicht übereinstimmen konnte mit dem in dem „Zusatz“ gefundenen, und dass er in der That unrichtig war; hier wird ein Werth von β' gefunden, der, mit Ausnahme der Glieder in ω, ω', deren Coefficienten nicht bestimmt sind, mit dem in dem „Zusatz“ gefundenen Werth übereinstimmt. Die Resultate sind in vollständigerer Form wiedergegeben in der neuesten Auflage von Salmon's Solid geometry. Cly. (M.)

W. SPOTTISWOODE. On the contact of surfaces. Trans. of Lond. CLXII. 259-282.

Fortsetzung der Arbeit, Trans. of Lond. CLIX. 289 (siehe F. d. M. II. 556). In der vorliegenden Untersuchung betrachtet der Verfasser einen Punkt P, der zwei Oberflächen U und [illegible] gemeinsam ist, eine durch P willkürlich gezogene Axe und eine durch die Axe gelegte Ebene, die um die Axe gedreht werden kann. Indem der Verfasser wie in der früheren Arbeit verfährt, und die Gleichungen für die Berührung verschiedener Grade bildet und sie zuletzt von dem Azimuth unabhängig macht, erhält er die Bedingungen der Berührung für alle Lagen der schneidenden Ebene um die Axe herum. Solche Berührung wird „circumaxiale“ genannt, und speciell „uniaxial“ „biaxial“ etc. je nachdem sie für eine, zwei oder mehr Axen besteht. G[illegible] sie für alle durch den Punkt gehenden Axen, so heisst [illegible] „Oberflächen-Berührung.“ Der folgende Abschnitt enthält ei[illegible] allgemeine Betrachtungen über die Bestimmung von Oberfläch[en] die eine Oberflächen-Berührung verschiedener Grade mit gegebenen Oberflächen haben; und zugleich wird hervorgehoben, wie sehr die allgemeine Theorie durch die besonderen Umstände eines jeden einzelnen Falles berührt wird. Specieller wird eine Fläche 4ten Grades untersucht, die eine 14-punktige Berührung mit einer gegebenen Oberfläche hat, und es wird gezeigt, wie im Allgemeinen solch eine Fläche vierten Grades in eine Doppel-Tangentialebene degenerirt. Cly. (M.)

W. SPOTTISWOODE. On the contact of surfaces. Proc. of Lond. XX. 179-180.

Auszug aus einer inzwischen in den Trans. of Lond. ver-
'entlichten Arbeit. Siehe das obige Referat. Cly. (M.)

I. LUNDBERG. Om parallela kurvor. Upsala.

Der Verfasser, der in einem früheren Aufsatz (Upsala 1869)
e ebenen parallelen Curven behandelt hat, erweitert nun seine
ntersuchung zu denen von doppelter Krümmung, mit besonderer
rücksichtigung des Falles, wo die Curven equidistant sind,
h. die Entfernung entsprechender Punkte constant. Die Ver-
ndungslinie dieser Punkte ist Normale (im allgemeinen aber
cht Haupt-Normale) der beiden Curven; diese haben folg-
h gemeinsame Evolute und Polar-Oberfläche. Darauf werden
Gleichungen für die Curven entwickelt, welche mit einer gegebe-
n parallel und equidistant sind; diese Gleichungen enthalten
vei arbiträre Constante, von denen die eine die betreffende
volute, die andere den Abstand der Curven angiebt. Folgen
ntersuchungen über die Rückkehr- und Inflexionspunkte: diese,
wohl die einfachen als die doppelten, treten in den beiden
urven gleichzeitig auf, jene nicht. Die Orte der Krümmungs-
ittelpunkte der beiden Curven sind im allgemeinen nicht mit
nander parallel. Anwendung auf einen speciellen Fall: die
mitive ist eine Helix. Zuletzt wird die Differentialgleichung der
rallelen und equidistanten Curven entwickelt, durch Benutzung
r Eigenschaft, dass sie die Linien von stärkster Krümmung
f der developpablen Oberfläche, die von den Tangenten der
olute erzeugt wird, sind. Bg.

JORDAN. Sur les lignes de faîte et de thalweg.
C. R. LXXIV. 1457-1459, LXXV. 625-627, 1023-1025.

BOUSSINESQ. Sur les lignes de faîte et de thalweg.
C. R. LXXV. 198-201, 835-837.

In einer früheren Arbeit (siehe F. d. M. III. p. 357) hatte
err Boussinesq gezeigt, dass die Linie der Minimalneigung im
lgemeinen nicht, wie man gewöhnlich annimmt, mit der Kamm-
nie und Thallinie zusammenfällt. Herr Jordan sieht den Grund
ner irrthümlichen Annahme in dem Mangel einer exacten De-

finition von Kammlinie und Thallinie. Er definirt dieselben so: Eine Kammlinie ist diejenige von den Falllinien, die von einem Gebirgspass (Sattel) zu einem Gipfel führt, eine Thallinie diejenige, die von einem Pass nach einer Vertiefung hingeht. Im Uebrigen unterscheiden sich Kammlinie und Thallinie in nichts von den übrigen Falllinien.

Ueber diese Definition erhebt sich dann eine Discussion zwischen den Herren Boussinesq und Jordan, die zu keinem Resultat führt. Herr Boussinesq behauptet unter Anderem, die Definition des Herrn Jordan sei deshalb nicht zutreffend, weil es in kesselförmigen Thälern eine Thallinie gebe, ohne dass von einem Gebirgspass die Rede sei. Er setzt jedoch keine exacte Definition an Stelle der obigen. Wn.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

LAGUERRE. Sur la représentation des formes binaires dans le plan et dans l'espace. Inst. XL. 221-222.

Die binären Formen lassen sich durch Punkte einer Geraden oder einer rationalen (ebenen oder Raum-) Curve darstellen (vgl. auch Clebsch, Theorie der binairen Formen, siehe p. 47.). Wie der Kegelschnitt zur Repräsentation quadratischer Formen, so eignet sich die cubische Raumcurve zur Darstellung einer cubischen Form, welche man durch die ihren Wurzeln entsprechenden drei Punkte, oder durch die diese Punkte enthaltende Ebene, oder endlich durch den Schnittpunkt der Schmiegungsebenen der drei Punkte abbilden kann. Von irgend 6 Punkten einer cubischen Raumcurve lässt sich ein dem Pascal'schen Satz über 6 Punkte eines Kegelschnitts analoger Satz bezüglich der jene Punkte verbindenden Sehnen aussagen, welchen der Verfasser formulirt. Bl.

LAGUERRE. Sur les surfaces algébriques. Inst. XL. 95-96.

Sowie in der Arbeit: Mémoire de géométrie analytique p. [illegible] die Theorie der binären Formen zur Untersuchung von ebenen

urven verwendet ist, so lässt sich die der ternären Formen bei etrachtung der Oberflächen gebrauchen. Man geht von der „geischten Gleichung der Oberfläche" aus, die man aus der Gleiung der Tangential-Ebene im Punkte xyz der Fläche:

$$\lambda(X-x)+\mu(Y-y)+\nu(Z-z)=0$$

bleitet, indem man

$$\frac{\lambda x+\mu y+\nu z}{\nu}$$

ls algebraische Function von $\frac{\lambda}{\nu}$ und $\frac{\mu}{\nu}$ darstellt, was mit ülfe der Gleichung der Oberfläche in Ebenen-Coordinaten unittelbar ausgeführt werden kann. Diese Gleichung, homogen i λ, μ, ν, $\lambda x+\mu y+\nu z$, lässt sich als ternäre Form der Vernderlichen λ, μ, ν betrachten, deren Coefficienten ganze Functionen er x, y, z, jedoch als solche nicht völlig willkürlich sind.

St.

. BARDELLI. Sulle normali e sulle tangenti a superficie ed a linee algebriche. Rend. d. Ist. Lomb. (2) V. 167-173.

In dieser Note werden einige Eigenschaften von Normalen, von einem Punkt an eine algebraische Oberfläche gezogen id, bewiesen, speciell folgende: „Wenn die Längen $p_1, p_2, p_3 \cdots$ r Normalen einer willkürlich aufgestellten Relation

$$f(p_1\, p_2\, p_3, \cdots)=0$$

nügen müssen, so geht die Normale an dem durch diese leichung dargestellten Ort durch den Mittelpunkt der Massen

$$\frac{1}{p_1}\,\frac{\partial f}{\partial p_1},\ \frac{1}{p_2}\,\frac{\partial f}{\partial p_2},\cdots,$$

enn man diese an den Fusspunkten der Normalen vertheilt denkt." ir eine ebene Linie ergiebt sich folgender Satz: „Wenn die n einem Punkte aus gezogenen Tangenten $l_1, l_2, l_3, \cdots$ durch e Relation

$$\varphi(l_1, l_2, l_3 \cdots)=0$$

rbunden sind, so hat der durch diese Gleichung repräsentirte t zur Normalen eine Gerade, welche den Mittelpunkt der ssen

$$\frac{1}{l_1}\frac{\partial\varphi}{\partial l_1}, \frac{1}{l_2}\frac{\partial\varphi}{\partial l_2}, \ldots$$

enthält, wenn man diese vertheilt denkt in den Krümmungsmittelpunkten der gegebenen Linie, die den Berührungspunkten entsprechen." Der erste dieser Sätze ist nach dem Verfasser schon von H. Painvin (Nouv. Ann. (1) XVI.), jedoch nur für den Fall der Ebene bewiesen. Jg. (O.)

M. Nöther. Sulle curve multiple di superficie algebriche. Brioschi Ann. (2) V. 163-176.

Der Verfasser stellt ein für die Theorie der eindeutigen Transformation von Flächen und Räumen wichtiges System von Formeln auf, das sich insbesondere auf diejenigen Zahlen bezieht, die Cayley „Aequivalenz" einer Curve und „Postulation" einer Curve in Bezug auf eine Fläche genannt hat.

Wenn drei algebraische Flächen eine Curve C gemeinsam haben, so ist die Anzahl der Schnittpunkte, welche die Flächen ausserdem besitzen, gleich dem Product der Ordnungen derselben minus der „Aequivalenz" der Curve C. Diese von den Ordnungen der Flächen, der Ordnung und dem Rang der Curve C abhängende Zahl hat Salmon (Raumgeometrie, bearb. von Fiedler, § 92) bestimmt, Cayley auf den Fall, dass C mehrfache Curve jeder der drei Flächen ist, ausgedehnt. Hierzu nimmt ausserdem der Verfasser noch ein Zerfallen von C in mehrfache sich schneidende Curven an, welche ferner eine Anzahl von Zweigen durch einen Punkt hindurchsenden können, der selbst vielfacher Punkt der Fläche sein darf (dessen Berührungskegel alsdann indess nicht in Folge der Annahmen in Theile zerfallen soll, welche für die drei Flächen übereinstimmen), und stellt, ausgehend von dem Falle, dass jene Zweige Gerade sind, die Formel für die Aequivalenz eines solchen Systems von Curven und vielfachen Punkten auf.

Unter „Postulation" einer i-fachen Curve C in Bezug auf eine Oberfläche F hat man die Zahl der linearen Bedingungen zu verstehen, welche von F erfüllt sein müssen, damit C i-fache Curve von F ist. Ist zunächst C der vollständige Durchschnitt

'eier Flächen, so ergiebt sich durch eine von Jacobi auf einen nlichen Fall angewandte Methode (Crelle J. XV.) eine Recur-›nsformel, welche die Postulation einer i-fachen Curve auf die ner $(i-1)$-fachen zurückführt, und sie so für eine vollständige ırchschnittscurve zu ermitteln gestattet. Lässt man diese zer-llen, so erhält man den Ausdruck für die Postulation einer eliebigen Raumcurve.

Auch für den allgemeinsten Fall eines Systems von sich hneidenden vielfachen Curven, welche durch einen vielfachen ınkt von F mehrfach hindurchgehn, bildet der Verfasser die ›stulation in Bezug auf F, wobei er auf das ebene Problem ıführt wird: die Postulation einer Anzahl von vielfachen Punkten on übrigens allgemeiner Lage) für eine ebene Curve aufzu-ellen, wenn diese, um den Bedingungen zu genügen, in zum heil mehrfach zu rechnende Curven niederer Ordnung zerfällt. r findet, dass die letztere Eigenschaft eine Reduction der Postu-tion um $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$ für jede α-fach auftretende Curve ver-ılasst.

Den Schluss bilden Anwendungen auf das Flächengeschlecht d auf eindeutige Transformation von Räumen. Für die letztere ıllt Verfasser ein geschlossenes System von Formeln auf, ılches dem von Cremona für diese Transformationen gebildeten llig analog ist, und aussagt:

a. dass die Flächen, mit deren Hülfe die Transformation eier Räume in einander bewerkstelligt wird, so viele Elemente urven, Punkte) gemeinsam haben müssen, um eine dreifach un-dliche Schaar zu bilden;

b. dass irgend 3 Flächen dieser Schaar sich im Allgemeinen ır in einem Punkte schneiden;

c. dass die Postulation der Allen gemeinsamen Elemente Bezug auf eine Fläche gleich ist der Zahl:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6},$$

n der Grad der Flächen ist. Bl.

G. Darboux. Mémoire sur les surfaces. Ann. de l'Éc. Norm. (2) I. 273-292, Inst. XL. 45-46.

Der Verfasser hat in C. R. LXVIII. 1311 (s. F. d. M. II. p. 571) die Flächen 4ten Grades, die den unendlichen Kreis doppelt, und die vom 3ten, die ihn enthalten, untersucht. Hiervon ist die Cyklide Dupin's ein specieller Fall, während sie wiederum als speciellere Flächen in Moutard's Anallagmatiques enthalten sind. Für diese allgemeineren Flächen will er den Namen Cyklide vorbehalten. Eine umfassende Definition giebt er nicht, sondern führt nur als Beispiel 4ten Grades an

$$(x^2+y^2+z^2)^2-4Ax^2-4A'y^2-4A''z^2-8Cx-8C'y-8C''z-4D=0,$$

nach Erwähnung der von Moutard bewiesenen Eigenschaft, dass die doppelt berührenden Kugeln in 5 Reihen getheilt sind, deren jede eine besondere Kugel unter rechtem Winkel schneidet, und deren Mittelpunkte auf einer Quadrique liegen. Andere elegante Eigenschaften habe Laguerre mitgetheilt. Er leitet folgende Theoreme her:

1) Das anharmonische Verhältniss der sechs Punkte, in denen die Normale der Cyklide (C) die fünf Quadriken (Q) und (C) trifft, ist constant.

2) Der Ort des Punktes auf der Normale der (C), der mit den Mittelpunkten der fünf doppelt berührenden Kugeln und dem Fusspunkt eine homographische Theilung zu einer festen Theilung bildet, ist eine Fläche 4ten Grades (M) mit Doppelkegelschnitten in endlicher Entfernung.

3) Auf jeder Cyklide giebt es eine Reihe sphärischer Kegelschnitte, welche den Doppelkegelschnitten auf den Flächen (M) entsprechen.

4) Der Ort der Mittelpunkte der Kugeln, welche die (C) längs eines sphärischen Kegelschnitts treffen, ist eine cubische Fläche (G), welche die Mittelpunkte von fünf orthogonalen Kugeln (S) und die Ecke des conjugirten, den fünf Flächen (Q) gemeinsamen Tetraeders enthält. Auf den Flächen G liegen die Fusspunkte der 30 Doppelnormalen, gefällt von den Mittelpunkten der (S) auf die (Q).

5) Die Fusspunkte der von einem Punkte (A) an eine Qua-
-ik gezogenen sechs Normalen liegen auf einer cubischen Fläche,
elche durch (A), durch den Mittelpunkt der (Q) und durch die
rei unendlich entfernten Punkte in der Richtung der Symmetrie-
ken geht.

6) Jede Cartesische Ovale auf einer Cyklide liegt auf einer
ugel, deren Mittelpunkt in die singuläre Focalfläche (eine der
ocalflächen der fünf (Q)) fällt.

7) Die von den Normalen der (C) in allen Punkten einer
härischen Curve erzeugten Regelflächen gehören zur Classe
erjenigen, deren Generatricen die Seiten eines Tetraeders in
er Punkten von constantem anharmonischem Verhältniss schnei-
en. Sie sind 8ten Grades und schneiden die Seiten des Tetrae-
ers in 4 Geraden, und eine Curve 4ten Grades in 2 Doppel-
ankten.

Hieran schliesst sich eine Untersuchung über die Relationen
wischen den 5 Kugeln und den 5 homofocalen Flächen, aus
elcher eine längere Reihe von Sätzen hervorgeht.

Im Inst. ist ein Auszug der Resultate gegeben. H.

Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

. Darboux. Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace. Ann. de l'Éc. Norm. (2) I. 323-392.

Die relativ umfangreiche Literatur, welche seit Euler und
ıgrange über das Tetraeder entstanden ist, (vgl. Baltzer, De-
rminanten, §§ 15—17), hat eine Fülle von eleganten Sätzen
ıd Relationen zu Tage gefördert. Diese sowie die auf Kugeln
ıd Kreise bezüglichen Relationen leitet nun der Verfasser aus
ner gemeinsamen Quelle ab, indem er die Beziehungen, welche
rischen den In- und Covarianten einer quadratischen bezw.
linearen Form und einer durch lineare Transformation aus

dieser abgeleiteten Form bestehen, aufstellt und geometrisch deutet.

Seine Untersuchungen zerfallen in 3 Abschnitte.

1. Theil. Die Gleichung der einem Tetraeder umschriebenen Kugel lässt sich, unter Zugrundelegung desselben als Coordinatentetraeder, auf die einfache Form bringen:

$$(1) \qquad -\Sigma d_{ij}\mu_i\mu_j = 0, \quad i,j = 1,2,3,4,$$

wenn man unter $\mu_1 \cdots \mu_4$ barycentrische Coordinaten (nach der Bezeichnung von Möbius, vergl. auch Baltzer, Determinanten, 3. Aufl. p. 197, Note) und unter d_{ij} die Quadrate der Kantenlängen versteht. Bezieht man andererseits die Kugel (Radius R) auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit dem Mittelpunkt als Ursprung, so erhält man (wenn durch T homogen gemacht wird):

$$(2) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 T^2 = 0,$$

wo nun die $X, \cdots T$ mit den μ durch lineare Gleichungen, welche die Coordinaten der 4 Eckpunkte als Coefficienten enthalten, verbunden sind. Die Invarianten etc. der Formen (1) und (2) unterscheiden sich dann nur noch um eine Potenz der Transformationsdeterminante. Jede der hieraus entspringenden Relationen, geometrisch gedeutet, liefert einen Satz. Bildet man z. B. die Hesse'sche Determinante der beiden Formen, so erhält man den bekannten Ausdruck für das Quadrat des Products aus Tetraedervolumen und Radius der umschriebenen Kugel durch die Kantenlängen; durch zweimaliges Rändern der Hesse'schen Determinante entsteht eine zugehörige Form (Contravariante), vermöge deren sich die auf die Seitenflächen und die cosinus der eingeschlossenen Winkel bezüglichen Relationen darstellen lassen, u. s. w. Der Verfasser wird bei diesem Anlass auf das auch schon von Anderen betrachtete Dreieck geführt, dessen Seiten aus dem Product der gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders gebildet sind, und beweist mit Hülfe desselben die Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes über das ebene (reelle) Viereck, indem er jenes Dreieck auf eine gerade Linie, das Tetraeder auf ein ebenes Viereck sich zusammenziehen lässt.

Aus diesen Sätzen über die Eckpunkte eines Tetraeders lassen sich solche über Kreise in einer Ebene ableiten, wenn

n sich einer von Chasles und Cayley eingeführten (imaginären) bildung der Punkte des Raumes auf Kreise in einer Ebene lient, welche darin besteht, dass man einem reellen Kreise t dem Halbmesser R diejenigen beiden imaginären Punkte s Raumes (der Verfasser nennt sie „Brennpunkte" des Kreises) ordnet, welche man erhält, indem man senkrecht zur Ebene ch beiden Seiten vom Mittelpunkt des Kreises aus die Länge $\cdot\sqrt{-1}$ aufträgt (Cayley, Démonstration du théorème de . Casey, Brioschi Ann. (2) I. 132—134, siehe F. d. M. I. p. 180). iasles [Géométr. supér., Liouville J. (2) V.] hatte sich umgekehrt r Abbildung imaginärer Kreise auf reelle Punkte des Raumes dient. Der Länge der gemeinsamen (äusseren oder inneren) ıngente zweier Kreise entspricht alsdann der Abstand der (auf rselben oder auf entgegengesetzter Seite der Ebene liegenden) ennpunkte der Kreise. Dieses fruchtbare Princip lässt sich ch auf Kugeln ausdehnen, welchen alsdann die Punkte eines ıumes von 4 Dimensionen zuzuordnen sind.

2. Theil. Der Gleichung (1) kann man noch eine andere chtige Bedeutung beilegen. Haben 2 Kugeln von den Radien und R_j den Mittelpunkts-Abstand d_{ij}, und bezeichnet man mit die folgende als „gemeinsame Potenz der beiden Kugeln" eichnete Grösse:

$$k_{ij} = d_{ij}^2 - R_i^2 - R_j^2,$$

ist:

$$(3) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma - k_{ij}\mu_i\mu_j \equiv X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2T^2 = 0,$$

Gleichung einer Kugel, welche 4 Kugeln, deren Mittelpunkte den Eckpunkten des Tetraeders der barycentrischen Coordien μ liegen, orthogonal schneidet (sphère radicale). Bildet n wiederum die In- und Covarianten der beiden quadratischen rmen (3), welche durch lineare Transformation in einander erführbar sind, so erhält man auf dem oben bezeichneten Wege eressante und theilweise neue Sätze und Relationen.

Aehnlich ergeben sich durch Betrachtung von bilinearen rmen Sätze über zwei einander zugeordnete Gruppen von Teedern bezw. je 4 Kugeln. Der Verfasser geht dabei von der entität aus:

$$(4) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma - k_{ij}\mu_i\mu'_j \equiv XX' + YY' + ZZ' + \frac{H}{2}TT',$$

wo die k die gemeinsamen Potenzen wechselweise der Kugeln der beiden Gruppen, H die gemeinsame Potenz der Orthogonal-Kugeln je der einen und der anderen Gruppe sind, und bildet hierfür die invarianten Formen. Das Verschwinden der Grundform (4) drückt die Bedingung aus, dass zwei Kugeln mit den Mittelpunkten μ und μ', welche je zu den Orthogonalkugeln der einen und der anderen Gruppe orthogonal sind, sich auch gegenseitig orthogonal schneiden.

Diese Betrachtungen werden endlich noch auf Gruppen von einer beliebig grossen Anzahl von Kugeln ausgedehnt, und u. A. die Bedingung für die gemeinsamen Potenzen von 5 Kugeln aufgestellt, die von einer sechsten orthogonal geschnitten werden können.

Der dritte Theil beschäftigt sich zunächst mit der constructiven Lösung des von Steiner gestellten Problems: Einen Kreis zu finden, der drei gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet. Nachdem der Verfasser eine Lösung der Aufgabe mitgetheilt, welche das Imaginäre hinzuzieht, giebt er die constructive Lösung in der Ebene unter Benutzung bloss reeller Elemente, indem er sich auf eine Betrachtung über diejenigen Schaaren von Kreisen stützt, deren Brennpunkte (siehe oben) auf einer Geraden, einem Kreis im Raum, einer Kugel angeordnet sind.

Leichter zeigt sich die constructive Lösung der Aufgabe: 4 Kreise sollen von einem fünften unter gleichen Winkeln geschnitten werden. Diese Probleme werden sodann auch analytisch behandelt und auf Kugeln ausgedehnt.

Zum Schluss stellt der Verfasser eine Relation zwischen den Potenzen eines Punktes in Bezug auf 5 Kugeln und deren gemeinsamen Potenzen auf, welche mit Untersuchungen desselben über die Darstellung der Punkte eines dreifach ausgedehnten Raumes durch 5 homogene Coordinaten, zwischen denen eine quadratische Relation existirt, in Verbindung steht.

Bl.

F. DARBOUX. Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace. Inst. XL. 100-101.

Referat über die oben besprochene Abhandlung.

Bl.

FENTY. Solution de la question 996. Nouv. Ann. (2) XI. 139-141.

Gegeben ist eine Oberfläche 2ten Grades und ein Tetraeder *bcd*. Bezeichnet man mit A, B, C, D die Seiten dieses Tetraeders, ie den Ecken a, b, c, d entgegengesetzt sind, und mit A', B', C', D' ie Polarebenen dieser Ecken, so ist

$$\Sigma \frac{\cos(A, A')}{(a, A)(o, A')},$$

wo o der Mittelpunkt der Oberfläche, constant, welches auch das Tetraeder *abcd* ist. Man soll den Werth dieser Constante bestimmen. [(a, A) bezeichnet die Entfernung des Punktes a von der Ebene A].

O.

L. GUÉBHARD. Solution de la question 975. Nouv. Ann. (2) XI. 177-181.

Gegeben ist eine Oberfläche 2ten Grades und eine Ebene. Man soll auf der Oberfläche ein Netz von conjugirten Curven finden, deren Projection auf die Ebene ein orthogonales Netz ist.

O.

W. K. CLIFFORD. On the contact of surfaces of the second order with other surfaces. Rep. of Brit. Ass. 1872.

Cly.

. FAURE. Théorème de géométrie. Nouv. Ann. (2) XI. 444-450.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. C. p. 337.

A. Steen. Om Betingelsen for at tre cirkler aller fire Kugler gaa gjennem samme Punkt. Zeuthen Tidsskr. (3) II. 56.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. C. p. 341.

Ed. Weyr. Ueber den Kegel zweiten Grades. Casopis I. 31-32. (Böhmisch.)

Wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die Winkel der drei Paar Hauptkanten eines quadratischen Kegels sind (die in den Hauptebenen liegenden Kanten-Scheitel-Kanten), so gilt die Gleichung

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + \cos\varphi_3 \cdot \cos\varphi_1 + 1 = 0.$$

Einer der drei Winkel ist immer imaginair. W.

C. Taylor. The right circular cone. Messenger (2) II. 39-

Beweis der Eigenschaft: „Im geraden Kreiskegel ist die kleine Axe eines ebenen Schnittes die mittlere Proportionale zwischen den Durchmessern der entsprechenden Focalkugeln" und Herleitung zweier andrer bekannter Eigenschaften des Kegels.

Glr. (O.)

G. Dostor. Surfaces de révolution du second degré. Nouv. Ann. (2) XI. 362-373.

Es werden die Relationen, welche zwischen den Coefficienten der Gleichung einer Fläche zweiten Grades in rechtwinkligen Coordinaten bestehn, wenn dieselbe eine Rotationsfläche sein soll, im Allgemeinen und für gewisse singuläre Fälle entwickelt, ebenso die Gleichungen für die Rotationsaxe, Aequatorialebene etc. und die Flächen werden discutirt. Neues enthält die Arbeit nicht. A.

U. Dini. Sopra alcune formole di trigonometria sferoidica. Ann. d. Un. Tosc. XI. 1871. 78-91.

Mertens. Bemerkung über die ebenen Schnitte der Flächen zweiten Grades. Borchardt J. LXXIV. 362-364.

Ableitung der Formeln, durch welche man die Axen eines f einer Fläche zweiten Grades liegenden Kegelschnitts findet.

Mz.

d'Ovidio. Sulle linee e superficie di 2⁰ ordine. Battaglini G. X. 313-320.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. C. p. 338.

W. Borchardt. Ueber das Ellipsoid von kleinstem Volumen bei gegebenem Flächeninhalte einer Anzahl von Centralschnitten. Berl. Monatsber. 1872. 505-515.

Nachdem gezeigt worden ist, dass die Aufgabe nur bei 3, 4 d 5 Centralschnitten einen Sinn hat, werden diese drei Fälle er gesonderten Behandlung unterworfen.

Im ersten Falle bietet die Aufgabe keinerlei algebraische hwierigkeiten dar. Der zweite Fall ergiebt dieselben Gleichungen, f welche in einer früheren Abhandlung des Verfassers (Berl. h. 1866) das Problem, ein Tetraeder von grösstem Volumen i gegebenem Flächeninhalt seiner 4 Seitenflächen zu bestimmen, rückgeführt worden ist, und findet daher seine Erledigung ch die Resultate jenes Aufsatzes. Der letzte Fall dagegen dert eine selbstständige Untersuchung, und hier wird die ng zurückgeführt auf zwei hinter einander auszuführende dratwurzelausziehungen.

Mr.

Cayley. On geodesic lines, in particular those of a quadric surface. Pr. of L. M. S. IV. 191-211.

Die Abhandlung enthält eine Untersuchung der Differential- ichungen (zweiter Ordnung) der geodätischen Linien auf einer erfläche, in welcher die Coordinaten eines Punktes auf der erfläche betrachtet werden als gegebene Functionen von zwei ametern p, q, und Untersuchungen, die damit in Verbindung hen: Eine Herleitung von Jacobi's Differentialgleichung erster lnung in dem Fall einer Fläche zweiten Grades, wo die Pa-

rameter p, q die sind, welche die zwei Zweige der Krümm curven bestimmen; Formeln, wo die Parameter die sind, w die zwei geraden Linien durch die Punkte auf der Oberf bestimmen, und eine Discussion der Formen der geodäti Linien in den zwei Fällen eines Ellipsoids und eines sch Hyperboloids. Cly. (O.

A. Cayley. On the geodesic lines on an ellipsoid. Monthl. Not. XXXII. 35-36, 1871, Mem. of R. Astr. Soc. XXXIX. 31-53.

Die Fundamentalgleichungen für die geodätischen Linie einem Ellipsoid sind von Jacobi aufgestellt worden. Ist n

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},\ \text{wo } a>b>c, \text{ das Ellipsoid,}$$

so ist, wenn wir die elliptischen Coordinaten h, k einführe

$$\frac{x^2}{a^2+h}+\frac{y^2}{b^2+h}+\frac{z^2}{c^2+h}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}+\frac{z^2}{c^2+k}=1$$

schreiben, oder was dasselbe ist:

$$x^2=\frac{a(a+h)(a+k)}{(a-b)(a-c)},\quad y^2=\frac{b(b+h)(b+k)}{(b-c)(b-a)},$$

$$z^2=\frac{c(c+h)(c+k)}{(c-a)(c-b)},$$

die Differentialgleichung einer geodätischen Linie:

$$C=\int dh\sqrt{\frac{h}{(a+h)(b+h)(c+h)(\beta+h)}} + \int dk\sqrt{\frac{k}{(a+k)(b+k)(c+k)(\beta+k)}}$$

wenn β eine willkürliche Constante ist.

In der vorliegenden Abhandlung wird gezeigt, wie mittelst der ersten dieser Gleichungen den Lauf der geodäti Linien auseinandersetzen kann, und wie man für gegeben merische Werthe von a, b, c ihren Lauf berechnen, constr und durch Zeichnung darstellen kann. Speciell behandelt

erfasser Reihen von geodätischen Linien durch einen Nabel-
unkt, (diese Linien gehen auch durch den entgegengesetzten
abelpunkt) und den Fall, wo die Halbaxen durch die Gleichung
$r - b^2 = 0$ verbunden sind; eine Relation, welche die Formeln
ereinfacht. Die Titel der einzelnen Theile der Abhandlung sind:
1) Allgemeine Betrachtungen über den Lauf der Linien; 2) Linien
urch einen Nabelpunkt: 3) Formeln für den Fall $ac - b^2 = 0$;
4) Berechnung der durch die Nabelpunkte gehenden geodätischen
Linien eines Ellipsoids ($a:b:c = 4:2:1$); 4a) Graphische Con-
ruction: Projection auf die Ebene der Nabelpunkte; 5) Ellip-
ische Functions-Formeln. Im vierten Theil werden die vorher
haltenen Formeln angewandt, und die ganze Methode veran-
haulicht an der Bestimmung der geodätischen Linien durch den
abelpunkt auf dem Ellipsoid, für welches $a = 1000$, $b = 500$,
$= 250$. Die erforderlichen Integrale werden durch Quadratu-
n berechnet und die Resultate in Tabellen zusammengestellt,
it Hülfe deren die geodätischen Linien wirklich gezeichnet
erden. Ein Theil der Zeichnungen ist in reducirter Grösse der
bhandlung beigefügt. In dem speciellen Fall $ac - b^2 = 0$ hätte
ich die Rechnung (wie im fünften Theil gezeigt wird) durch
en Gebrauch von Legendre's Tafeln vereinfacht, die Methode
r Quadraturen wurde jedoch vorgezogen, weil sie in ihrer An-
ndung allgemeiner ist. Glr. (O.)

. Roberts. Sur la rectification des lignes de courbure d'un ellipsoide. Brioschi Ann. (2) V. 17-19.

Ein Ellipsoid wird von einem einschaligen und einem zwei-
haligen homofocalen Hyperboloid orthogonal in seinen Krüm-
ungslinien geschnitten. Auf Krümmungsbogen der erstern Art
t der Verfasser in Brioschi Ann. (2) II. 19. das Abel'sche
ditionstheorem angewandt (vergl. F. d. M. I. 139) und betrachtet
st den Schnitt des zweischaligen Hyperboloids. Ein Bogen
llt sich als hyperelliptisches Integral erster Klasse dar. Es
sen sich daher unter Annahme zweier Relationen zwischen
Amplituden die diesen entsprechenden, von einem Scheitel

beginnenden Bogen einer und derselben Krümmungslinie addiren, so dass die Summe dreier der Summe der beiden andern und einer algebraischen Function gleich ist, welche sich als constantes Vielfaches des Products der z-Coordinaten aller 5 Endpunkte erweist. In Betreff der erstern Abhandlung holt der Verfasser noch das Ergebniss nach, welches aus der Verlegung des Anfangs der Bogen aus dem einen Scheitel in den andern entspringt. H.

G. Darboux. Sur les théorèmes d'Ivory relatifs aux surfaces homofocales du second degré. Mém. de Bordeaux VIII. 197-280.

Siehe Abschn. IX. Cap. 5.

F. Joachimsthal. Sur le nombre des normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoide. Nouv. Ann. (2) XI. 8-14, 149-156.

Fortsetzung einer Uebersetzung der in Borchardt J. LIX. 111. veröffentlichten Arbeit.

Vgl. F. d. M. II. p. 573. A.

J. J. Walker. Solution of question 3453. Educ. Times XVI. 36.

Seien Fy, $F'y'$ die Senkrechten von den Brennpunkten auf irgend eine Tangente des Schnittes eines geraden Kreiskegels, seien CC' die Mittelpunkte der Kugeln, welche dem Kegel eingeschrieben sind und die Schnittebenen berühren, so sind die Geraden Cy, yy', $C'y'$ rechtwinklig zu einander. Hi.

Millicent Colquham and G. S. Carr. Solution of question 3441. Educ. Times XVI. 32-33.

Wenn l, m, n Richtungscosinus einer Geraden bedeuten, so sind alle in der Gleichung

$$x^2+y^2+z^2+2lyz+2mzx+2nxy=1$$

enthaltene Flächen ähnlich, so lange das Product lmn denselben Werth hat.

Die Flächen sind in der That nicht nur ähnlich, sondern gleich. Hi.

T. WOLSTENHOLME. Solution of question 3166. Educ. Times XVI. 57.

Durch eine der Geraden auf

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

und durch die kürzeste Entfernung zwischen dieser und der nächsten ist eine Ebene gelegt. Zeige, dass die Gleichung der parallelen Ebene durch den Mittelpunkt ist

$$\frac{ax(b^2+c^2)}{\sin\theta}+\frac{by(c^2+a^2)}{\cos\theta}=cz(a^2-b^2),$$

und dass diese Ebenen den Kegel

$$\{ax(b^2+c^2)\}^{\frac{2}{3}}+\{by(c^2+a^2)\}^{\frac{2}{3}}=\{cz(a^2-b^2)\}^{\frac{2}{3}}$$

umhüllen. Hi.

J. J. WALKER. Solution of question 3010. Educ. Times XVI. 76.

Die Gleichung einer Rotationsfläche zweiter Ordnung lässt sich auf die Form bringen:

$$(a^2-k^2)x^2+(b^2-k^2)y^2+(c^2-k^2)z^2+2bcyz+2cazx$$
$$+2abxy+2dx+2ey+2fz+g=0.$$

Hi.

Townsend. On a property in the theory of confocal conics and its analogue in the theory of confocal quadrics. Messenger (2) II. 33-35.

Beweis, dass eine Fläche zweiten Grades, die doppelte Berührung mit drei festen confocalen Flächen zweiten Grades hat, eine feste Directrix-Kugel hat. Glr. (O.)

A. CLEBSCH. Ueber Modelle von Weiler. Gött. Nachr. 1872. 402-403.

Vorlegung und Beschreibung zweier von Weiler ausgeführten

Modelle, die sich auf eine besondere Fläche dritter Ordnung, di von Clebsch sogenannte „Diagonalfläche", beziehen.

Kln.

F. Klein. Ueber ein Modell von Neesen. Gött. Nach 1872. 403-404.

Das Modell stellt eine Fläche dritter Ordnung mit vier reell Knotenpunkten vor. Mittheilung des Satzes, dass jede Fläd dritter Ordnung ohne Knoten aus der Fläche mit vier reell Knoten durch einen einfachen die Knotenpunkte betreffend Deformationsprocess schematisch abgeleitet werden kann.

Kln.

P. Gordan. Ueber das Pentaeder der Flächen dritt Ordnung. Clebsch Ann. V. 341-377.

Es handelt sich in diesem Aufsatze einmal darum, d Theorie des Pentaeders der Flächen dritter Ordnung auf alg braische Weise ausführlicher und strenger zu begründen, als seither geschehen war, dann aber namentlich auch an eine entwickelten Beispiele die Methoden klar zu legen, welche d Algebra allmählich zur Behandlung solcher Probleme ausgebild hat. Mit Rücksicht auf den ersten Punkt sei namentlich herv gehoben, dass die Covariante fünften Grades abgeleitet wi welche das Product der fünf Pentaederebenen vorstellt.

Kln.

F. E. Eckardt. Beiträge zur analytischen Geometri des Raumes, insbesondere zur Theorie der Fläch dritten Grades mit vier Doppelpunkten, so wie zu Lehre von den Doppelpunkten. Clebsch Ann. V. 30-50.

Die Arbeit ist eine theils abgekürzte, theils durch Zusätz erweiterte Reproduction einer Programmabhandlung mit dem selben Titel aus Reichenbach im Voigtland vom Jahre 1869, di im zweiten Bande dieses Jahrbuches p. 543 ohne Referat auf

führt ist, die indess sowohl in Hinsicht auf die Methode, als f die Resultate wohl besprochen zu werden verdient.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier den Abständen eines Punktes von den itenflächen des Tetraeders $ABCD$ proportionale Grössen, welche s die Vierebenencoordinaten des Punktes betrachtet werden, kann man dem betrachteten Punkte einen zweiten zuordnen, ssen Coordinaten den umgekehrten Werthen der entsprechen- n Coordinaten des ersten Punktes proportional sind. Dieser eite Punkt liegt, wie unmittelbar aus dem Zusammenhange ischen den Coordinaten hervorgeht, so, dass die beiden durch gend eine Tetraederkante und je einen der beiden Punkte ge- gten Ebenen mit den beiden durch dieselbe Kante gehenden traederflächen wechselweise gleiche Winkel bilden.

Die gegenseitige Beziehung beider Punkte bildet eine im lgemeinen eindeutige Verwandtschaft, welche die Basis der ntersuchungen des Verfassers bildet.

Einer beliebigen Ebene mit der Gleichung:

$$\text{I.} \qquad A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0$$

tspricht auf diese Weise die Fläche dritten Grades

$$\text{II.} \qquad \frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} + \frac{D}{\delta} = 0,$$

lche die vier Eckpunkte des Tetraeders zu Doppelpunkten noten) hat, und deren Eigenschaften mit Hülfe jener Verwandt- haft untersucht werden. So entsprechen z. B. den drei Ge- len der Ebene, welche die Schnittpunkte dieser Ebene mit je ei Gegenkanten des Tetraeders verbinden, diejenigen drei raden, welche ausser den Tetraederkanten auf der Fläche gen, u. dgl. m. Ausgezeichnet unter diesen Flächen ist die- ige, welche der unendlich entfernten Ebene entspricht. Sie der Ort der Punkte, deren senkrechte Projectionen auf die r Tetraederflächen in einer Ebene liegen, und welche durch 28 Halbirungspunkte der Geraden geht, die je zwei Mittel- nkte der acht dem Tetraeder eingeschriebenen Kugeln ver- nden. Einer beliebigen Geraden entspricht eine Raumcurve itten Grades, welche durch die vier Eckpunkte des Tetraeders ht, und auch für diese Curven lassen sich viele Eigenschaften

durch die Verwandtschaft erkennen. Besonders hervorzuh
sind aber die folgenden Resultate: Einer Fläche zweiten Gr
welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht, entspricht w
eine solche, und wenn die erstere ein Kegel ist, so ist es
die letztere. Hat man nun einen beliebigen Punkt der F
dritten Grades II., so entspricht demselben ein Punkt der Ebe
und es giebt, wie leicht zu erkennen ist, zwei Kegel zw
Grades, welche diesen letztern Punkt zum Scheitel haben,
die vier Punkte A, B, C, D hindurchgehn und die Ebene I
irgend einer durch den Scheitel gehenden Geraden ber
Diesen beiden Kegeln entsprechen zwei Kegel zweiten G
deren Scheitel in dem betrachteten Punkt der Fläche liege
von denen jeder die Fläche II. längs einer Raumcurve
Grades berührt. Da nun der Berührungskegel einer
dritten Grades im Allgemeinen vom sechsten Grade ist
wenn der Scheitel auf der Fläche selbst liegt, zerfällt
doppelt zu zählende Tangentialebene und einen Kegel
Grades, so folgt das Resultat: „dass für Flächen dritten
mit vier Doppelpunkten der Berührungskegel von jedem
der Fläche aus in zwei Kegel zweiten Grades zerfällt."

Auf ähnliche Weise wird dann noch eine Reihe a
Sätze über die betrachteten Flächen bewiesen, von den
folgende hervorgehoben werden mag:

„Die gemeinschaftliche umhüllende abwickelbare
zweier Flächen dritten Grades mit vier gemeinschaftlichen I
punkten zerfällt in acht Kegel zweiten Grades, deren Sche
der Raumcurve dritten Grades liegen, die beiden Fläch
meinsam ist."

Die Betrachtung der Hesse'schen Fläche der Fläch
sowie die Anwendung der Verwandtschaft auf höhere C
und die wiederholte Anwendung der Transformation füh
einer Reihe von Resultaten, die hier übergangen werden m

Wendet man dieselben Betrachtungen auf Vierpunkt-C
naten an, d. h. auf vier Grössen, die den Abständen einer
von den vier Eckpunkten eines Fundamentaltetraeders p
tional sind, so erhält man eine Verwandtschaft, in welcher

ınkte (als Centrum eines räumlichen Ebenenbüschels) eine äche dritter Klasse entspricht, welche jede der Flächen des traeders *ABCD* längs eines Kegelschnitts berührt, und welche n jeder beliebigen Tangentialebene in zwei Kegelschnitten geanitten wird, und die unter dem Namen der Steiner'schen äche bekannt ist.

Zum Schluss sei bemerkt, dass die hier betrachtete Verındtschaft als specieller Fall der doppelprojectivischen Verındtschaft aufgefasst werden kann, wie Referent sie in seiner augural-Dissertation: „Disquisitiones de superficiebus tertii ordi-ı, Berol. 1862" betrachtet hat. Vergl. auch „Sturm, synthetische ıtersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Leipzig 1867."

A.

ıGUERRE. Sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner. Nouv. Ann. (2) XI. 319, 337, 418.

Referat erfolgt im nächsten Bande nach vollendetem Erıeinen der Arbeit.

Kln.

D. Andere specielle Raumgebilde.

. BERTINI. Sulla curva gobba di 4^0 ordine e 2^{0}specie. Rend. d. Ist. Lomb. (2) V. 622-638.

Der Verfasser will die Eigenschaften der Raumcurve vierter rdnung und zweiter Art untersuchen, welche man als Schnitt ner veränderlichen Fläche dritten Grades (Oberfläche dritter rdnung mit einer Doppelgeraden) und der beiden in Beziehung ıf einen Punkt des Raumes polaren Hyperboloide erhält. Unter deren beweist er folgenden Satz: „Die 4 Berührungspunkte r stationären Ebenen der Raumcurve vierter Ordnung und zweiter t bilden ein äquianharmonisches System."

Jg. (O.)

A. Cayley. Sur une surface quartique aplatie. C. R. LXXIV. 1393-1395.

Für Flächen giebt es eine den abgeplatteten Curven analoge Theorie. So kann z. B.: eine Fläche zweiten Grades in eine doppelt zu rechnende Ebene mit einem Grenzkegelschnitt übergehen. Hier wird nun von einer Cyclide die Abplattung betrachtet. Cyclide ist die allgemeine Fläche vierten Grades, die den unendlich entfernten Kugelkreis zur Doppellinie hat; unter Sphäroquartique wird der Durchschnitt einer Kugel mit irgend einer Fläche zweiten Grades verstanden; der Verfasser weist nun durch rein geometrische Betrachtungen nach, dass es eine abgeplattete Cyclide giebt, die zur Kante (oder Grenzcurve) eine Sphäroquartique hat. Mz.

G. Darboux. Sur les théorèmes d'Jvory relatifs aux surfaces homofocales du second degré. Mém. de Bordeaux VIII. 197-280.

Siehe Abschn. IX. Cap. 5.

A. Cayley. On the cyclide. Quart. J. XII. 148-165.

Bezieht sich auf die Cyclide im ursprünglichen Sinne des Wortes, nämlich Dupin's Cyclide. Cly. (O.)

E. F. Kummer. Ueber einige besondere Arten von Flächen vierten Grades. Berl. Monatsber. 1872. 474-489.

Es handelt sich um diejenigen Flächen vierter Ordnung, welche Enveloppen von Flächen zweiter Ordnung sind. Ihre allgemeine Gleichung ist

$$\text{(A)} \qquad \varphi^2 = \psi\chi,$$

wo φ, ψ und χ beliebige Functionen zweiten Grades der Coordinaten sind. Die Schaar der einhüllenden Flächen ist dargestellt durch die Gleichungen

$$\text{(B)} \qquad \alpha^2\psi + 2\alpha\varphi + \chi = 0,$$

wo α den veränderlichen Parameter bedeutet. In dieser Art

›n Flächen sind die meisten bekannteren Flächen vierter Ord-
ıng enthalten. Eine characteristische Eigenschaft dieser Flächen
t, dass das Strahlensystem 12ter Ordnung und 28ter Klasse,
'elches die Doppeltangenten einer Fläche vierter Ordnung im
llgemeinen bilden, für sie aufgelöst ist in zwei getrennte Strahlen-
ysteme, das eine von der vierten Ordnung und der zwölften
lasse, das andere von der achten Ordnung und der 16ten Klasse.
as erste derselben wird durch die Generatrices sämmtlicher ein-
üllender Flächen zweiten Grades, die ja stets geradlinige
lächen sind, gebildet. Das andere ist dasjenige, welches übrig
leibt, wenn man jenes erste absondert.

Das erste dieser Strahlensysteme enthält in sich die Strahlen
er acht Kegel, welche in der Schaar der einhüllenden Flächen B
nthalten sind. Die Scheitel dieser acht Kegel treten noch zu
er Fläche A hinzu, um die vollständige Brennfläche des ge-
achten Strahlensystems zu bilden. Hierin liegt ein specieller
'all des folgenden allgemeinen Gesetzes: Wenn man das voll-
ändige System aller Doppeltangenten einer Fläche n^{ten} Grades
s Strahlensystem auffasst, so besteht die Brennfläche dieses
ystems, aufgefasst als Ort der Punkte, für welche zwei Strahlen
einen zusammenfallen, aus jener Fläche und aus der voll-
ändigen abwickelbaren Fläche, welche von allen Doppeltangen-
lebenen jener Fläche eingehüllt wird. Der Grad jener ab-
ickelbaren Fläche wird als $n(n-2)(n-3)(n^2+2n-4)$ an-
geben, und es wird dabei bemerkt, dass in Salmon's „Analytic
ometry of three dimensions" p. 419 der ersten, so wie p. 455
r zweiten Auflage, durch ein Versehn zu diesem Ausdruck der
ıctor 4 fälschlich gesetzt sei. Das betrachtete Strahlensystem
thält ausserdem noch acht Kegel in sich, nämlich diejenigen,
elche gebildet werden von den Strahlen, welche durch die acht
urchschnittspunkte der Flächen $\psi=0$, $\varphi=0$, $\chi=0$ hindurch-
ehn, die sämmtlichen einhüllenden Flächen zweiten Grades ge-
ein sind und zugleich Knotenpunkte der Fläche A sind; diese
ht Kegel sind die Orte der durch die Knotenpunkte gehenden
angenten der Curve und vom sechsten Grade. Die von den
oppeltangentialebenen der Fläche A eingehüllte abwickelbare

Fläche 160ten Grades zerfällt in jeden der zuletzt genannten Kegel doppelt gezählt, in jeden der zuerst genannten Kegel einfach gezählt, und in eine abwickelbare Fläche 48ten Grades.

Es wird hierauf erwähnt, dass in gewissen Fällen das betrachtete Strahlensystem vierter Ordnung in zwei Strahlensysteme zweiter Ordnung zerfallen kann, und dass man auf diese Weise alle Strahlensysteme zweiter Ordnung erhalten kann, welche Brennflächen und nicht Brenncurven haben, mit Ausnahme des Strahlensystems zweiter Ordnung und siebenter Klasse. Den letzten Theil der Veröffentlichung nimmt die Betrachtung der Flächen ein, deren Gleichung ist

$$\text{(C)} \qquad \varphi^2 = pqrs,$$

wo φ eine Function zweiten Grades und p, q, r, s lineare Functionen der Coordinaten sind. Eine solche Fläche lässt sich auf drei verschiedene Arten als Einhüllende einer Schaar von Flächen zweiten Grades (A) ansehen und hat eine Reihe besonderer Eigenschaften, von denen hervorgehoben werden mögen die, dass die vier Ebenen $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ die Fläche C in Kegelschnitten berühren, und dass die zwölf Durchschnittspunkte der sechs Kanten des durch jene vier Ebenen gebildeten Tetraeders mit der Fläche $\varphi = 0$ Knoten der Fläche C sind. Die vorher bei der allgemeinern Fläche A besprochenen Gebilde modificiren sich für die Fläche C, was hier nicht weiter ausgeführt werden soll. Der Herr Verfasser beschreibt zum Schluss eine Anzahl von Gypsmodellen für Flächen der zuletzt besprochenen Art, zu denen auch die Steiner'sche Fläche gehört, welche die Eigenschaft hat, dass alle Tangentialebenen sie in zwei Kegelschnitten schneiden. A.

R. Townsend. On a property of the wave-surface. Messenger (2) II. 28-29.

Beweis von Plücker's Satz, dass die beiden Theile der Fresnel'schen Wellenfläche, welche apsidal sind zu dem Ellipsoide, dessen Halbaxen a, b, c sind, reciproke Polaren zu einander in Bezug auf das coaxale Ellipsoid sind, dessen entsprechende Halbaxen $\sqrt{bc}$, $\sqrt{ca}$, $\sqrt{ab}$ sind. Glr. (O.)

.. MANNHEIM. Remarques sur une classe générale de surfaces, et en particulier sur la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites fixes est constante. Darboux Bull. III. 119-122.

Für den Fall, wo die Geraden sich rechtwinklig schneiden, at J. A. Serret das dreifach orthogonale Flächensystem gefunden, u dem die genannte Fläche gehört. Die Belgische Akademie rlangte darauf Bestimmung der Krümmungslinien, wenn überaupt die Geraden sich schneiden. Eine darauf eingesandte und i die Memoiren aufgenommene Arbeit von Catalan löst die Aufabe nicht, wie er selbst sagt. Mannheim erweitert die Betrachng, indem er beliebige Gerade nimmt, geht jedoch nicht auf rmittelung der Krümmungslinien aus, sondern theilt nur eine s einigen Bemerkungen hervorgehende Construction der Hauptrümmungs-Richtungen und Radien mit, die auch in weiterem mfange Anwendung gestattet. Seien nämlich um die 2 Geraden otationscylinder beschrieben, deren Durchschnitt also für conante Summe ihrer Radien auf der in Rede stehenden Fläche gt. Dann werden Lichtstrahlen, die von dem einen Cylinder der seiner Axe) normal ausgehen, auf der Fläche normal zum dern reflectirt und treffen dessen Axe normal. Die Hauptmmungsrichtungen sind dann bezeichnet durch die Diagonalen es Rhombus, gebildet aus den Projectionen der Indicatricen der Cylinder auf die Berührungsebene der Fläche. Man fälle n von einem Punkte der Fläche Lothe auf die 2 Geraden, richte ein solches auf der Ebene beider, verbinde die 2 Krümungsmittelpunkte der Cylinderschnitte, welche die 2, durch die Lothe einzeln mit dem dritten bestimmten Ebenen bilden, und ge die Quadratwurzel des Stückes, welches die Verbindungsie auf der Normale der Fläche abschneidet, auf dem dritten the ab; dann liegt der Endpunkt auf der Indicatrix der äche. Mit Hülfe der Ecken des Rhombus kann man dann ese Curve, ihre Axen und dadurch die Hauptkrümmungsradien nstruiren. Das gleiche Verfahren lässt sich anwenden, wenn e Fläche durch eine lineare Relation zwischen den Normal-

abständen ihres laufenden Punktes von 2 gegebenen Fläch[illegible] definirt ist. H.

G. Darboux. Sur la surface des centres de courbur[illegible] de l'ellipsoide et sur les coordonnées elliptiques.
Darboux Bull. III. 122-128.

Obgleich das Resultat seiner Darstellung der Mittelpunkt[illegible] fläche des Ellipsoids bereits von Joachimsthal und Catalan ge[illegible] funden worden ist, hält doch der Verfasser seine Herleitung[illegible] weise im Interesse der Theorie der elliptischen Coordinaten f[illegible] mittheilenswerth. Damit der Schnitt

$$(\lambda-d)\ F-S=0$$

eines Ellipsoids

$$F=\frac{x^2}{a-d}+\frac{y^2}{b-d}+\frac{z^2}{c-d}-1=0,$$

und einer Kugel

$$S=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2=0$$

ein Kegel sei, ergiebt sich für λ die Bedingung

$$(4)\qquad 1=\frac{\alpha^2}{a-\lambda}+\frac{\beta^2}{b-\lambda}+\frac{\gamma^2}{c-\lambda}-\frac{R^2}{d-\lambda}.$$

Durch die Wurzeln dieser Gleichung $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ ausgedrück[illegible] findet man:

$$(6)\qquad \alpha^2=\frac{\varphi a}{f'a};\quad \beta^2=\frac{\varphi b}{f'b};\quad \gamma^2=\frac{\varphi c}{f'c};\quad R^2=-\frac{\varphi d}{f'd},$$

wo

$$fu=(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)$$
$$\varphi u=(u-\varrho)(u-\varrho_1)(u-\varrho_2)(u-\varrho_3),$$

gesetzt ist; hierzu kommen die Relationen:

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-R^2=a+b+c+d-\varrho-\varrho_1-\varrho_2-\varrho_3, \\ \partial\alpha^2+\partial\beta^2+\partial\gamma^2-\partial R^2=\Sigma\dfrac{\varphi'\varrho_i\,\partial\varrho_i^2}{f\varrho_i}. \end{cases}$$

Diese Formeln nun lösen eine Reihe von Fragen. Für $R=0$ wird eine der Wurzeln, etwa $\varrho_3, = d$. Berührt statt dessen [illegible] das Ellipsoid, so hat die Gleichung (4) eine Doppelwurzel, etwa $\varrho_2=\varrho_3$, und (7) definirt ein krummliniges Coordinatensystem gebildet aus Parallelen mit dem Ellipsoid und dessen abwickel[illegible]

baren Normalflächen. Lässt man ϱ_2 bei constanten ϱ, ϱ_1 variiren, so durchläuft der Mittelpunkt von S die Normale von F, während S beständig F berührt; dies ist anzuwenden auf den genannten Fall $\varrho_3 = d$, wo ϱ, ϱ_1 gewöhnliche elliptische Coordinaten des Berührungspunkts der Kugel werden. Ist $\varrho_2 = a, b$ oder c, so berührt die Kugel doppelt, und ihr Mittelpunkt fällt in eine der Hauptkrümmungsebenen; für $\varrho_2 = a$ verschwindet α, und die Mittelpunkte liegen auf der xy-Ebene; ist zugleich $\varrho_1 = d$, so erhält man die das Ellipsoid doppelt berührenden Kugeln vom Radius Null. Die Punkte auf der Normale bestimmt durch $\varrho_2 = 0$, a, b, c, ∞ sind der Fusspunkt, die 3 Schnitte der Hauptebenen und der unendlich ferne Punkt; die Strecken zwischen diesen sind also constant. Sind 3 Wurzeln λ einander gleich, so liegt das Kugelcentrum auf der Mittelpunktsfläche, und so gelangt man zu Joachimsthal's Ausdruck für letztere:

$$\varrho = \varrho_2 = \varrho_3,$$

$$\alpha^2 = \frac{(a-\varrho)^3 (a-\varrho_1)}{f'a}; \quad \beta^2 = \frac{(b-\varrho)^3 (b-\varrho_1)}{f'b};$$

$$\gamma^2 = \frac{(c-\varrho)^3 (c-\varrho_1)}{f'c}; \quad R^2 = -\frac{(d-\varrho)^3 (d-\varrho_1)}{f'd};$$

$$\partial\alpha^2 + \partial\beta^2 + \partial\gamma^2 = \partial R^2 + \frac{(\varrho-\varrho_1)^3 \partial\varrho_1^2}{f\varrho_1}.$$

Aus diesen Gleichungen geht die Bestimmung der asymptotischen Linien hervor:

$$\frac{3\partial\varrho^2}{(a-\varrho)(b-c)(c-\varrho)} + \frac{\partial\varrho_1^2}{(a-\varrho_1)(b-\varrho_1)(c-\varrho_1)} = 0.$$

Ferner wird der Fall betrachtet, wo die 4 Wurzeln paarweise gleich sind. Wie Painvin in Nouv. Ann. (2) VIII. (vergl. Bull. Math. I. 57, F. d. M. II. 569) gezeigt, schneidet dann die Kugel das Ellipsoid in einer Geraden und einer kubischen Kegelfläche. Die Gerade ist Tangente, wenn alle Wurzeln gleich sind; die Kugelcentra liegen dann auf 8 Parabeln, welche die Coordinatenebenen und sich paarweise in den den Nabelpunkten entsprechenden Krümmungsmittelpunkten berühren, welche, wie Clebsch bewiesen hat, Gratlinien der Mittelpunktsfläche sind.

Schliesslich wird noch auf die Vorzüge hingewiesen, die es darbietet, wenn man statt der Kugel eine in eine der homofocalen Flächen eingeschriebene Fläche 2ten Grades nimmt. H.

S. Roberts. On parallel surfaces of conioids and conics. Pr. of L. M. S. IV. 57-81.

Enthält eine Classification und Bestimmung von Ordnung, Classe und verschiedenen Singularitäten der Parallelen zu einer Fläche zweiten Grades (centralen, parabolischen, Umdrehungs-Flächen etc.) und der Oberflächen (tubular surfaces) parallel zu einer Curve zweiten Grades (centralen und parabolischen).

Cly. (O.)

J. Wolstenholme. Solution of question 3507. Educ. Times XVI. 65-66.

Wenn Kegel zweiter Ordnung durch 6 Punkte gelegt werden, so ist der Ort der Scheitel eine Fläche 4ter Ordnung, welche 25 Gerade enthält. Für Kegel durch 7 feste Punkte ist der Ort der Scheitel eine Curve 6ter Ordnung. Hi.

R. Townsend and J. J. Walker. Solution of question 3677. Educ. Times XVII. 60-62.

Finde den Winkel zwischen der Normale in irgend einem Punkte einer ebenen Curve und der Geraden von dem gegebenen Punkte zum Mittelpunkt der Sehne, die der Tangente parallel und unendlich nahe gezogen ist. Lässt sich die Frage auf Punkte einer Fläche und der Indicatrix ausdehnen? Hi.

J. Wolstenholme, Kitchin and others. Solution of question 3283. Educ. Times XVI. 37-38.

Der Querschnitt eines geraden Cylinders sei eine Ellipse mit den Axen $2a$, $2b$. Bestimme den Ort der Brennpunkte aller ebenen Schnitte, welche durch einen Punkt in der Axe des Cylinders gelegt werden können.

Der Ort ist eine Fläche sechster Ordnung. Hi.

. CAYLEY. On a certain sextic torse. Trans. of Cambridge XI. p. III. 507-523. 1871.

Der betrachtete Torsus (eine developpabele Oberfläche) ist er, der zur Rückkehrlinie eine „Excuboquartic" oder eine uni-ırsale Curve 4ten Grades hat. Der Verfasser macht darauf auf-ıerksam, dass (bei Ausschluss der ebenen Curven) eine Curve ten Grades entweder eine „Quadriquadric", d. h. der vollständige chnitt zweier Oberflächen zweiten Grades ist oder eine „Excu-oquartic" d. h. eine Curve, durch die nur eine Oberfläche zwei-n Grades geht und die der partielle Schnitt dieser Oberfläche weiten Grades mit einer cubischen Fläche durch 2 erzeugende inien (derselben Art) der Oberfläche zweiten Grades ist. Die uadriquadric kann allgemein sein, mit Knoten oder Rückkehr-unkten; nämlich wenn die beiden Oberflächen 2ten Grades eine ewöhnliche Berührung haben, so ist die Schnittcurve mit Knoten ersehen, findet dagegen eine stationäre Berührung statt, so ist ie mit Rückkehrpunkten versehen. Die unicursale Curve 4ter)rdnung ist so beschaffen, dass die Coordinaten eines Punktes x, y, z, w) auf ihr rationalen und ganzen Functionen' 4ter Ord-ung $(*)(\theta, 1)^4$ eines variabeln Parameters θ proportional sind. ie allgemeine unicursale Curve ist in der That die Excubo-artic, die aber als specielle Fälle der unicursalen Curve (aber ht der Excuboquartic in dem Sinne, wie sie oben definirt ist) Quadriquadric mit Knoten und mit Rückkehrpunkten ein-hliesst. Der Torsus nun, der als Rückkehrlinie eine unicursale urve hat, ist ein Torsus vom 6ten Grade; und dies ist der Grad ssen, der aus der Excuboquartic und aus der Quadriquadric it Knoten abgeleitet ist; beim Quadriquadric mit Rückkehr-unkten findet sich eine Erniedrigung des Grades um eins, und r Torsus wird vom 5ten Grade. Der Verfasser hatte nun früher hon erhalten die Gleichungen 1) des Torsus 6ten Grades aus r Quadriquadric mit Knoten, 2) des Torsus 5ten Grades, abge-itet aus der Quadriquadric mit Rückkehrpunkten, und 3) des orsus 6ten Grades, der aus einer gewissen speciellen Excubo-uartic abgeleitet ist; die Gleichung des Torsus jedoch, die aus

der allgemeinen unicursalen Curve 4ten Grades hergeleitet wird, hatte er noch nicht ableiten können. Die Ergänzung dieser Lücke ist der Hauptgegenstand der gegenwärtigen Abhandlung. Die Gleichung dieses Torsus 6ten Grades wird abgeleitet und mit der Gleichung der Oberfläche verglichen, die der Ort der Krümmungsmittelpunkte eines Ellipsoides ist. Glr. (O.)

E. Catalan. Teorema sulle curve anti-pedali. Lettera a Boncompagni. Att. d. Acc. P. d. Linc. XXV. 349.

Kurzer Auszug aus einem Briefe, in dem die Definition der Schneckenlinie gegeben wird. Der Verfasser giebt dann ohne Beweis 2 Sätze über die antipedalen Curven einer Reihe von Schneckenlinien. Jg. (O.)

C. W. Bauer. Orthogonale Trajektorien zu der Schaar von Cycloiden, welche die Bahnlinie und einen Rückkehrpunkt gemeinschaftlich haben. Schlömilch Z. XVII. 424-428.

Die Gleichungen der orthogonalen Trajektorienschaar für das System der Cycloiden, welche die Bahnlinie und einen Rückkehrpunkt gemein haben, und den einfach unendlich vielen Werthen des Radius des erzeugenden Kreises entsprechen, werden entwickelt und discutirt. Scht.

E. Beltrami. Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche. Battaglini G. X. 147-160.

Die in Rede stehende Fläche wird durch die Curve erzeugt, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten:

$$x+\sqrt{r^2-y^2} = r\log\frac{r+\sqrt{r^2-y^2}}{y}$$

ist, indem diese Curve um die x-Axe rotirt; die Gleichung der Fläche ist also:

$$x+\sqrt{r^2-y^2-z^2} = r\log\frac{r+\sqrt{r^2-y^2-z^2}}{\sqrt{y^2+z^2}}.$$

.e zahlreichen hierüber gegebenen Theoreme können nicht weiter ıgeführt werden. Mz.

. Torelli. Il teorema di Viviani sulla pseudosfera. · Battaglini G. X. 128-129.

Aus einer pseudosphärischen Fläche („erzeugt von einer nie von constanter Tangente, welche um ihre Asymptote rotirt") hneidet ein gewisser gerader Cylinder ein Stück aus, welches eich dem vierfachen Rechteck aus dem Radius des Cylinders d dem Pseudoradius der Fläche ist. H.

. Darboux. Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires. I. et II. Mém. de Bordeaux VIII. 291.

Ueber diese Arbeit, deren dritter und umfangreichster Theil Jahre 1873 erschienen ist, wird im nächsten Bande referirt rden. A.

Capitel 4.

Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

Battaglini. Intorno ai sistemi di rette di grado qualunque. Battaglini G. X. 55-76.

Diese Arbeit schliesst sich an frühere Aufsätze des Verfassers r Liniencomplexe ersten und zweiten Grades (siehe Battaglini VI. VII. F. d. M. I. 205. II. 544.) sowie an Untersuchungen selben über binäre und ternäre Formen an (Battaglini G. IX.), r welche bereits berichtet wurde (siehe F. d. M. III. pag. 38). lem der Verfasser die Gleichung des allgemeinen Complexes nbolisch durch die Potenz eines linearen Ausdrucks oder auch s Product verschiedener linearer Ausdrücke ersetzt, gelingt es n, gewisse allgemeine Bildungen, wie er sie in den genannten

Formen-Untersuchungen entwickelt hat, für die Theorie der
plexe zu verwerthen. Diese Symbolik ist mit derjenigen, v
Clebsch eingeführt hat (Clebsch Ann. II. F. d. M. II. p. 6(
dem Sinne verwandt, als sie eine Vorstufe derselben da
Bei Clebsch erscheinen die in Battaglini's Darstellung vo
menden Symbole selbst wieder aus anderen Symbolen als
gliedrige Determinanten aufgebaut, wodurch eine sehr viel gr
Leichtigkeit in solchen Fällen erzielt wird, in denen es gil
Linien-Coordinaten zu Punkt- oder Ebenen-Coordinaten
zugehen.

Unter den von Battaglini abgeleiteten Bildungen sei
sondere eine Fläche $2k^{\text{ter}}$ Ordnung hervorgehoben, die Ort s
Punkte ist, dass Kegel, die drei gegebenen Complexen k^{ten} (
angehören, nach Battaglini's Ausdrucksweise zu einande
monisch sind. Setzt man $k = 2$ und lässt die drei Comple
sammenfallen, so geht diese Fläche in die Singularitäte
des Complexes zweiten Grades über, die sonach in an
Sinne als erstes Glied einer ganzen Flächenfamilie erschei
dies nach der von Pasch gegebenen für beliebige Con
geltenden Erweiterung des Begriffs der Singularitätenfläch
Fall ist (siehe F. d. M. II. p. 604). Kl

S. Lie. Ueber Complexe, insbesondere Linien-
Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Th
partieller Differentialgleichungen. Clebsch Ann. V. 1

Diese umfangreiche und ausserordentlich reichhaltige
handlung, die bestimmt scheint, der analytisch-geometri
Speculation den Zugang zu neuen, wichtigen Gebieten zu
nen, kann gewissermaassen nur uneigentlich unter die linie
metrischen Arbeiten aufgenommen werden. Denn so wese
sie auf liniengeometrischen Vorstellungen fusst und so w
ihre Resultate eben für Liniengeometrie sind, so hat sie doc
rin wohl ihre eigentliche Bedeutung, dass sie es mit Erfolg u
nimmt, diese neueren geometrischen Anschauungen für a
weitige Gebiete zu verwerthen.

Herr Lie geht von der Betrachtung von dreifach unendlich ielen Curven im Raume aus, deren Inbegriff er, im Anschluss n die in der Liniengeometrie übliche Terminologie, einen Curven-omplex nennt. Ein solcher Curven-Complex führt ein gewisses tegrationsproblem mit sich, das in einer partiellen Differential-eichung erster Ordnung zwischen drei Variabeln seinen analy-chen Ausdruck findet. Die Curven des Complexes nämlich, lche durch einen Punkt gehen, erzeugen in demselben einen gel, und man kann verlangen, alle Flächen anzugeben, die in dem ihrer Punkte den bez. Kegel berühren. Diese Flächen ben dann, wie Herr Lie zeigt, und darin liegt eine neue Inter-station partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen ei Variabeln überhaupt, die characteristische Eigenschaft, von n Curven des Complexes osculirt zu werden. Die Integral-chen eines Linien-Complexes insbesondere haben also die Linien selben zu Haupttangenten.

Weiter entwickelt der Verfasser einen allgemeinen Begriff, r seither wohl in analytischen Untersuchungen (z. B. bei Jacobi) rgekommen war, aber dem geometrischen Bewusstsein fern ge-gen hatte, den Begriff der Berührungstransformation. Als solche rd jede Transformation definirt, die im Allgemeinen sich be-rende Flächen in ebensolche überführt. Man hat drei Classen Berührungstransformationen zu unterscheiden, je nachdem Punkte (welche man dabei als zweifach unendliche Aggregate Flächenelementen zu denken hat) wiederum in Punkte, oder urven, oder in Flächen übergehen. Die erste Classe deckt mit den gewöhnlichen Punkt-Transformationen; die dritte sse entspricht der durch Plücker gegebenen Verallgemeinerung dualistischen Umformungen des Raumes. Die zweite Classe r ist etwas Neues: sie ordnet den Punkten des Raumes die ven eines Complexes zu und setzt also die allgemeine Auf-ung dessen, was ein Curven-Complex ist, voraus.

Ein besonderer Fall dieser Transformationen zweiter Classe, Herr Lie näher untersucht, ist besonders merkwürdig. Er ht in genauester Beziehung zu der eindeutigen Abbildung des earen Complexes auf den Punktraum, wie diese gelegentlich

durch Nöther gegeben wurde (Gött. Nachr. 1869, siehe F. d. M. II. p. 202), wenn man voraussetzt, dass der dabei auftretende fundamentale Kegelschnitt mit dem imaginären Kugelkreise coincidirt. Sie führt nämlich die geraden Linien des einen Raums (resp. die Flächenelemente, welche sich an eine Gerade anschliessen) in die Kugeln des anderen Raumes über (in die Flächenelemente, welche eine Kugel bedecken) und lässt somit der Liniengeometrie eine Kugelgeometrie als etwas Coordinirt entsprechen. Geraden Linien, die sich schneiden, sind Kugel zugeordnet, die sich berühren. Es führt dies mit Leichtigkeit zu dem Theoreme: „dass den Haupttangentencurven der Fläche des einen Raumes die Krümmungscurven der Flächen des anderen Raumes entsprechen.“ Als ein aus ihm fliessendes Resul erscheint die Bestimmung der Haupttangenten-Curven der K mer'schen Fläche vierter Ordnung und vierter Classe mit 16 Knot punkten, von der bereits berichtet wurde (siehe F. d. M. II. p. 60 Sie entspricht der Bestimmung der Krümmungscurven auf de Flächen vierter Ordnung, die den Kugelkreis doppelt enthalt wie diese durch Darboux und Moutard gegeben worden war.

Beide Geometrieen: Linien- und Kugel-Geometrie bieten d Anschauung eigenartige Vortheile dar, und es ist nun Lie's w teres Bestreben, je nach dem Zwecke, den er verfolgt, zwisch ihnen abwechselnd, die Theorie partieller Differentialgleichun mit drei Variabeln zu fördern.

Er beschäftigt sich zunächst mit drei Classen von part Differentialgleichungen erster Ordnung, von denen die b ersten coordinirt erscheinen, während die dritte eine mehr ticuläre Stellung einnimmt. Die betreffenden Gleichungen dadurch ausgezeichnet, dass die Monge'schen Characteri ihrer Integralflächen auf diesen bez. Haupttangenten-Cur Krümmungs-Curven und geodätische Curven sind. Es ist wohl nicht möglich, mit kurzen Worten die interessanten ziehungen hervorzuheben, in denen diese Gleichungen zu Grundvorstellungen der Linien- bez. Kugel-Geometrie stehen, die zahlreichen Berührungspunkte dieser Untersuchungen früheren Arbeiten Anderer hervorzuheben. Lie wendet sich wei

a zu partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und
eift aus ihnen wiederum solche heraus, deren Characteristiken
.upttangenten- oder Krümmungs-Curven auf den Integralflächen
id. Es gelingt ihm, einen Einblick in die Bedeutung der-
lben zu gewinnen, und insbesondere alle diejenigen, welche
l, bezw. zwei erste Integrale besitzen, wirklich anzugeben. Die
eichungen mit zwei ersten Integralen enthalten merkwürdiger-
ise keine willkürlichen Functionen mehr, sondern sind von
llig bestimmter Form.

Zum Schlusse wendet sich Lie noch insbesondere zur Theorie
r Linien-Complexe und zeigt unter Anderem die Möglichkeit,
: Integration des allgemeinen Complexes zweiten Grades auf
adraturen hyperelliptischer Differentiale zurückzuführen. Siehe
ch die Referate p. 161. Kln.

Klein. Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. Clebsch Ann. V. 257-278.

Klein. Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen. Clebsch Ann. V. 278-302.

Die beiden vorgenannten Arbeiten sind einmal bestimmt, die
lgemeine Auffassung der Liniengeometrie und die daraus
ssende algebraische Behandlung derselben, wie sie der Ver-
ser bereits in einer früheren Untersuchung (Clebsch Ann. II.
he F. d. M. II. p. 605) angebahnt hatte, darzustellen. Sie
hen andererseits in der engsten Beziehung zu der soeben be-
rochenen Abhandlung von Lie und geben in Anlehnung an
eselbe eine allgemeine Darstellung der Beziehung zwischen
nien-Geometrie und metrischer Geometrie, sowie die fertige al-
braische Lösung einer Reihe von Integrationsproblemen, die
h auf Linien-Complexe beziehen. In dem ersten Aufsatze über-
gt der Verfasser insbesondere die Lehre von den Orthogonal-
temen auf Liniengeometrie und findet als Analogon zum Dupin'-
en Theoreme einen Satz, der die Bestimmung der Hauptan-
ntencurven auf einer grossen Zahl von Flächen ermöglicht. Die
upttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche z. B. unterliegen

als specieller Fall eben dieser Bestimmungsweise. In dem
ten Aufsatze formulirt der Verfasser zunächst gewisse i
Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen unter A
dung von Linien-Coordinaten in möglichst symmetrischer V
Er wendet sich sodann zur Untersuchung der bez. Problem
besondere bei Complexen zweiten Grades mit gemeinsame
gularitätenfläche und erledigt deren Integration durch Einfü
von Linien-Coordinaten, die Jacobi's elliptischen Coordi
nachgebildet sind. Auf diese Art erhält er z. B. in fertiger
die Integration des allgemeinen Linien-Complexes zweiten Gr
wie sie von Lie ihrer Möglichkeit und ihren wesentlichen E
schaften nach erkannt war. Kln

M. Pasch. Zur Theorie der linearen Complexe.
Borchardt J. LXXV. 106-153.

Der Verfasser hat sich zur Aufgabe gestellt, die geometri
Vorstellungen von dem zwischen Punkt, Ebene und Gerade
lichen Lagenverhältnissen und die Resultate, welche ma
Bezug hierauf bei der Untersuchung der Complexe ersten G
gefunden hat, in fertigen Formeln wiederzugeben resp.
algebraische Identitäten im Sinne der Invariantentheorie z
weisen. Er nimmt dabei durchaus auf die Erweiterung Be
welche man allen liniengeometrischen Formeln ertheilen
wenn man die 6 Linien-Coordinaten als unabhängige Verä
liche betrachtet und dem entsprechend als Coordinaten
linearen Complexes interpretirt. Interessant ist dabei beso
wie die Gleichung einer Fläche zweiten Grades in diesen „
plex-Coordinaten“ drei verschiedene Formen erhält, die dre
geometrische Bedeutung haben. Sie sagen nämlich aus, entw
dass der Complex unter den Linien der einen oder der an
Erzeugung zwei zusammenfallende enthalte, oder dass der
plex mit dem ihm in Bezug auf die Fläche zweiten Grades
jugirten in Involution liege. Geht man von den „Complex-
dinaten“ zu Linien-Coordinaten zurück, so fallen die drei F
geometrisch wie algebraisch zusammen. Kln

. Clebsch. Ueber die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe. Gött. Nachr. 1872. 33-44, Clebsch Ann. V. 435-442.

Es wurde bereits in Bd. II. p. 602 dieser Fortschritte und loch soeben bei Besprechung der Battaglini'schen Arbeit (p. 407) ler Symbolik gedacht, welche Clebsch im zweiten Bande von Clebsch Annalen für Linien-Complexe entwickelt hat. In dem vorliegenden Aufsatze zeigt er nun, wie man vermöge derselben m Stande ist, die fertigen Gleichungen gewisser zu einem Liniencomplexe covarianter Flächen, frei von fremden Factoren zu bilen. Gedenken wir insbesondere der Gleichung der Singularitenfläche. Dieselbe wird bei einem Complexe n^{ten} Grades von er Ordnung und Classe $2n(n-1)^2$; bei den Complexen dritten rades insbesondere besitzt sie eine Rückkehrcurve der 96ten Ordnng, sowie eine parabolische Curve, deren Tangentenebenen ne Developpable der 96ten Classe umhüllen. Kln.

. Painvin. Étude d'un complexe du second ordre. Nouv. Ann. (2) XI. 49-60, 97-108, 202-210, 289-297, 481-500, 529-539.

Ein specielles Studium desjenigen Complexes zweiten Grades, essen Linien durch die Forderung characterisirt sind, dass die urch sie an ein gegebenes Ellipsoid gelegten Tangentialebenen einander senkrecht stehen. Der Complex hat die Fresnel'se Wellenfläche zur Singularitätenfläche; an die anschauliche Darstellung, welche wir von der Gestalt der Wellenfläche haben, knüpft sich eine übersichtliche Discussion der Vertheilung der Complexgeraden im Raume. Dieses Beispiel eines speciellen Complexes scheint daher sehr geeignet, in die allgemeine Theorie des Complexes zweiten Grades einzuleiten. Kln.

. Zech. Die Geometrie unendlich dünner Strahlenbündel und die Affinität ebener Systeme. Schlömilch Z. XVII. 353-375.

Um die Verhältnisse in einem unendlich dünnen Bündel eines (zweifach unendlichen) Strahlensystems zu erforschen, genügt es

nach Möbius dieses Bündel als Theil eines Systems zu betra-
ten, dessen Linien die entsprechenden Punkte zweier aff
ebener Systeme verbinden. Indem der Verfasser hiervon a
geht, giebt er die Mittel, um bei drei gegebenen Geraden ei
unendlich dünnen Bündels die Haupt- und Focalebenen dessel
etc. zu construiren. Kln.

F. Aschieri. Sopra i sistemi di rette. Battaglini G. 343-347.

Ein linearer Complex ist bestimmt, wenn man eine seine
Linien sowie die conjugirte Polare kennt, die er einer zweite
gegebenen Geraden zuordnet. Hieran anknüpfend betrachtet de
Verfasser ein Entsprechen zwischen zwei vierfach unendliche
Complexsystemen. Kln.

E. d'Ovidio. Sopra alcune formole in coordinate d rette. Battaglini G. X. 33-37.

Der Verfasser drückt den Winkel, den zwei Gerade im Raume
mit einander machen, als Function ihrer Tetraeder-Coordinaten
aus. Kln.

E. Padova. Démonstration de deux théorèmes de géométrie. Nouv. Ann. (2) XI. 210-216.

Sind

$$\begin{cases} X'x + Y'y + Z'z + T't = 0, \\ X''x + Y''y + Z''z + T''t = 0 \end{cases}$$

die homogen gemachten Gleichungen einer Geraden, so nennt
der Verfasser die sechs Grössen

$$F = Y'Z'' - Z'Y''; \quad G = Z'X'' - X'Z''; \quad H = X'Y'' - Y'X'',$$
$$L = X'T'' - T'X''; \quad M = Y'T'' - T'Y''; \quad N = Z'T'' - T'Z'',$$

zwischen denen die Relation

$$FL + GM + NH = 0$$

besteht, die sechs Coordinaten der betrachteten Geraden.

Versteht man ferner unter $x'y'z't'$ und $x''y''z''t''$ die Tetraeder-ordinaten zweier Punkte, also ihre Abstände von den Seiten-chen a, b, c, d eines Tetraeders, dessen Volumen V ist, und ssen Eckpunkte den gegenüberliegenden Seiten entsprechend it A, B, C, D bezeichnet sind, so kann man in analoger Weise e sechs Grössen:

$$f = y'z'' - z'y''; \quad g = z'x'' - x'z''; \quad h = x'y'' - y'x'';$$
$$l = x't'' - t'x''; \quad m = y't'' - t'y''; \quad n = z't'' - t'z'',$$

ischen denen die Relation

$$fl + gm + hn = 0$$

steht, als die Coordinaten der Verbindungslinie beider ansehen.

Diese Definitionen unterscheiden sich, wie man sieht, von n in Plücker's neuer Geometrie des Raumes etc. (vgl. F. d. M. l. I. p. 198 ff.) zu Grunde gelegten nur dadurch, dass die Coor-naten homogen sind; sie gehen in dieselbe über, wenn man die und T gleich Eins setzt, und zwar sind die ersten sechs Grössen s Axencoordinaten, die letzten sechs als Strahlencoordinaten ner Geraden zu betrachten.

Die erste Aufgabe, mit welcher sich nun der Verfasser be-häftigt, ist die, die Distanz r der beiden Punkte $x_1 y_1 z_1 t_1$ und $y_2 z_2 t_2$ mit Hülfe der Strahlencoordinaten ihrer Verbindungs-rade auszudrücken.

Zur Vereinfachung der Rechnung werden zunächst statt der ordinaten x, y, z, t die Grössen

$$\xi = \frac{a}{3V}x; \quad \eta = \frac{b}{3V}y; \quad \zeta = \frac{c}{3V}z; \quad \tau = \frac{d}{3V}t$$

gefühlrt; (so dass man also auch ξ, η, ζ, τ als die Coordinaten s betrachteten Punktes ansehen kann, wenn man für jede der-ben die zugehörige Höhe des Tetraeders als Längeneinheit trachtet), unter $f_1 g_1 h_1 l_1 m_1 n_1$ werden die Grössen verstanden, mit $\xi\eta\zeta\tau$ ebenso zusammenhängen, wie $fghlmn$ mit $xyzt$.

Dann ist der Zusammenhang zwischen den vier Coordinaten $\zeta\tau$ eines Punktes gegeben durch die Gleichung $\xi + \eta + \zeta + \tau = 1$, d es ergeben sich ferner die Relationen:

$$\xi_1 - \xi_2 = h_1 - g_1 + l_1; \quad \eta_1 - \eta_2 = -h_1 + f_1 + m_1;$$
$$\zeta_1 - \zeta_2 = g_1 - f_1 + n_1; \quad \tau_1 - \tau_2 = -l_1 - m_1 - n_1.$$

Nun geht der Verfasser zur Bestimmung der Grösse r von Formel aus:

$$r^2 = -\frac{abcd}{9V^2}\Big[\frac{\overline{AB}^2}{cd}(x_1-x_2)(y_1-y_2)+\frac{\overline{AC}^2}{bd}(x_1-x_2)(z_1-z_2)$$
$$+\frac{\overline{AD}^2}{bc}(x_1-x_2)(t_1-t_2)+\frac{\overline{BC}^2}{ad}(y_1-y_2)(z_1-z_2$$
$$+\frac{\overline{BD}^2}{ac}(y_1-y_2)(t_1-t_2)+\frac{\overline{CD}^2}{ab}(z_1-z_2)(t_1-t$$

und entwickelt daraus schliesslich die Formel:

$$r^2 = f_1^2\overline{BC}^2+g_1^2\overline{AC}^2+h_1^2\overline{AB}^2+l_1^2\overline{AD}^2+m_1^2\overline{BD}^2+n_1^2\overline{DC}^2$$
$$+2\Sigma f_1 g_1 \overline{BC}\cdot\overline{AC}\cos(BC,$$

in welcher sich das Summationszeichen auf alle Combinati von je zwei Coordinaten der Geraden bezieht.

Als zweite Aufgabe wird die Bestimmung des Volu einer Pyramide behandelt, deren Eckpunkte G, H, J, E die (dinaten $(xyzt)$ mit den Indices 1, 2, 3, 4 haben.

Das Endresultat ist

$$3JEGH = \frac{abcd}{27V^3}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}.$$

(In der Arbeit befindet sich auf p. 216 Zeile 4 von obe Druckfehler, das Additionszeichen + vor der Determinant durch ein Multiplicationszeichen zu ersetzen.) A.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformation Abbildungen.

LAGUERRE. Mémoire sur l'emploi des imaginaires (la géométrie de l'espace. Nouv. Ann. (2) XI. 14-21, 10 241-254.

Die hier vorliegende Methode der geometrischen Darstellung ıer complexen Mannigfaltigkeit besteht in der Abbildung der- :ben auf eine reelle Mannigfaltigkett von doppelt soviel Dimen- ›nen. Ein Paar von complex conjugirten Punkten a, a' im .um wird dargestellt durch den reellen Kreis, in welchem sich ɘ Kegel schneiden, die von jedem der Punkte durch den un- dlichfernen Kugel-Kreis gelegt werden. Sein Mittelpunkt ist ɘ reelle Mitte der Strecke aa', seine Ebene steht senkrecht auf r reellen Geraden aa'. Um die beiden Punkte aa' zu unter- heiden, legt man diesem Kreise einen bestimmten Sinn bei. dieser Darstellung ist als specieller Fall die vom Verfasser Гouv. Ann. XXIX. p. 241) gegebene Abbildung der complexen bene enthalten.

Soll das Paar a, a' einer Raumcurve G angehören, deren leichungen in einem reell-definirten Coordinatensysteme demnach ır reelle Coefficienten enthalten dürfen, so müssen die darstellenden reise gewissen Bedingungen unterliegen. Denkt man sich durch G ne Kegelfläche gelegt, deren Erzeugende die Curve G in zwei ınkten a, a' schneiden, so liegen die zugehörigen Kreise auf einer äche. Betrachtet man z. B. eine Curve F von 4ter Ordnung, die auf ıer Kugel S und einer Kegelfläche A von zweiter Ordnung liegt, bilden die Kreise, welche den Schnittpunkten von F und den zeugenden desselben Systemes von A entsprechen, eines der eissysteme der anallagmatischen Fläche 4ter Ordnung, die aus und A in bekannter Weise entsteht (siehe F. d. M. I. 300). ·ht diese Fläche in eine von zweiter Ordnung über, was dann schieht, wenn F ein Kegelschnitt C wird, so folgt der Satz: ·ieht man in der Ebene eines Kegelschnittes C Parallele von ster Richtung, so liegen die den Schnittpunkten von C mit jeder rselben entsprechenden Kreise auf einer Oberfläche 2ter Ord- ıng, die C zur Focallinie hat.“ Diese letztere ist demnach, nachdem C Ellipse oder Hyperbel, ein zweischaliges Hyper- ›loid oder ein Ellipsoid.

Zum Schlusse folgen Bemerkungen über die Transformation ırch reciproke Radien und eine Reihe von Sätzen über die ormalen der anallagmatischen Fläche. St.

A. Clebsch. Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene. Gött. Nachr. 1872. 429-449, Clebsch Ann. VI. 205-215.

Siehe Abschnitt II. Cap. 3 p. 64.

L. Cremona. Sulle transformazioni razionali nello spazio. Brioschi Ann. (2) V. 131-163.

Bereits früher (siehe F. d. M. III. p. 426) wurde der neuen Theorie der eindeutigen Raumtransformationen gedacht, welche von den Herren Cayley, Cremona und Nöther unabhängig begründet wurde. In der vorliegenden Abhandlung beginnt Cremona eine ausführliche Darlegung derselben, über die wir aber erst berichten können, wenn sie vollständig vorliegt. Kln.

A. Clebsch. Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte $p = 0$. Clebsch Ann. V. 1-27.

Linienflächen, deren ebene Schnitte das Geschlecht Null haben, lassen sich bekanntlich auf die Ebene eindeutig abbilden und man kann eine solche Abbildung unmittelbar in allgemeiner Weise angeben, indem man von der rationalen Darstellung zweier ebener Schnitte der Fläche ausgeht. Herr Armenante hatte nun bereits bei einer früheren Gelegenheit die Möglichkeit untersucht, die Abbildung durch Anwendung Cremona'scher Ebenentransformationen zu reduciren (Brioschi Ann. (2) IV. 50-73, siehe F. d. M. I. p. 636). Aber er hatte dabei, sozusagen, eine allgemeine Lage der in der Abbildung auftretenden Fundamentalpunkte vorausgesetzt. Clebsch zeigt in dem vorliegenden Aufsatze, wie man allerdings immer durch Anwendung passend gewählter quadratischer Transformationen der Ebene die Abbildung erniedrigen kann, so lange getrennte Fundamentalpunkte in hinreichender Zahl vorhanden sind. Aber die Fundamentalpunkte können von verschiedenen Seiten her unendlich nahe rücken, und dann ist eine weitere Reduction der Abbildung nicht mehr möglich. Die Linienflächen vom Geschlechte Null, welche eine gegebene Ordnung besitzen, zerfallen dem entsprechend in eine Reihe von

pen. Flächen desselben Typus können ohne Zwischentreten n Fundamentalpunkten eindeutig auf einander bezogen werden; diesem Sinne lässt sich der Typenbegriff überhaupt auf algeaische Flächen anwenden. Kln.

. NÖTHER. Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen. Clebsch Ann. V. 635-639.

Clifford, Nöther und Rosanes haben vor zwei Jahren unabngig von einander den Satz gefunden, dass man jede eindeutige ansformation der Ebene in sich (jede Cremona'sche Transfortion), durch eine Reihenfolge quadratischer Transformationen etzen könne, und Nöther und Rosanes haben einen allgemeinen weis desselben gegeben. Aber die Fälle waren nicht in Becht gezogen worden, in denen ähnlich, wie bei der so eben rührten Abbildung der Linienflächen vom Geschlechte Null, ein ısammenrücken mehrerer Fundamentalpunkte von verschiedenen iten her Statt findet. Nöther zeigt nun in der gegenwärtigen ntersuchung, indem er den allgemeinen Beweis recapitulirt, ss der Satz auch in den gemeinten singulären Fällen seine ltigkeit behält. Kln.

BRILL. Note über die Gleichungen der auf einer Ebene abbildbaren Flächen. Clebsch Ann. V. 401-404.

Es handelt sich darum, von den die Abbildung einer Fläche virkenden Functionen aus durch ein symmetrisches Verfahren Gleichung der Fläche aufzusteigen. Der Verfasser erörtert 1 Resultat insbesondere an dem Beispiele der Steiner'schen che. Kln.

CLEBSCH. Ueber die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung. Clebsch Ann. V. 414-422.

Die bekannte einfachste Abbildung der Flächen dritter Ordng auf die Ebene erhält man auf folgende Weise unmittelbar. ın wähle drei Gerade der Fläche, *a*, *b*, *c*, von denen *a* und *c*

sich nicht schneiden, *b* aber sowohl von *a* als von *c* getroffen wird. Dann beziehe man die Fläche auf das Strahlensystem, dessen Leitlinien *a* und *c* sind, und schneide letzteres mit einer durch *b* gelegten Ebene. Kln.

G. Darboux. Sur une méthode nouvelle pour l'étude des courbes tracées sur une surface algébrique. Darboux Bull. III. 221-224, 251-256. 281-285.

Eine Reihe von Aufsätzen, bestimmt, den Leser in die Theorie der eindeutigen Flächenabbildung einzuführen. Kln.

G. Darboux. Sur les théorèmes d'Jvory relatifs aux surfaces homofocales du second degré. Mém. de Bordeaux VIII. 197-280.

Die Arbeit behandelt die von Jacobi zuerst aufgedeckten Folgerungen aus dem Ivory'schen Theorem, welche im Borchardt'schen Journal Bd. LXXIII von Herrn Hermes veröffentlicht und von demselben weiter durchgeführt sind. (Vgl. dieses Jahrbuch Bd. III p. 376, 379 und 380). Es ist erklärlich, dass ein Theil der Betrachtungen des Verfassers nicht wesentlich von denen der genannten Arbeiten abweicht, und es wird deshalb unter Hinweis auf die Referate über jene genügen, diejenigen Punkte hervorzuheben, welche der vorliegenden Arbeit eigenthümlich sind.

Die Jacobi'sche Verwandtschaft ist folgendermaassen definirt. Es sind im Raume zwei feste Dreiecke *ABC* und *abc* gegeben. Die Punkte *D* und *d* entsprechen sich, wenn $DA = da$, $DB = db$, $DC = dc$ ist. Während nun in den Arbeiten von Jacobi und Herrn Hermes diese Verwandtschaft vorzugsweise benutzt wird, um gewisse Eigenschaften der confocalen Flächen zweiten Grades zu untersuchen, geht Herr Darboux auch auf eine allgemeinere Untersuchung der Verwandtschaft ein, und findet unter anderem, dass dem unendlich entfernten Kugelkreise in dem einen System der unendlich entfernte Kugelkreis in dem andern doppelt entspricht. Hiermit hängt zusammen, dass in der Definition der Verwandtschaft die sechs Distanzen *DA, DB, DC, da, db, dc*

setzt werden können, durch die Tangenten an sechs Kugeln mit n Centren *ABC*, deren Radien auf unendlich viele Weise bemmt werden können.

Um den analytischen Character der Jacobi'schen Verwandtnaft zu untersuchen, betrachtet der Verfasser die folgenderassen definirte zwei- und zweideutige Verwandtschaft. Seien $X_2 X_3 X_4$ und $x_1 x_2 x_3 x_4$ die homogenen Coordinaten zweier unkte, so soll sein:

$$\varrho X_i = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + a_{i,4}x_4 + b_i\sqrt{\Omega} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

Ω eine homogene Function zweiten Grades der x bedeutet, d die a und b Constante sind. Diese Verwandtschaft kann i passender Wahl der Fundamentaltetraeder in bedeutend eincherer Weise analytisch ausgedrückt werden, nämlich durch die eichungen:

$$\varrho x_1 = X_1, \; \varrho x_2 = X_2, \; \varrho x_3 = X_3, \; \varrho x_4 = \sqrt{x_4^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

iese Gleichungen aber definiren, wenn man sie auf rechtwinklige oordinaten anwendet, die Jacobi'sche Verwandtschaft, so dass e allgemeinere Verwandtschaft durch projectivische Relation uf die Jacobi'sche reducirt werden kann.

Eine andere Verwandtschaft allgemeineren Characters, welche r Verfasser in Zusammenhang mit der Jacobi'schen bringt, ist lgende: Seien R, R', R'', R''' und r, r', r'', r''' die Distanzen r Punkte M und m von je vier festen Punkten, oder allgemeiner Tangenten von M und m an je vier feste Kugeln, dann ll sein

$$\frac{r^2}{aR^2} = \frac{r'^2}{a'R'^2} = \frac{r''^2}{a''R''^2} = \frac{r'''^2}{a'''R'''^2}.$$

ese ebenfalls zwei- und zweideutige Verwandtschaft, welche wichtige Eigenschaft besitzt, dass, wenn man M durch recioke Radien (Inversion) in M_1 transformirt, die Verwandtschaft ischen M_1 und m denselben Character hat, wie die zwischen und m, ist scheinbar anderer Natur als die Jacobi'sche. Man nn aber zeigen, dass sie in gewissen singulären Fällen durch version einerseits von M und andererseits von m in eine der cobi'schen ähnliche, aber etwas allgemeinere Verwandtschaft

übergeführt wird, in welcher nur statt der Gleichheiten $MA = ma$, $MA' = ma'$ etc. die Relation

$$\frac{r^2}{aR^2} = \frac{r'^2}{a'R'^2} = \frac{r''^2}{a''R''^2} = 1$$

auftritt.

Die Jacobi'sche Verwandtschaft erscheint hierdurch als ein ziemlich specieller Fall einer allgemeinen Verwandtschaft von sehr einfacher Gesetzmässigkeit und grosser Transformations-fähigkeit.

Was nun die grosse Zahl von speciellen Resultaten betrifft, so enthält die Arbeit abgesehen von einigen Eigenschaften con-focaler Flächen zweiten Grades, welche sich in den früheren Arbeiten nicht finden, die analogen Eigenschaften der Cycliden, d. h. derjenigen Flächen vierten Grades, welche den unendlich entfernten Kugelkreis als Doppellinie enthalten und welche durch die besprochenen Verwandtschaften als die den Kugeln ent-sprechenden Gebilde auftreten. Diese Eigenschaften können hier nicht einzeln aufgezählt werden.

Erwähnt sei noch ein, auch abgesehen von dem speciellen Gebiet der Arbeit interessanter Hülfssatz, der in der Einleitung u. A. entwickelt ist:

Wenn zwei Flächen zweiten Grades A und A' so beschaffen sind, dass sich irgend zwei ihnen bezüglich confocale Flächen längs eines Kegelschnittes berühren, so berührt jede zu A con-focale Fläche M eine zu A' confocale Fläche M' längs eines Kegelschnittes, und der gemeinsame Pol der Berührungsebenen oder der Scheitel des gemeinsamen Berührungskegels P ist für alle Flächenpaare identisch. Wenn man ferner irgend eine zu A confocale Fläche N und irgend eine zu A' confocale Fläche N' auswählt, und die diesen beiden umschriebene abwickelbare Fläche bestimmt, so ist diese stets auch einer Kugel umschrieben, deren Mittelpunkt der erwähnte feste Punkt P ist.

A.

R. Heger. Bemerkung über zwei-zweideutige Verwandt-schaft. Schlömilch Z. XVII. 71-78.

Besondere Betrachtung derjenigen zwei- zweideutigen Beziehungen zweier Mannigfaltigkeiten erster Stufe auf einander, bei der die Elemente des einen Gebildes so zu Paaren zusammengehören, dass ihnen dasselbe Elementenpaar des anderen Gebildes entspricht. Kln.

TOGNOLI. Sulla corrispondenza multipla fra due spazii a tre dimensioni. Battaglini G. X. 1-16, 141-147.

Im dritten Bande von Clebsch Annalen (p. 11—33, siehe F. M. II. p. 375) hat Wiener ein mehrdeutiges Entsprechen zweier Ebenen in der Weise untersucht, dass er zwei Curvenbüschel der einen Ebene zwei Curvenbüscheln der anderen entsprechend setzte, resp. die Schnittpunktssysteme der beiden Büschel der einen Ebene auf die Schnittpunktssysteme der Büschel der anderen Ebene bezog. In dem vorliegenden Aufsatze dehnt Tognoli in genauem Anschlusse an Wiener die bez. Betrachtungen auf drei Dimensionen aus, indem er in zwei Räumen bez. drei Flächenbüschel einander entsprechend setzt. Dabei betrachtet er insbesondere den Fall, dass eines der Büschel beiderseits aus Ebenen besteht. So hübsch dieser allgemeine Gedankengang der Arbeit ist, so mangelhaft scheint die Ausführung, denn es findet sich z. B. auf p. 3 eine Tabelle mitgetheilt, und auf p. 144 eine Transformation aufgestellt (No. 2), deren Unrichtigkeit die einfachste geometrische Betrachtung lehrt. Kln.

M. NÖTHER. Sulle curve multiple di superficie algebriche. Brioschi Ann. (2) V. 163-176.

Siehe Abschnitt IX. Cap. 3. B. p. 380.

L. CREMONA. Rappresentazione piana di alcune superficie algebriche dotata di curve cuspidali. Mem. di Bologna (3) II. 117-128.

In seiner „Teoria delle trasformazioni razionali dello spazio a tre dimensioni“ (Gött. Nachr. 1871. siehe F. d. M. III. p. 426), deren Publication auch im fünften Bande der Annalen begonnen

hat, gab der Verfasser eine Methode zur Abbildung von Oberflächen mit cuspidalen und Rückkehr-Linien auf einer Ebene. Da aber bisher weder der Verfasser noch ein Anderer ein Beispiel zu einer wirklichen Abbildung gegeben hat, so will er in der vorliegenden Arbeit diese Lücke ausfüllen, indem er 2 solcher Beispiele behandelt. Er giebt erstens die ebene Abbildung einer gewissen Oberfläche fünfter Ordnung mit einer Doppelgeraden, 2 einfachen Geraden und einer cuspidalen Curve, die eine specielle Raumcurve vierter Ordnung ist. Diese Oberfläche erhält der Verfasser mittelst einer Transformation dritter Ordnung aus einer gewissen Oberfläche zweiten Grades. Zweitens die einer gewissen Oberfläche vierter Ordnung mit einem cuspidalen Kegelschnitt, welche er mittelst einer Transformation zweiten Grades aus einer speciellen Fläche dritten Grades erhält.

Jg. (O.)

S. Roberts. On Professor Cremona's transformation between two planes and tables relating thereto. Proc. of L. M. S. IV. 121-139.

Weitere Entwickelung der Theorie, die in Cremona's Abhandlungen und in Cayley's Arbeit: „On the rational transformation between two spaces" (Pr. of L. M. S. III. 127, siehe F. d. M. III. 426-430) enthalten ist. Tafeln für die Fälle $n = 7$, 8, 9, 10, $3p+1$, $3p+2$, $4p$, $4p+1$, $4p+2$, $4p+3$.

Cly. (O.)

H. G. Zeuthen. Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un. Clebsch Ann. IV. 1871. 21-49.

Siehe F. d. M. III. p. 295.

B. Igel. Ueber Abbildung eines Kreisbogenzweiecks. Schlömilch Z. XVII. 251-255.

Nachdem die durch Gleichung $u+vi = \mathrm{tg}\,(p+qi)$ bestimmte Abbildung discutirt ist, wird gezeigt, dass das Innere (w) eines

eisbogenzweiecks auf das Innere eines Kreises z abgebildet rd durch die Gleichung:

$$w = \operatorname{tg}\left(\frac{p_0+p_1}{2} + 2\,\frac{p_0-p_1}{\pi}\operatorname{arctg} z\right).$$

Die imaginäre y-Axe verbindet die Ecken des Zweiecks und rd von der x-Axe halbirt, die Hälfte der zwischen den Ecken legenen y-Axe ist als Einheit angesehen, die Treffpunkte der gen auf der x-Axe sind vom Coordinatenanfang um $\operatorname{tg} p_0$ und p_1 entfernt ($\operatorname{tg} p_1 < \operatorname{tg} p_0$), die Winkel p_1 und p_0 zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gewählt. Für $p_1 = 0$ erhält man die Abbilng eines Segmentes, für $p_1 = -\frac{1}{2}\pi$ bildet Function w eine lbebene, der ein Kreissegment angefügt ist, auf den Kreis ab; $p_1 = -\frac{\pi}{2}$, $p_0 = 0$, so wird die einfache Halbebene auf den eis abgebildet, und es wird $w = \frac{z-1}{z+1}$, wie schon Schwarz orchardt J. LXX. 112, siehe F. d. M. II. p. 626) angegeben hat.

K.

Igel. Zur Theorie der quadratischen Transformationen. Schlömilch Z. XVII. 516-518.

Denkt man zwei aufeinanderliegende Ebenen x und y so einander bezogen, dass zwischen den homogenen Coordinaten $x_2\, x_3$, $y_1\, y_2\, y_3$ zweier Punkte folgende Gleichungen bestehen:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=3}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=3} a_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa\, y_\lambda = 0, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=3}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=3} b_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa\, y_\lambda = 0,$$

sind alle Punkte des einen Blattes eindeutig auf die des ern bezogen. Verlangt man nun, es solle dem Punkt x des :en Blattes der Punkt y des zweiten entsprechen, während leich dem Punkt y des ersten Blattes der Punkt x des zweiten spricht, so müssen entweder, wie schon früher bekannt, gende Bedingungen erfüllt sein:

$$a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}, \quad b_{\varkappa\lambda} = b_{\lambda\varkappa},$$

r — und dieser Fall ist noch nicht erörtert worden:

$$a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}, \quad b_{\varkappa\lambda} = -b_{\lambda\varkappa}.$$

In diesem Falle nehmen die obigen Gleichungen die Form:

$$0 = a_{11}\, x_1\, y_1 + a_{22}\, x_2\, y_2 + a_{33}\, x_3\, y_3 + a_{12}\,(x_1\, y_2 + x_2 y_1) + a_{23}\,(x_2\, y_3 + x_3 y_2) + a_{13}\,(x_1\, y_3 + x_3 y_1)$$

an.

Setzt man

$$a_{11}\; x_1^2 + 2a_{22}\, x_1\, x_2 + \cdots = fx,$$

so lässt sich diese Gleichung auch schreiben:

$$y_1 \frac{\partial fx}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial fx}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial fx}{\partial x_3} = 0,$$

während die zweite Gleichung die Form erhält:

$$\alpha_1\,(x_2 y_3 - x_3 y_2) + \alpha_2\,(x_3 y_1 - x_1\, y_3) + \alpha_3\,(x_1\, y_2 - x_2 y_1) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich für den betrachtet Fall der quadratischen Transformation folgende Eigenschaft 1) Die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte x und geht immer durch einen festen Punkt $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$. 2) Jeder Gerad des einen Blattes (y) entspricht ein Kegelschnitt im andern (: alle Kegelschnitte haben, wie in dem gewöhnlich behandelt Falle, drei Punkte α, β, γ, gemein; während aber sonst jed Ecke des Dreiecks die Gegenseite entspricht, so entspricht hi zwar einem Punkt α die Gegenseite $\beta\gamma$, aber dem Punkt β en spricht $\alpha\beta$; $\gamma + \alpha\gamma$. Endlich haben in diesem Falle alle Punkt des Kegelschnittes $fx = 0$ die Eigenschaft, sich selbst zu ent sprechen, während es im Allgemeinen nur 4 solcher Punkt giebt.

K.

H. Durège. Ueber Curven dritter Ordnung und ihr Abbildung auf einem Kreise. Schlömilch Z. XVII. 433-44

Clebsch hat nachgewiesen (Borchardt J. LXIV p. 94), dass si die Coordinaten einer ebenen Curve 3ter Ordnung durch elliptisch Functionen eines Argumentes ausdrücken lassen und dass f drei Curvenpunkte in einer Geraden die Summe der zugehörig Argumente verschwindet. Dasselbe Resultat entwickelt H Durège, indem er von der Erzeugung der Curven 3ter Ordnu durch zwei projectivische Strahleninvolutionen o und o' ausge von der besonderen Lage, dass in oo' zwei, entsprechend

rahlenpaaren zugehörige Strahlen vereinigt sind (cf. Clebsch
n. V. 83. s. Abschn. VIII. Cap. 5 p. 283). Für den Fall, in
elchem ein Scheitel o in einen Wendepunkt w verlegt wird, der
dere o' Berührungspunkt m einer von w aus gezogenen Tangente
t, während die Strahlenpaare der Involution nach den conju-
rten Polepaaren desjenigen Systems gerichtet sind, welchem w
d m als conjugirte Pole angehören, bilden mw und die har-
onische Polare W von w die Doppelstrahlen der Involution m.
ezeichnet J die Wendetangente des Punktes w, W die harmo-
sche Polare, $T_1 T_2 T_3$ die von w gezogenen Tangenten, und nimmt
an $T = x_1 = 0$, $J = x_2 = 0$, $W = x_3 = 0$ zu Seiten des Fun-
amentaldreiecks, so erhält die Gleichung der Curve die Form:

$$(1) \qquad x_2 x_3^2 = \gamma^2 x_1 (\alpha^2 x_1 + x_2)(\beta^2 x_1 + x_2);$$

$^2 x_1 + x_2 = 0$ und $\beta^2 x_1 + x_2 = 0$ bedeuten die Tangenten T_2 und
$_3$. Die Schnittpunkte einer Geraden $x_2 = \mu x_1$ erhält man als-
ann aus der Gleichung:

$$\mu x_1 x_3^2 = \gamma^2 (\alpha^2 + \mu)(\beta^2 + \mu) x_1^3.$$

etzt man nun

$$(2) \qquad \frac{\gamma^2 (\alpha^2 + \mu)(\beta^2 + \mu)}{\mu} = \lambda^2,$$

findet sich, dass ein beliebiger Curvenpunkt $x_1 x_2 x_3$ mit Hilfe
s Parameters μ ausgedrückt werden kann; man hat:

$$(3) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \mu : \lambda.$$

tzt man $\frac{\beta}{\alpha} = k$ (Modul); $\mu = -\beta^2 \sin^2 am u$, so ergiebt sich:

$$) \quad x_1 : x_2 : x_3 = \sin am u : -\beta^2 \sin am^3 u : \sqrt{-1}\, \gamma \cdot \alpha \cos am u \cdot \Delta am u.$$

ie Bedingung, dass drei Curvenpunkte u, u', u'' in einer Geraden
gen, fordert das Verschwinden der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \sin am u, & \sin^3 am u, & \cos am u \cdot \Delta am u \\ \sin am u', & \sin^3 am u', & \cos am u' \cdot \Delta am u' \\ \sin am u'', & \sin^3 am u'', & \cos am u'' \cdot \Delta am u'' \end{vmatrix}.$$

ach einigen Umformungen ergiebt sich, dass der Werth dieser
eterminante Null wird, wenn $u + u' + u'' = 0$ oder $=$ einem
ielfachen von $4K$ ist.

Es ist zu bemerken, dass reellen Argumenten u nicht auch

reelle Werthe von μ und damit reelle Punkte der Curve sprechen. Um Gleichung (4) so zu gestalten, dass dies gesc theilt der Verfasser alle Curven 3ter Ordnung in zwei Hau tungen: 1) in solche, die aus zwei getrennten Theilen best welche auch nicht im Unendlichen zusammenhängen (der ' der sich der reellen Asymptote mit zwei in's Unendliche g den Aesten anschliesst, heisse U, der andere S); 2) in s welche aus dem Theile U bestehen, während S imaginär g den ist. Die Curven mit isolirtem Doppelpunkt bilden den U gang. Nun werden die Punkte w und m auf U gewählt, liegen die Berührungspunkte der beiden anderen von w gehenden Tangenten (T_2 und T_3) auf S oder sind in Fall 2) ginär; d. h. α und β sind entweder reell oder imaginär. Als setzt man:

$$(5) \qquad \mu = \alpha\cdot\beta\cdot \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\varphi, \quad \lambda = \gamma \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2\cos^2\varphi}}{\sin\varphi}$$

Durchläuft Bogen φ alle Werthe von 0 bis 2π, so durchläuft entsprechende Curvenpunkt den ganzen Theil U und nur die jedem Punkt dieses Curventheiles entspricht ein Werth von φ umgekehrt, so dass die Curve U durch Gleichung (5) eind auf die Peripherie eines Kreises abgebildet wird.

Für Curve (1) setzt man in (5)

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = k, \quad \varphi = am\left(k'u\frac{ik}{k'}\right);$$

dann findet sich:

$$(6) \qquad \mu = \alpha\cdot\beta\frac{\Delta am u - \cos am u}{\Delta am u + \cos am u}, \quad \lambda = \frac{\gamma(\alpha+\beta)}{\sin am u} \quad (\text{mod.} =$$

Für die Curven (2) setzt man:

$$k = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)}}, \quad \varphi = am(u, k)$$

und erhält:

$$(7) \qquad \mu = \alpha\cdot\beta\frac{1-\cos am u}{1+\cos am u}, \quad \lambda = \gamma\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)}\frac{\Delta am u}{\sin am u}.$$

Die Gleichungen (6) und (7) geben die gewünschte Darstell und auch für diese gilt der oben erwähnte Satz über die Su

ɔr Argumente von drei Punkten in einer Geraden. Besonderes ıteresse verdienen diese Umformungen, weil sie lehren, dass die ɔn Herrn Durège für Curven mit isolirtem Doppelpunkt (Clebsch nn. I. 520, Ueber fortgesetztes Tangentenziehen etc. siehe F. d. . II. p. 507) entwickelten Sätze auch für die Curvengattung (2) ıd für Theil U der Gattung (1) giltig bleiben. K.

. Saltel. Sur l'application de la transformation arguésienne à la génération des courbes et des surfaces géométriques. Mém. de Belg. XXII. 1-53

. Gilbert. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XXXII. 334-353, XXXIII. 374.

. Saltel. Sur quelques questions de géométrie. Bull. de Belg. (2) XXXIV. 51-52.

Die von Herrn Saltel aufgestellte Argues'sche Transformation ɪo genannt nach Desargues) ist eine sehr einfache eindeutige ıd umkehrbare Transformation, die folgendermassen definirt ird. Es sei K eine Curve m^{ter} Ordnung, P ein Punkt ihrer ɔene, Pol der Transformation genannt, S und T zwei Kegelhnitte, Fundamentalkegelschnitte genannt (coniques de référıce), die sich in vier Punkten schneiden R_1, R_2, R_3, R_4. Durch n Punkt P wird eine Secante gezogen, die K im Punkte M d die Kegelschnitte in den Punkten s, s', t, t' schneiden möge. r geometrische Ort des Punktes M', der in der durch die vier ɪnkte s, s', t, t' definirten Involution zu M homolog ist, ist die gues'sche Transformirte (arguésienne) von K. Die genannte ansformation geht in die Transformation durch reciproke radii ctores über, wenn S und T Kreise sind, in die Transformation eiter Ordnung (transf. quadrique) von Hirst, wenn S und T sammenfallen.

Wie man sieht, ist nach dem Satze von Desargues über Inɪlution für den Punkt P die Argues'sche Transformirte der egelschnitt C, der durch $PR_1 R_2 R_3 R_4$ geht; für R_1 ist es die erade PR_1, für R_2 PR_2, für R_3 PR_3, für R_4 PR_4. Die Punkte

P, R_1, R_2, R_3, R_4 sind die Argues'schen correspondirenden derjenigen Punkte, in denen C, PR_1, PR_2, PR_3, PR_4 die Curve K schneiden.

Die Argues'sche Transformirte D' einer Geraden D ist eine Curve dritter Ordnung. Denn D trifft C in zwei Punkten, und daher ist P ein Doppelpunkt von D', und eine durch P gelegte Secante trifft D' ausser in P nur noch in einem Punkte. Da die Gerade D jede der Geraden PR in einem Punkte trifft, so sind R_1, R_2, R_3, R_4 einfache Punkte von D'. In mehreren Fällen zerfällt D' in einen Kegelschnitt und eine Gerade: 1) Wenn D durch R_1 geht, zerfällt D' in die Gerade PR_1 und einen durch P, R_2, R_3, R_4 gehenden Kegelschnitt, und analog für R_2, R_3, R_4. 2) Geht D durch P, so besteht die Transformirte aus D selbst und C. 3) Liegt P auf $R_1 R_2$, so zerfällt D' in die Gerade $PR_1 R_2$ und einen durch R_3, R_4 und P gehenden Kegelschnitt.

Geht eine Curve K vom Grade m durch die Punkte P, R_1, R_2, R_3, R_4 resp. p, r_1, r_2, r_3, r_4 mal, so zerfällt ihre Transformirte in p mal den Kegelschnitt C, r_1 mal die Geraden PR_1, r_2 mal PR_2, r_3 mal PR_3, r_4 mal PR_4 und eine Curve K'. Schneidet man diese Transformirte durch eine Gerade D, so schneidet die Transformirte D' von D die Curve K in $3m$ Punkten. Somit schneidet auch D die Transformirte von K in $3m$ Punkten, von denen $2p$ auf den p Kegelschnitten C, $r_1+r_2+r_3+r_4$ auf den $r_1+r_2+r_3+r_4$ Geraden PR_1, PR_2, PR_3, PR_4, $m'=3m-(r_1+r_2+r_3+r_4+2p)$ auf K', der eigentlichen Argues'schen Transformirten von K, liegen. Die Gerade PR_1 trifft K in m Punkten. Demnach ist R_1 ein $m$facher Punkt der Transformirten; er liegt nämlich r_1 mal auf den r_1 Geraden PR_1, p mal auf den p Kegelschnitten $C, r'_1 = m-(r_1+p)$ mal auf K'. Der Kegelschnitt C trifft K in $2m$ Punkten. Daher ist P ein $2m$ facher Punkt der Transformirten; er liegt resp. r_1, r_2, r_3, r_4 mal auf PR_1, PR_2, PR_3, PR_4, p mal auf den p Kegelschnitten C, $p' = 2m-(r_1+r_2+r_3+r_4)$ mal auf K'. K' ist somit vom Grade m', und die Punkte P, R_1, R_2, R_3, R_4 sind resp. $p', r'_1, r'_2, r'_3, r'_4$ fache Punkte dieser Curve. Ferner ist fast evident, dass jedem vielfachen Punkte von K ein Punkt gleich hoher Ordnung von K' entspricht. — Dies ist das

ite Fundamental-Theorem von Herrn Saltel. Dasselbe geht in
ı anderes, einfacheres über, wenn P auf einer gemeinsamen
cante der beiden Fundamentalkegelschnitte liegt. Die Trans-
mation ist eine reciproke, d. h. man kann überall die accen-
rten Buchstaben mit den nicht accentuirten vertauschen.

Haben zwei Curven n gemeinsame Punkte, so findet dasselbe
t ihren Transformirten statt. Demnach hat man ein Mittel,
: Tangente, den Osculationskreis, die osculirende Parabel, den
ulirenden Kegelschnitt in einem Punkte einer Curve zu con-
uiren, wenn man diese Linien in dem correspondirenden
nkte der Transformirten construiren kann. Soll man z. B. die
ngente in M' an K' construiren, so construire man einen
gelschnitt, der K in M berührt und durch P, R_1, R_2 geht. Seine
insformirte ist ein Kegelschnitt, der K' in M' berührt und
rch P, R_3, R_4 geht. An diesen hat man nur in M' eine Tan-
ite zu ziehen. — Mittelst der Argues'schen Transformation
in man aus der Construction einer Curve von gegebener Art
Construction von unzählig vielen successiven Transformirten
selben Art ableiten; z. B. die Curve sechster Ordnung, welche
P einen vierfachen Punkt, in R_1, R_2, R_3, R_4 Doppelpunkte
, transformirt sich in einen Kegelschnitt, wenn man P zum
einer Argues'schen Transformation nimmt und die Funda-
ntalkegelschnitte durch R_1, R_2, R_3, R_4 gehen lässt. Die Con-
iction einer solchen Curve ist daher auf die eines Kegelschnitts
ückgeführt, und es brauchen von der Curve nur 5 Punkte
eben zu sein, die nicht mit P, R_1, R_2, R_3, R_4 zusammenfallen.

Das Princip der Dualität findet auf alle Sätze von Saltel
ne Anwendung. Er zeigt ausserdem noch kurz die Ausdeh-
ig der Argues'schen Transformation auf Oberflächen. Er hat
h eine andere eindeutige Transformation gefunden, die ihm
iubt, mit Hülfe der Desargues'schen Involution ebene Curven,
imcurven und Flächen zu untersuchen. Von den gefundenen
ultaten möge noch das eine hier Platz finden: Die Transfor-
ionen einer Geraden, welche Cremona auf homographische
nsformationen einer andern Geraden und auf Transformation
ch reciproke radii vectores zurückführt, können ersetzt werden

durch eine Reihe von Argues'schen Transformationen, die an einer dritten Geraden vorgenommen werden. Mn. (Wn.)

H. J. STEPHEN SMITH. On the circular transformation of Möbius. Rep. of Brit. Ass. 1872.

Cly.

G. FRATTINI. Sulle coordinate curvilinee. Battaglini G. X. 235.

Es werden einige Sätze ohne Beweis angeführt, welche sich auf die (durch Parallelen zu den Normalen bewirkte) Abbildung einer beliebigen Fläche auf der Kugel beziehen; der Inhalt ist dem Referenten wegen mangelnder Erläuterung einiger Zeichen unverständlich geblieben. K.

J. C. MAXWELL. On the conditions that in the transformation of any figure by curvilinear coordinates in three dimensions every angle in the new figure shall be equal to the corresponding angle in the original figure. Proc. of L. M. S. IV. 117-119.

Beweis des bekannten Satzes, dass die einzige Transformationsmethode einer Figur in drei Dimensionen, bei welcher die Winkel unverändert bleiben, die Methode der Inversion oder der reciproken Radiusvectors ist. Der Verfasser bezieht sich auf die Arbeit von Herrn Haton de la Goupillière im Journ. d. l'Éc. Pol. Cahier XXV. Cly. (O.)

W. K. CLIFFORD. Geometry on an ellipsoid. Proc. of L. M. S. IV. 215-218.

Die Darstellung des Ellipsoides in der Ebene hängt ab von vier concyklischen Punkten $O_1 O_2 O_3 O_4$, entsprechend dem Schnitt der Oberfläche durch den Kreis im Unendlichen, welche die „absoluten“ genannt werden, und von zwei anderen Punkten i, j in der Ebene. Die ebenen Schnitte des Ellipsoides werden darge-

ellt durch die Kegelschnitte, durch die Punkte i, j, die Krümmungscurven durch confocale anallagmatische Linien, die als Foci ewisse Punkte u haben, welche die Gegenpunkte der Punkte 0 nd. Cly. (O.)

ι. Cayley. On the representation of a spherical or other surface on a plane. Messenger (2) II. 36-37.

Kurzer Versuch der Chartographie, geschrieben als ein Spemen, dessen es bei „Smith's prize Examination" zu Cambridge edurfte. Glr. (O.)

). Hentschel. Ueber einige conforme Abbildungen. Schlömilch Z. XVII. 39-66.

Die Aufgabe, das Innere eines einfach zusammenhängenden lächenstückes w auf den Einheitskreis Z conform abzubilden, ird (cf. Riemann Doctor-Dissert. § 21) auf die Lösung der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$ (1) hinausgeführt. Ist Vi der U gehörige imaginäre Theil und setzt man die complexe unction $U+Vi=W$, so kann die Abbildung der $x+yi$ (w)-bene auf die Z-Ebene wegen der Einfachheit der Grenzbengungen vortheilhaft vermittelt werden durch die Gleichung $= (w-w_0)e^{-W}$. Dabei bezeichnet w_0 den Punkt, der dem Mittelnkt $Z=0$ des Einheitskreises entspricht. Die Abhandlung stellt n die Form der Function W fest für den Fall, dass das Flächenlck w begrenzt wird: 1) von einem Kreise, 2) von einer Ellipse, von einem Rechteck, 4) von einer Lemniskate, 5) von drei eisen, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, während r eine die beiden anderen, congruenten rechtwinklig schneidet. allen Fällen wird Function W durch eine Reihe bestimmt, lche sich nachträglich summiren lässt. Für jede der genannten bildungen wird die Gleichung (1) in passender Weise transrmirt; für die Abbildung I setzt man $x=\varrho\cos\vartheta$, $y=\varrho\sin\vartheta$; durch verwandelt sich die Gleichung (1) in

$$\varrho \frac{\partial \varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho}}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = 0.$$

Diese hat das allgemeine Integral

$$U = \sum_0^\infty {}_n \{(A_n \varrho^n + B_n \varrho^{-n}) \cos n\vartheta + (C_n \varrho^n + D_n \varrho^{-n}) \sin n\vartheta\}.$$

Nennt man den Radius des abzubildenden Kreises ϱ_1, ist fer $w_0 = p$ (reell), und berücksichtigt man die Bedingung, dass für alle Werthe von $\varrho < \varrho_1 \gtreqless 0$ endlich bleiben soll, dass für $\varrho = \varrho_1 \quad U = \log \sqrt{\varrho_1^2 - 2p\varrho_1 \cos\vartheta + p^2} = \log \varrho_1 - \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n} \frac{p^n}{\varrho_1^n} \cos n$

so verwandelt sich obige Reihe für U in

$$\log \varrho_1 - \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n} \left(\frac{p \cdot \varrho}{\varrho_1^2}\right) \cos n\vartheta;$$

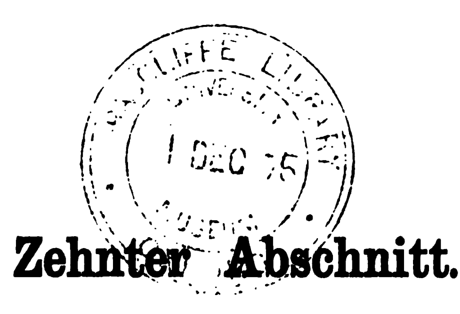
daraus findet sich

$$W = U + Vi = \log \frac{\varrho_1^2 - pw}{\varrho_1} \text{ und } Z = \varrho_1 \frac{w - p}{\varrho_1^2 - pw}.$$

In entsprechender Weise wird in Fall 2) bis 5) verfahren, Begrenzung bildet jedesmal ein Paar der krummlinigen Coo naten; in Fall 3) benutzt man als abbildende Function

$$Z = \operatorname{tang} \frac{w}{2} e^{-W},$$

weil sich $\log \operatorname{tang} \frac{w}{2}$ in passender Weise entwickeln lässt. N der Ermittelung der Form der abbildenden Functionen wird Entsprechen des Innern der auf einander abgebildeten Fig erörtert. Siehe auch F. d. M. II. 624—628, III. 423. K.



Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines. (Lehrbücher etc.)

Klein. Die Principien der Mechanik, historisch und kritisch dargestellt. Leipzig. Teubner.

Siehe Abschn. I. Cap. 2. p. 34.

Mathieu. Sur la publication d'un Cours de physique mathématique. Liouville J. (2) XVII. 418-421.

Anzeige eines grösseren Werkes, über welches im nächsten ...de zu berichten sein wird. Wn.

Grashof. Theoretische Maschinenlehre. Band I. Carlsruhe.

Das vorliegende Buch werden wir nach dem vollständigen ...scheinen des ersten Bandes besprechen. Ein kurzes Referat ...er die 1872 erschienene Lieferung, die mechanische Wärme- ...orie enthaltend, findet sich in Z. d. Ing. XVI. 534-535. Wn.

...bert Stawell Ball. Elementary lessons on applied mechanics. 12mo. (Cassell's Techn. Mans.) Cassell.

Ein gutes Buch über experimentelle Mechanik. Hi.

Wm. John M. Rankine. Manual of applied mechanics. 6th ed. post 8vo Griffin.

Hi.

K. von Ott. Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. 2. Aufl. Prag. Calve.

Die neue Auflage dieses Werkes (die erste ist im 2ten Bande d. F. d. M. p. 661 besprochen) ist einmal dadurch verbessert, dass die Figuren in den Text aufgenommen sind, andrerseits wesentlich gegen die frühere vermehrt, indem sie die Bestimmung der in Fachwerkträgern auftretenden Kräfte enthält. Neu hinzugefügt ist auch der dritte Theil, der die Elemente der Festigkeitslehre giebt. Theorien sind aber nur soweit berücksichtigt, als es mit elementarer Mathematik möglich war. O.

Capitel 2.

Kinematik.

S. H. Aronhold. Grundzüge der kinematischen Geometrie. Verh. d. Vereins z. Beförd. d. Gewerbfleisses in Pr. [illegible]

Der Verfasser versteht unter kinematischer Geometrie diejenige Disciplin, welche sich mit der Erzeugung geometrischer Gebilde durch wirkliche Bewegung beschäftigt und zwar unter der Voraussetzung, dass die bewegten Elemente, d. h. Punkte, Linien, Flächen u. s. w. starren Systemen oder Verbindungen von starren Systemen angehören.

Die Aufgabe des Verfassers ist folgende: Die Bewegung eines starren Systems sei dadurch definirt, dass eine nothwendige und hinreichende Anzahl beliebig gewählter Elemente desselben im absoluten Raume gegebene geometrische Gebilde beschreibt; es sollen die Gebilde bestimmt werden, welche von den übrigen Elementen des Systemes erzeugt werden. Er nennt das ganze

r aus dem stabilen Gleichgewicht herausge-
Drillung um eine harmonische Schraube, so
r immer um diese Schraube oscilliren.

Csy. (M.)

ometrical study of the kinematics,
ll oscillations of a rigid body.

die in der Royal Jrish Academy
Referat. Cly. (O.)

iovimento di un sistema
Nap. 1871.

n auf ein Fundamentalte-
'eichungen der Bewegung.
Augenblick die Geschwin-
nen Rotationen des Systems um die
uers und dadurch die Lage der Rotationsaxe,
entsprechenden Geschwindigkeiten der Rotation
des Systems schneidet. Jg. (O.)

Del moto geometrico di un solido che
ra un altro solido. Battaglini G. X. 103-115.

besteht in einer neuen Herleitung von Resultaten,
mson und Tait bei der Untersuchung der Bewe-
nander berührender Körper in ihrem Werke:
ural philosophy, Oxford 1867" gelangt sind. Es
die Relation

$$) \quad w_0^2+\left(w_1-\frac{1}{R_1}\right)\left(w_2-\frac{1}{R_2}\right)=0$$

omponenten der momentanen Rotationsgeschwin-
iogonalen Systems bestehend aus der Tangente
urve, der Flächennormale und der geodätischen
ezüglich auf die erste, w_2 auf die letzte, und

R. S. BALL. On the theory of screws, a geometrical study of the kinematics, equilibrium and small oscillations of a rigid body. Trans. of Dublin. 1872.

Eine Schraube (screw) entsteht dadurch, dass man mit einer geraden Linie im Raume eine lineare Grösse (pitch, Höhe oder Steigung) in Verbindung bringt; ein Körper erhält eine Drillung (twist), wenn er parallel zu einer Schraube verschoben wird und zu gleicher Zeit um die Schraube rotirt. Das Product aus der Steigung und dem Drillungswinkel ist gleich der Verschiebung. Eine längs der Schraube wirkende Kraft und ein zur Schraube senkrechtes Kräftepaar, dessen Moment gleich dem Product aus jener Kraft und der Steigung ist, geben eine Schraubendrehung (wrench). Eine jede Drillung (oder Schraubendrehung) längs einer gegebenen Schraube kann in 6 Drillungen (oder Schraubendrehungen) längs 6 gegebenen Schrauben zerlegt werden. Wenn ein Körper, der gerade frei ist, für eine Drillung um eine Schraube A, durch eine Schraubendrehung um die Schraube B in Gleichgewicht gehalten wird, so kann umgekehrt ein um B freier Körper durch eine Schraubendrehung um A nicht gestört werden; man nennt A und B reciproke Schrauben. Man kann eine Schraube so bestimmen, dass sie zu 5 gegebenen Schrauben reciprok ist. Nun giebt es eine Fläche, Cylindroid genannt:

$$z(x^2+y^2)-2mxy=0,$$

welche verschiedene mechanische Eigenschaften besitzt. Ist auf einem Cylindroid eine Schraube gegeben, so kann eine reciproke Schraube auf demselben Cylindroid gefunden werden. Es wird gezeigt, dass wenn ein Körper den höchsten Grad der möglichen Freiheit hat, er 6 Grade von Freiheit besitzt, und diese werden ganz allgemein durch Systeme von Schrauben und reciproken Schrauben entwickelt. Die vorliegende Arbeit, welche höchst wichtige Erweiterungen für die theoretische Mechanik giebt, enthält zahlreiche neue Theoreme, von denen wir als Beispiel nur die beiden folgenden anführen: 1) Sind X und Y ein Paar wirkender Schrauben, A und B die entsprechenden momentanen Schrauben, so ist, wenn A reciprok zu Y ist, B reciprok zu X.

Wird ein Körper aus dem stabilen Gleichgewicht herausge-
acht durch eine Drillung um eine harmonische Schraube, so
rd der Körper für immer um diese Schraube oscilliren.

Csy. (M.)

S. BALL. On geometrical study of the kinematics, equilibrium and small oscillations of a rigid body. Quart. J. XII. 41-47.

Auszug aus einer Arbeit, die in der Royal Jrish Academy
lesen ist. Siehe das obige Referat. Cly. (O.)

. BATTAGLINI. Nota sul movimento di un sistema di forma invariabile. Rend. di Nap. 1871.

Der Verfasser bezieht das System auf ein Fundamentalte-
aeder und untersucht die allgemeinen Gleichungen der Bewegung.
iese Gleichungen bestimmen für jeden Augenblick die Geschwin-
gkeiten der unendlich kleinen Rotationen des Systems um die
nten des Tetraeders und dadurch die Lage der Rotationsaxe,
sich mit den entsprechenden Geschwindigkeiten der Rotation
d Translation des Systems schneidet. Jg. (O.)

BELTRAMI. Del moto geometrico di un solido che ruzzola sopra un altro solido. Battaglini G. X. 103-115.

Die Arbeit besteht in einer neuen Herleitung von Resultaten,
welchen Thomson und Tait bei der Untersuchung der Bewe-
ng zweier einander berührender Körper in ihrem Werke:
reatise on natural philosophy, Oxford 1867" gelangt sind. Es
ndelt sich um die Relation

$$(9)\quad w_0^2+\left(w_1-\frac{1}{R_1}\right)\left(w_2-\frac{1}{R_2}\right)=0$$

ischen den Componenten der momentanen Rotationsgeschwin-
;keit des orthogonalen Systems bestehend aus der Tangente
r Berührungscurve, der Flächennormale und der geodätischen
rmale, w_0 bezüglich auf die erste, w_2 auf die letzte, und

zwischen den Hauptkrümmungsradien R_1, R_2. Der Aufsatz beginnt mit der Betrachtung einer beliebigen Curve, ausgehend auf die Bestimmung der momentanen Rotation eines orthogonalen Axensystems, welches mit dem begleitenden Axensystem, d. i. der Tangente, Hauptnormale und Binormale, die erste gemein hat, und um einen variablen Winkel ψ um dieselbe gedreht ist. Da dieses ψ einfach additiv oder subtractiv zum Torsionswinkel hinzutritt, so hätte das Resultat unmittelbar zutage gelegen, wenn der Verfasser nicht im Anschluss an die curventheoretischen Formeln von Serret (er führt als Autor dieser unzweckmässigen Anordnung Frenet an, ohne über Serret's Antheil an der Aufstellung zu entscheiden) den Torsionsradius statt des Torsionswinkels eingeführt hätte. Doch ist der gewonnene Ausdruck bedeutungs[illegible] für die weitere Untersuchung, wo nunmehr jede Curve als [illegible] Bahn des Berührungspunktes zweier auf einander folgen[illegible] (bezw. auch gleitender) Flächen oder Körper betrachtet wird. Die momentane Rotation des genannten Axensystems wird nicht aus ihm, sondern direct aus den Richtungscosinus der Axen na[illegible] bekannten Formeln berechnet. So ergiebt sich:

$$w_2 = e\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + 2f\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s} + g\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2,$$

$$Hw_0 = G_1\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - F_1\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s} + E_1\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2,$$

während der Ausdruck von w_1, Componente nach der Nor[illegible] weil er die zweiten Ableitungen von u und v enthält, ni[illegible] Anwendung kommt. Die Bedeutung der Coefficienten ist d[illegible] deutlich, dass w_2 die Krümmung des die Curve s berühre[illegible] Normalschnitts darstellt, und w_0 für Krümmungslinien s [illegible] schwindet, während u, v beliebige Flächenparameter bezeic[illegible] Als dritte Gleichung kommt der Ausdruck von ∂s^2 hinzu:

$$1 = E\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s} + G\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2.$$

Dann ergiebt sich durch Elimination von $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$ eine Relation zwischen w_0, w_2 und den Coefficienten. Beachtet man, d[illegible] identisch

$$(Ew_2 - e)(Gw_1 - g) - (Fw_1 - f)^2 + H^2 w_0^2 = 0$$

ird, wenn man den Ausdruck mittelst der dritten Gleichung omogen macht, so ergiebt sich daraus gemäss der bekannten Ferthe der Summe und des Products der Hauptkrümmungen die ormel (9). Weil diese nicht über das Vorzeichen von w_0 entheidet, so zieht der Verfasser ihre Zerlegung in

$$w_2 = \frac{\cos^2\vartheta}{R_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{R_2}; \quad w_0 = \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

or, und vereinigt beide Gleichungen wieder zu

$$\frac{\cos\vartheta\cos\Theta}{R_1} + \frac{\sin\vartheta\sin\Theta}{R_2} = w_2\cos(\vartheta - \Theta) - w_0\sin(\vartheta - \Theta),$$

o Θ willkürlich ist und sich zur Vermittelung der Beziehungen wischen den beiden einander berührenden Flächen verwenden isst, indem man die Θ für beide Flächen von den respectiven auptkrümmungstangenten bis zu einer beliebigen gemeinsamen 'angente, die ϑ gleichfalls von erstern bis zur Tangente der Rollbahn echnet. Folgende Resultate hebt der Verfasser hervor. Zwischen er momentanen Richtung der Rollbahn und der der momentanen otationsaxe findet Reciprocität statt. Die Paare (demgemäss) nematisch conjugirter Richtungen bilden eine quadratische Inlution. Es ist die unterscheidende Eigenschaft der Doppelradien r Involution, dass sie den Normalschnitten gleicher Krümmung f der einen und andern Fläche entsprechen. Es existirt ein, d im allgemeinen nur ein Paar von Richtungen, welche im igen cinematischen und zugleich im bekannten Dupin'schen ne conjugirt sind. Im erstern Sinne existirt immer ein orthonales Paar.

Zum Verständniss ist zu beachten, dass durch Druckversehen eselben Zeichen *E*, *F*, *G* zweierlei bedeuten. Ihre zweite Beutung haben sie zur Rechten der den Gl. (8) vorhergehenden leichungen, durch welche sie definirt sind, ferner in der ersten l. (8) und der dritten Gleichung des darauf folgenden Systems.

H.

L. Durrande. Propriétés générales du déplacement d'une figure de forme variable. C. R. LXXIV. 1243-1247.

Es wird angenommen, dass ein räumliches Gebilde, während es in eine Nachbarlage übergeht, so seine Gestalt ändert, dass die Projectionen der Geschwindigkeiten seiner Punkte lineare Functionen der Coordinaten dieser Punkte sind. Sind X, Y, Z diese Functionen, so erscheinen die Bedingungen in der Form $\frac{dx}{dt} = X$, $\frac{dy}{dt} = Y$, $\frac{dz}{dt} = Z$. Die Untersuchung der Veränderung eines solchen Gebildes schliesst als besonderen Fall die Verschiebung starrer Systeme in sich.

Bedeuten λ, μ, ν die Cosinus der Winkel, welche eine Richtung mit den Axen einschliesst, und bezeichnet v die Geschwindigkeit eines Punktes, welche mit jener Richtung einen Winkel φ bildet, so gelten die beiden Gleichungen

$$(1) \qquad v\cos\varphi = \lambda X + \mu Y + \nu Z,$$

$$(2) \qquad v\sin\varphi = \sqrt{(\mu Z - \nu Y)^2 + (\nu X - \lambda Z)^2 + (\lambda Y - \mu X)^2}.$$

Aus diesen erkennt man, dass die Ebene $\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$ diejenigen Punkte enthält, deren Geschwindigkeiten normal gegen die Richtung (λ, μ, ν) sind, und die Gerade $\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu} = \frac{Z}{\nu}$ diejenigen Punkte, deren Geschwindigkeiten parallel jener Richtung stattfinden. Jene Ebene nennt Herr Durrande die der Richtung (λ, μ, ν) conjugirte Ebene (plan conjugué), und die Gerade die der Richtung (λ, μ, ν) beigeordnete Gerade (droite adjointe). Indem er in demselben Sinne, wie es Chasles in seiner Theorie der Verrückung starrer Systeme gethan hat, für eine bewegte Ebene den Begriff Brennpunkt (foyer) und Characteristik (caractéristique) einführt, kann er folgende Theoreme aussprechen: „Die einer Richtung beigeordnete Gerade ist der Ort der Brennpunkte aller Ebenen, welche senkrecht zu dieser Richtung sind.“ „Die einer Richtung conjugirte Ebene ist der Ort der Characteristiken aller Ebenen, welche normal zu dieser Richtung stehen.“

Da, wie aus (1) und (2) folgt,

$$(3) \quad (\mu Z - \nu Y)^2 + (\nu X - \lambda Z)^2 + (\lambda Y - \mu X)^2 - \operatorname{tg}^2\varphi(\lambda X + \mu Y + \nu Z)^2 = 0,$$

so liegen die Punkte, deren Bewegungsrichtung gegen die Richtung (λ, μ, ν) dieselbe Neigung φ haben, auf einem Kegel zweiten

rades. Den verschiedenen Werthen φ entspricht eine Schaar
lcher Kegel; die Polaren, welche in Bezug auf diese Kegel-
haar der beigeordneten Geraden entsprechen, liegen in der con-
girten Ebene. Fasst man daher die Punkte einer Ebene in
rem Bewegungszustand auf, so liegen alle diejenigen Punkte,
ren Bewegungsrichtungen gegen die Normale der Ebene die-
lbe Neigung φ haben, auf einem Kegelschnitt; für alle Kegel-
hnitte, welche den verschiedenen Neigungen φ entsprechen, ist
r Brennpunkt der Ebene der Pol ihrer Characteristik. In dem
sonderen Fall, dass das bewegte System in sich starr ist, ist
r Brennpunkt und die Characteristik der Ebene der Brenn-
nkt und die Directrix aller Kegelschnitte, welche den verschie-
nen Neigungen φ entsprechen.

Die Ebenen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ schneiden sich im Allge-
einen in einem Punkt; dieser Punkt hat in der Zeit dt die Ge-
hwindigkeit Null und wird „Geschwindigkeitscentrum" (centre
vitesse) genannt. Durch ihn gehen alle conjugirten Ebenen und
e beigeordneten Geraden, welche Richtung (λ, μ, ν) man auch
zeichnen mag. Ist das bewegte System in sich starr, so liegt
s Geschwindigkeitscentrum im Unendlichen, und alle conjugirten
enen, sowie alle beigeordneten Geraden sind ein und derselben
htung parallel.

Zum Schluss noch die Bemerkung, dass, da die Functionen
Y, Z zwölf Parameter einschliessen, die Bewegung des Systems
stimmt ist, sobald die Geschwindigkeiten von vier Punkten in
sse und Richtung gegeben sind. Schn.

Durrande. De l'accélération dans le déplacement d'un système de points qui reste homographique à lui-même. C. R. LXXV. 1177-1180.

Fortsetzung der vorigen Arbeit, wie auch derjenigen, die in
nd III d. F. d. M. p. 440 besprochen ist. Der Verfasser leitet
erst einige Relationen zwischen den Grössen ε, α, β, γ etc.
I. 440) her, die in dem Satze gipfeln: Der Coefficient ε der
schwindigkeit der linearen Deformation verändert sich im um-

gekehrten Verhältniss, wie die Quadrate der Radii vectores ein Oberfläche zweiter Ordnung, (die der Verfasser „déformatric nennt). Sodann leitet er folgenden Satz her: „In der Verrücku eines Systemes von Punkten, deren Geschwindigkeiten line Functionen der Coordinaten sind, ist der Theil der Beschleu gung, welcher von den Parametern der Deformation abhängt, d Resultante aus 1) einer Beschleunigung normal zu einer Oberfläc zweiter Ordnung, homothetisch der zweiten Deformation und glei dem letzten Differentialparameter der ersten Ordnung dieser Obe fläche, 2) einer zusammengesetzten centrifugalen Beschleunigun perpendicular zum Radiusvector und auf einer Geraden, die ein Axe der Beschleunigung bezüglich dieser zweiten Componente ist.

O.

J. Somoff. Sur les vitesses virtuelles d'une figure invariable assujettie à des équations de condition quelconques de forme linéaire. Mél. math. et astr. IV.

Der Verfasser behandelt dieselbe Frage, die Herrn Mannheim in der Arbeit: „Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable" (Mém. prés. de Paris XX. s. F. d. M. II. 694) beschäftigt hatte. Nur sind die Bedingungen, denen die virtuellen Geschwindigkeiten unterworfen werden, allgemeiner als dort. Dieselbe Frage hat der Verfasser übrigens auch in seiner Kinematik (s. F. d. M. III. p. 434) berührt, nur ist er dort weniger in die Details eingegangen. Z. (O.)

Guiraudet. Mémoire sur le mouvement d'un point matériel sur une surface. Lille. Daniel. 8.

Der Verfasser betrachtet die Bewegung eines Punktes, der auf einer gegebenen Oberfläche zu bleiben gezwungen ist, indem er die beiden Systeme von Krümmungslinien auf der Oberfläche als Coordinaten benutzt. Siehe auch Darboux Bull. III. 195. O.

J. Carvallo. Note sur la détermination d'intégrales nouvelles. C. R. LXXIV. 173.

Discussion der Curve, welche ein beliebiger materieller Punkt schreibt, der gezwungen ist, auf der Oberfläche eines geraden eiskegels zu bleiben, und auf den sonst keine äusseren Kräfte rken. Ihre Projection auf die Horizontalebene ist eine aus 2 mmetrischen Zweigen bestehende geschlossene Curve, eine aus ehreren symmetrischen Zweigen bestehende sternförmige Curve er eine ungeschlossene sternförmige Curve, je nachdem die lbe Oeffnung des Kegels in einem ganzen, rationalen oder ationalen Verhältniss zu π steht. Bn.

Capitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

. Matzka. Das Projiciren der Kräfte, als Ersatz des Kräfteparallelogramms in der analytischen Statik. Grunert Arch. LIV. 1-70.

Dem Verfasser scheint die Darstellung von Kräften durch nen gleich gerichtete und proportionale Strecken, sowie die wendung des Parallelogramms der Kräfte und des Kräftepolyns nur für eine Darstellung der Mechanik angemessen, welche h der elementaren Algebra bedient; dagegen scheint ihm dieser rgang für die höhere analytische Statik weder vollkommen isch noch wissenschaftlich richtig zu sein. Er hat sich daher seinen Vorlesungen bemüht, die Darstellung der Kräfte durch ecken ganz zu vermeiden, und statt dessen nur die an und sich, nach Angriffspunkt, Richtung und Stärke, bestimmten äfte in Betracht gezogen. Dies Verfahren veröffentlicht er in r vorliegenden Arbeit. Referent bemerkt indess, dass er peralich sich vergeblich bemüht hat, die Gründe zu finden, wesslb jene Darstellung in einem Falle richtig, im anderen unrichtig , Gründe, die übrigens nicht angeführt werden. Auch scheint

die Aufgabe nicht gelöst zu sein, da der Verfasser in den einleitenden Sätzen trotzdem sich nur scheinbar von der Darstellung der Kräfte durch Strecken frei macht. Im ersten Abschnitt behandelt der Verfasser die Zusammensetzung zweier auf einen Punkt, unter einem Winkel wirkenden Kräfte. Das Resultat gipfelt in dem Satze: „Wenn zwei Paare unter gleichen Winkeln wirkender Componenten auch mit ihren Resultirenden stückweis gleiche Winkel bilden, so stehen die gleichgerichteten Kräfte in gleichem Verhältniss.“ Bei der Zusammensetzung zweier gegen einander senkrecht auf einen Punkt wirkenden Kräfte wird zuerst die Grösse, dann die Richtung der Resultirenden bestimmt. Es folgt dem die Zerlegung einer gegebenen Kraft in zwei winkelrechte, deren Componenten oder Projectionen in oder auf gewissen Axen liegen. § 4 enthält, in der allgemeinen Lehre von den Projectionen der an einem Punkte wirkenden Kräfte auf Axen und von der Bedingung ihres Gleichgewichtes, folgenden Hauptsatz: „Wenn auf einen Punkt beliebig viele Kräfte, wie immer gerichtet und stark einwirken, so ist die (algebraische) Projection ihrer Resultirenden auf irgend eine Richtung (Axe) gleich der Summe der (algebraischen) Projectionen sämmtlicher Kräfte (Componenten) auf dieselbe Axe.“ Daran schliesst sich die „rechnende“ Bestimmung der Stärke und Richtung der Resultirenden, sowie die Betrachtung des Falles, wo alle Kräfte mit ihren Projectionen in einer Ebene liegen. § 7—10: Virtuelle und Drehmomente. Im Weiteren werden dann die linearen Momente von Drehkräften besprochen. In § 18 wendet sich der Verfasser zur Betrachtung der Zusammensetzung zweier Kräfte, welche an zwei verschiedenen, aber unveränderlich mit einander verbundenen Punkten wirken. Von § 24 an folgt dann die Zusammensetzung beliebig vieler, an einem starren Systeme von Punkten in willkürlichen Richtungen wirkenden Kräfte. O.

F. Lucas. Théorèmes généraux sur l'équilibre et le mouvement des systèmes matériels. C. R. LXXIV. 1176 —1180.

c SAINT-VENANT. Rapport sur un mémoire de M. Félix Lucas, portant le titre: Théorèmes généraux sur l'équilibre et le mouvement des systèmes matériels. C. R. LXXV. 1463-1470.

Da die Arbeit nach dem Vorschlage der Berichterstatter demichst in extenso erscheinen wird, so verschiebt Referent die Berechung bis zum vollständigen Erscheinen derselben. O.

UET. Sur la force vive d'un système vibrant. C. R. LXXV. 1616-1619.

Der Verfasser erwähnt, dass er bereits im Jahre 1865 in ner Arbeit, die er der Akademie vorgelegt, folgenden Satz genden habe: „Les forces vives de tout système vibrant sont spectivement égales à la somme des forces vives de même démination qui correspondent aux divers mouvements simples, ns lesquels le mouvement produit peut se décomposer."

Er reproducirt in der Note den damals gefundenen Beweis s Satzes. O.

LUCAS. Observation relative à une note précédente de M. Quet. C. R. LXXV. 1698-1699.

Reclamation gegen die Prioritätsansprüche des Herrn Quet züglich des obigen Satzes, der sich in der oben erwähnten beit des Herrn Lucas findet. O.

c SAINT-VENANT. Partage de la force vive due à un mouvement vibratoire composé en celles qui seraient dues aux mouvements pendulaires simples et isochrones composants de diverses périodes et amplitudes. Partage du travail dû au même mouvement composé entre deux instants quelconques, en ceux qui seraient dus aux mouvements composants. C. R. LXXV. 1425-1432, 1567-1572.

Beweis der beiden im Titel angeführten Sätze, auf die der erfasser durch die obige Arbeit des Herrn Lucas gekommen

war. In derselben waren sie jedoch nicht allgemein bewi
diese Verallgemeinerung giebt nun der Verfasser. O

G. BATTAGLINI. Sulla composizione delle forze. Battaglini G. X. 133-140.

G. BATTAGLINI. Sulla teorica dei momenti. Battaglini 175-180.

G. BATTAGLINI. Sulle serie di sistemi di forze. Battaglini G. X. 180-187.

G. BATTAGLINI. Sul movimento geometrico infinite di un sistema rigidò. Battaglini G. X. 207-216.

G. BATTAGLINI. Sul movimento geometrico finito (sistema rigido. Battaglini G. X. 295-302.

Nachdem zunächst die nöthigen Formeln aus der ı Geometrie des Raumes von Plücker abgeleitet sind, setzt dei fasser das Hauptsächlichste über die darauf beruhende Zusam setzung der Kräfte, wie aus der Theorie der Momente auseina Die dritte Arbeit schliesst sich unmittelbar an die andere indem sie Systeme von Kräften in derselben Weise beha Es folgen dann Untersuchungen über die Bewegung eines st Systems, die sich denen anschliessen, die im zweiten B dieses Jahrbuches besprochen sind. [Siehe auch Abschn. X. C pag. 439.] O.

G. BATTAGLINI. Nota sulla teorica dei momenti d'ine Rend. di Nap. 1871.

In dieser Note werden die Trägheitsmomente eines Sys in Bezug auf einen Punkt, eine Ebene und eine Gerade betra wobei das System auf ein Fundamental-Tetraeder bezogen Der Verfasser bezeichnet die Systeme von Punkten, Ebenen Geraden, für welche die Trägheitsmomente gleich sind, und stimmt diejenigen, für welche sich ein Maximum oder Mini ergiebt. Jg. (O.)

. J. Routh. Elliptic coordinates applied to moments of inertia. Messenger (2) II. 1-4.

Es werden einige Sätze über Trägheitsmomente bewiesen; B. 1) dass das Trägheitsmoment in Bezug auf alle Tangential-enen zu irgend einer Fläche zweiten Grades, die confocal mit dem 'ehungsellipsoid, dasselbe ist, 2) dass die Trägheitsmomente in zug auf die Schnitte senkrechter Tangentialebenen zu denselben nfocalen dieselben sind. Glr. (O.)

Townsend. Solution of question 3281. Educ. Times XVI. 23-24.

Die drei Hauptaxen durch den Schwerpunkt irgend eines mogenen erfüllten Parallelepipedons haben dieselbe Richtung e die Hauptaxen des mit Massen homogen erfüllten Ellipsoides, lches die Seiten des Parallelepipedon in deren Schwerpunkten rührt. Für diese Hauptaxen, und folglich für jede Axe durch n gemeinschaftlichen Schwerpunkt verhält sich das Trägheits-ment des Parallelepipedons zu dem des Ellipsoids wie $10:\pi$.
Hi.

Townsend. Solution of question 3384. Educ. Times XVI. 76.

Die Volumina eines Tetraeders und des Ellipsoids, welches e Seiten des Tetraeders in den Schwerpunkten berührt, haben eselben Hauptaxen im gemeinschaftlichen Schwerpunkt, und die ägheitsmomente in Bezug auf alle Ebenen durch diesen Punkt ben dasselbe constante Verhältniss $18\sqrt{3}:\pi$. Hi.

. Townsend. Solution of question 3307. Educ. Times XVI. 33-34.

Legt man durch den Schwerpunkt eines Massensystems irgend ei recht- oder schiefwinklige Axen OX, OY, OZ, für welche $nyz = 0$, $\Sigma mzx = 0$, $\Sigma mxy = 0$, theilt man ferner die ganze sse M des Systems in irgend 4 Theile M_a, M_b, M_c, M_d und ncentrirt je die Hälfte von M_a in der Entfernung $\pm a$ von O

auf der Axe OX, für welche $M_a a^2 = \Sigma mx$, die Hälften von M_b und M_c in ähnlicher Weise an Entfernungen $\pm b$, $\pm c$ auf den Axen OY, OZ und M_d im Schwerpunkt O, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine Ebene, für das alte System dasselbe wie für das neue. Hi.

J. J. Walker. Solution of question 3628. Educ. Times XVII. 73.

Sind A, B, C, D die vier Werthe des Ausdrucks

$$\{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)\}^{\frac{1}{2}}$$

für die vier Dreiecke, welche auf der Oberfläche einer Kugel durch die Radien bestimmt werden, die irgend vier sich das Gleichgewicht haltenden Kräften im Raume P, Q, R, S parallel gezogen sind, so ist $P:Q:R:S = A:B:C:D$. Hi.

J. Ch. Walberer. Bemerkungen zur Theorie des Keiles. Blätter f. d. bayr. Gymnasialwesen. VIII. 231-238.

Der Verfasser glaubt, dass in der Theorie des Keiles ein Punkt noch unaufgeklärt sei. Wenn zwei gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte parallel mit der Grundfläche des Keiles angreifen, so hebt sich deren Wirkung, der Theorie gemäss, auf, während dies in Wirklichkeit nicht der Fall sein soll. Zuerst sucht der Verfasser die Willkürlichkeit zu beseitigen, welche man allenfalls in dem gewöhnlichen Verfahren der Zerlegung einer Kraft in Componenten finden könnte. Er betrachtet zu diesem Zwecke eine auf einer schiefen Ebene ruhende Kugel und ein in einer Flüssigkeit schwimmendes Prisma.

Hierauf kehrt der Verfasser zu seiner ursprünglichen Aufgabe zurück und führt den trigonometrischen Beweis für die einfache Thatsache, dass zwei in der angegebenen Weise wirkende Kräfte keine Bewegung hervorzubringen im Stande sind. Da er nun aber thatsächlich etwas Anderes beobachtet haben will, so sucht er hiefür eine Erklärung und findet dieselbe in Folgendem: „So oft in der Mechanik von Kräften die Rede ist, welche sich Gleichgewicht halten, wird selbstverständlich vorausgesetzt, dass jede

·aft ihre volle Wirkung zu äussern vermöge und nicht durch
ɜ Eigenthümlichkeit der Angriffspunkte ein Theil der Wirkung
rloren gehe. In unserm Falle beruht die Täuschung darin,
ss wir bis jetzt angenommen haben, die Kräfte P und Q
ingen in ihrer Richtung eine Wirkung gleich ihrer Intensität her-
r, während in Wirklichkeit die tangentiale Componente $P\sin\alpha$
sshalb wirkungslos verloren gehen muss, weil sie nur einen
minellen und keinen wirklichen Angriffspunkt hat." Es scheint
er ein entschiedenes Missverstehen der Wirkung einer Kraft
rzuliegen.

Es wird alsdann versucht, diese Theorie auch noch auf das
ispiel eines Keiles anzuwenden, welcher mit einer Seitenfläche
f einer horizontalen Ebene ruht, während auf die andern
ten, wie auch auf die Basisfläche zwei Kräfte P und Q
p. unter den Winkeln β und 90^0 einwirken. Ist der Winkel
der Spitze des Keiles $= 2\alpha$, so ist die richtige Gleichgewichts-
lingung

$$P\cos\alpha = Q\cos(\beta - 2\alpha).$$

telst seiner Methode, die in die Ebene selbst fallende Compo-
ıte als nicht existirend zu betrachten, findet der Verfasser die
ɜichung

$$P = 2Q\sin\alpha\sin\beta.$$

ɜs soll die allgemeine Bedingungsgleichung sein, während die
ɜe nur unter gewissen Umständen statt hätte; wie dies möglich
n soll, dürfte schwer abzusehen sein. Dagegen scheint Herr
alberer im Rechte zu sein, wenn er die von Weissbach ge-
bene Formel

$$P = \frac{2Q\sin\alpha}{\sin\beta}$$

rwirft, indem dieselbe für $\beta = 180^0$ ein unendlich grosses P
fern würde.

Noch seltsamer gestaltet sich die Sache, wenn auch die Rei-
ng mit berücksichtigt wird. Ist D der Normaldruck, f der
ibungscoefficient, so soll es unendlich viele Kräfte R geben,
lche Gleichgewicht erhalten können; dieselben sind durch die
gleichungen

$$2D(\sin\alpha + f\cos\alpha) > R > 2D(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

charakterisirt. Dass, wenn sich dies wirklich so verhielte, jed statische Problem aufhören würde, ein bestimmtes zu se leuchtet ein. Gr.

KÜLP. Die Bestimmung des Einflusses des Rades d Fallmaschine. Grunert Arch. LIV. 206-207.

Der Verfasser bestimmt X aus der Gleichung

$$\frac{w}{2Q+X+w} = \frac{\gamma}{g}$$

und theilt ein Beispiel mit. O.

K. W. ZENGER. Die Tangentialwage und ihre Anwendung zur Bestimmung der Dichte fester und flüssiger Körper mittelst einfacher Ablesung. Prag. Abh. (6) V.

Der Apparat hat den Zweck, die Dichte fester und flüssiger Körper in möglichst einfacher und bequemer Weise zu bestimmen, soll also die Aräometer ersetzen. Dies wird dadurch erstrebt, dass an dem einen Ende des Wagebalkens eingetheilte Kreisbogen angebracht sind, so dass die Bestimmung mittelst Ablesung des Ausschlagbogens erfolgen kann. Zu untersuchen, inwiefern dieser Zweck erreicht wird, gehört nicht hierher. In der vorliegenden Arbeit findet sich neben der Beschreibung des Apparats und der Methode die Theorie des Instrumentes entwickelt, und sind die mathematischen Formeln hergeleitet, die dazu dienen, aus dem abgelesenen Bogen die Dichte zu bestimmen. Mathematisch bietet diese Theorie nichts Besonderes. O.

DE PAMBOUR. Sur le frottement additionel dû à la charge des machines. C.R. LXXIV. 1459-1462.

Der Verfasser weicht in der Art, wie er die Reibung de Maschinen zu berechnen pflegt, von der gewöhnlich gebrauchte Methode ab. Er berechnet nämlich nicht die Reibung der Maschi mit der Belastung, sondern theilt die Reibung in zwei Thei

ndem er erstens die Reibung der Maschine ohne Belastung berechnet, die dann also für dieselbe Maschine als constant zu betrachten ist, und zweitens den Theil der Reibung, der durch die Belastung hinzukommt (frottement additionel), für sich berechnet. Dieser Theil ist natürlich mit der Last variabel. Auf diese Weise wird die Rechnung wesentlich vereinfacht. Es sind nämlich in der Gleichung

$$(1+f')(r\nu+f\mathfrak{v}) = N$$

sowohl N wie $(r\nu+f\mathfrak{v})$ bekannte Grössen, während $(1+f')$ die zu berechnende Grösse ist. In der vorliegenden Arbeit setzt er die Vortheile seiner Methode auseinander und zeigt an einer Reihe von Bestimmungen, die er an hydraulischen Rädern gemacht, die Sicherheit derselben. O.

DE PERRODIE. Stabilité d'un voûte. Ann. d. P. et d. Ch. (5) IV. 42-84.

L. DURAND-CLAYE. Étude comparative des tracées de routes. Ann. d. P. et d. Ch. (5) IV. 335-354.

FLAMANT. Sur la poussée des terres. Ann. d. P. et. d. Ch. (5) IV. 242-268.

Alle drei Arbeiten haben rein technische Bedeutung. Referent begnügt sich daher der Vollständigkeit wegen mit Anführung der Titel. Wn.

B. Hydrostatik.

A. STEEN. Laren om homogene tunge Vaskers. Tryk paa plane Arcaler. Skrift. v. Kopenh. (5) VII.

Der Verfasser giebt eine vollständige Entwickelung der Theorie des Drucks von Flüssigkeiten auf ebene Flächen. Er

beweist zuerst die folgenden beiden Sätze: „Der Gesammtdruck einer Flüssigkeit auf eine eingetauchte Fläche ist gleich dem Gewicht der in einem gewissen Cylinder enthaltenen Flüssigkeit. Der Cylinder liegt zwischen der freien Flüssigkeitsoberfläche und der gegebenen Fläche, und wird von beiden Flächen schief geschnitten. Er hat zu Basen die gegebene Fläche und eine gleiche gerade Fläche, die man erhält, wenn man die gegebene Fläche um die Schnittlinie beider Ebenen dreht bis zur freien Flüssigkeitsoberfläche."

„Der Mittelpunkt des Drucks ist die schiefe Projection des Schwerpunkts des obigen Cylinders auf die gegebene Fläche; die Projectionslinie ist parallel der Cylinderkante." Der Verfasser beweist dann eine Reihe von interessanten Sätzen über den Mittelpunkt des Drucks und leitet daraus eine graphische Construction dieses Punktes ab. Hn. (Wn.)

A. H. Curtis. Theorems relating to the centre of pressure. Messenger (2) I. 182-189.

Wenn a, b, c die Seiten eines Dreiecks sind, das in eine Flüssigkeit getaucht ist, x, y, z die senkrechten Abstände des Mittelpunktes des Drucks des Dreieckes von a, b, c; H_1, H_2, H_3 die Tiefen, bis zu welchen die Mittelpunkte von a, b, c eingetaucht sind, und N der Flächeninhalt des Dreiecks, so ist

$$x = \frac{N}{a}\left\{\frac{H_2+H_3}{H_1+H_2+H_3}\right\},\quad y = \frac{N}{b}\left\{\frac{H_3+H_1}{H_1+H_2+H_3}\right\},$$
$$z = \frac{N}{c}\left\{\frac{H_1+H_2}{H_1+H_2+H_3}\right\}.$$

Aus diesen Formeln leitet der Verfasser die Relationen her zwischen H_1, H_2, H_3, wenn der Mittelpunkt des Druckes zusammenfällt 1) mit dem Schwerpunkt, 2) mit dem Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, 3) dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, 4) dem Schnittpunkte der Lothe aus den Ecken auf die Seiten, 5) dem Mittelpunkt irgend eines darin eingeschriebenen Quadrats, 6) dem Mittelpunkt des Neun-Punkt-

Kreises; und löst einige Probleme, deren Lösung durch den Gebrauch obiger Formeln erleichtert wird.

Glr. (O.)

E. J. Routh. On the centre of pressure of a triangle and quadrilateral. Messenger (2) II. 5.

Ein anderer Beweis für die hydrostatischen Formeln in Herrn Curtis' Arbeit; siehe Messenger (2) I. 182-189, das vorhergehende Referat.

Glr. (O.)

C. M. Guldberg. Bemaerkninger om Formelen for Höidemooling med Barometer. Forh. af Christ. 1872. 120-131.

Discussion der relativen Bedeutung derjenigen Grössen, die in der Formel für Höhenmessung mit dem Barometer auftreten.

L.

P. Schreiber. Untersuchungen über die Theorie und Praxis der Wagebarometer. Carl Rep. VIII. 245-316.

Der Verfasser entwickelt im ersten Theil dieser Arbeit eine Theorie des Wagebarometers. Nach einer kurzen Erläuterung des Instrumentes leitet er zunächst die drei Hauptgleichungen (Ruhegleichung, Gewichtsgleichung, Bewegungsgleichungen), zwischen den wesentlichen Stücken des Instruments ab. Nachdem er sodann diese allgemeine Theorie an einigen Beispielen klar gemacht, behandelt er speciell die Theorie eines Wagebarometers, dessen Rohr an einem Winkelhebel aufgehängt ist, in ausführlicher Weise. Dem folgt dann eine Untersuchung über die Fehler des Instruments. Die mathematischen Entwickelungen bieten keine Schwierigkeit. Der zweite Theil giebt Auskunft über die praktische Construction, wie über die Verwendung bei Beobachtungen.

O.

Capitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

J. GRAINDORGE. Mémoire sur l'intégration des équatio de la mécanique. Bruxelles. Hayez. 1871.

Siehe Abschnitt VI. Cap. 6. p. 173.

H. LAURENT. Sur un théorème de Poisson. Liouville J. XVII. 422-426.

Der Aufsatz bringt eine bemerkenswerthe Erweiterung d Poisson-Jacobi'schen Theorems: „Wenn $\alpha =$ const. und $\beta =$ con irgend zwei Integrale der $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(1)\quad \frac{dq_\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda}, \quad \frac{dp_\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\lambda}$$

sind, so ist nach diesem immer auch

$$\sum_\lambda \Sigma \pm \frac{\partial \alpha}{\partial q_\lambda} \frac{\partial \beta}{\partial p_\lambda} = \text{const.}$$

ein Integral derselben Gleichungen (wobei es allerdings vorko men kann, dass die linke Seite sich identisch auf eine Consta reducirt)."

Laurent zeigt, dass allgemein, wenn:

$$\alpha_1 = \text{const.}, \;\cdots\; \alpha_\varkappa = \text{const.},$$
$$\beta_1 = \text{const.}, \;\cdots\; \beta_\varkappa = \text{const.}$$

irgend $2\varkappa$ Integrale des Systems (1) sind, stets auch

$$\sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_\varkappa} \Sigma \pm \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial q_{\lambda_\varkappa}} \frac{\partial \beta_1}{\partial p_{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial \beta_\varkappa}{\partial p_{\lambda_\varkappa}} = \text{const.}$$

ein solches ist.

Dieser Laurent'sche Satz würde eine fundamentale Wich keit haben, wenn es möglich wäre, durch denselben aus den bekannten Integralen neue Integrale zu erhalten, d. h. solche, sich nicht durch das Poisson-Jacobi'sche Theorem ableiten lass Nach einer Bemerkung Lie's giebt es aber keine, von der F

er Function H unabhängigen Operationen, mittelst derer man is zwei oder mehr Integralen der Gleichungen (1) andere Inte-ale finden könnte, als welche aus denselben Integralen durch en Poisson-Jacobi'schen Satz hervorgehen. Mr.

[. M. Ferrers. Extension of Lagrange's equations. Quart J. XII. 1-5.

In der Arbeit werden die in Lagrange's allgemeinen Bewe-ingsgleichungen erforderlichen Modifikationen auf solche Fälle aus-dehnt, wo die Bedingungsgleichungen Differentiale einschliessen. ls Beispiele betrachtet der Verfasser eine schwere gleichförmig eisrunde Scheibe, die auf einer völlig rauhen horizontalen 'ene rollt. Cly. (O.)

Somoff. Les remarques concernant le principe de moindre action. Mém. d. l. S. Phil. de Moscou. V.

Z.

Kapp. Zur graphischen Phoronomie. Schlömilch Z. XVII. 419-420.

Der Verfasser stellt sich als Aufgabe, aus der vorgelegten wegung eines materiellen Punktes für jede Lage desselben die rkende Kraft ihrer Grösse und Richtung nach auf graphischem ege zu bestimmen.

Gegeben ist die Bahncurve und die Geschwindigkeit in jedem inkte derselben. Die letztere denkt sich der Verfasser mit Hülfe ner gewählten Einheit als Länge auf der Normale des betreffen-n Bahnpunktes von diesem ab aufgetragen. Die Endpunkte gen dann auf einer Curve, der „Geschwindigkeitscurve.“ Der rfasser zieht das Auftragen auf der Normale dem auf der ngente vor, weil dadurch seine Methode auch noch für gerad-ige Bewegung brauchbar bleibt. Er entwickelt nun zunächst die r Bestimmung nöthigen Stücke für ein beliebiges durch den Bahn-nkt gelegtes Coordinatensystem. Die Construction der Aus-ücke, die sich dabei ergeben, ist möglich, aber ziemlich com-

plicirt; er lässt daher zur Vereinfachung das Coordinatensystem mit der Normale und Tangente zusammenfallen und setzt dann die Construction der so gewonnenen einfacheren Ausdrücke auseinander, woraus sich auch ohne Schwierigkeit die Grössen für beliebige Richtungen gewinnen lassen. O.

F. v. Strzelecki. Theorie der Schwingungscurven. Wien. Ber. LXV. 189-307.

Die Schwingung eines Punktes um eine feste Gleichgewichtsaxe setzt sich aus den einfach periodischen geradlinigen Oscillationen ebenso zusammen wie eine Anzahl auf einen Punkt wirkender Kräfte, indem man die gleichzeitigen Elementaramplituden als Componenten, den Radiusvector des bewegten Punktes als Resultante betrachtet. Erstere werden die Coordinaten des Punktes genannt; die Liste ihrer Werthe dient zum analytischen Ausdruck seiner actuellen Lage, welcher dann nicht weiter reducirt wird. Der Inhalt der ganzen Abhandlung ist eine ausführliche Discussion der von dem Punkte beschriebenen Curve. Vorausgesetzt wird, dass die Oscillationsdauern unter einander in rationalen Verhältnissen stehen, demzufolge die Bahn eine geschlossene Curve ist, und in der kleinsten, durch sämmtliche Oscillationsdauern divisibeln Zeit durchlaufen wird. Die Anfangszeiten der Phasen hingegen differiren beliebig. Nach vorbereitender Aufstellung einer Anzahl combinatorischer Sätze wird zuerst die Symmetrie der Curve und die Bedingung eines Mittelpunkts untersucht, dann die Punkte der Curve betrachtet, welche bei Weglassung einer Oscillationsgruppe zusammenfallen, und theils Gipfel, theils Knoten sind. Die Schwingungscurven für 2 elementare Oscillationen hat der Verfasser nach gleichem Princip in den Jahresber. d. techn. Vereins in Lemberg vom J. 1867 behandelt. H.

R. Clausius. Ueber einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. Schlömilch Z. XVII. 82-87.

Der Verfasser hat im Jahre 1862 in Pogg. Ann. CXVI. p. 73 folgenden Satz aufgestellt: „Die wirksame Kraft der Wärme ist

oportional der absoluten Temperatur." Da sich nun der Satz
›n der Aequivalenz von Wärme und Arbeit auf den mechanischen
ıtz von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und mechanischer
rbeit zurückführen lässt, so glaubte der Verfasser, dass dies
ıch mit dem obigen möglich sein müsse. Dies ist ihm in der
hat auch gelungen: Man denke sich irgend ein System mate-
eller Punkte, die sich in stationärer Bewegung befinden. (Unter
tationärer Bewegung sei eine solche Bewegung verstanden, bei
er die Punkte sich nicht immer weiter von ihrer ursprünglichen
ıge entfernen und die Geschwindigkeiten sich nicht fort und
rt in gleichem Sinne ändern, sondern bei der die Punkte sich
nerhalb eines begrenzten Raumes bewegen und die Geschwin-
gkeiten nur innerhalb gewisser Grenzen schwanken.) Bezeich-
t man dann mit m, m', m'' etc. die gegebenen Punkte, mit x,
z; x', y', z' $\cdots$ ihre rechtwinkligen Coordinaten zur Zeit t,
t X, Y, Z; X', Y', Z' $\cdots$ die nach den Axen genommenen
›mponenten der auf sie wirkenden Kräfte, so ist

$$\Sigma \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \text{ oder } \Sigma \frac{m}{2} v^2$$

e lebendige Kraft, während $-\frac{1}{2}\Sigma(Xx+Yy+Zz)$ ein Ausdruck
t, der wesentlich von den in dem Systeme wirkenden Kräften
›hängt, und, wenn bei gegebenen Coordinaten alle Kräfte sich
ı gleichem Verhältnisse ändern, den Kräften proportional sein
ürde. Der Mittelwerth dieser Grösse während der stationären
ewegung ist es, den Herr Clausius das „Virial des Systems"
ennt. Der Satz heisst dann: „Die mittlere lebendige Kraft des
ystems ist gleich seinem Virial:

$$\Sigma \frac{m}{2} \overline{v^2} = \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{(Xx+Yy+Zz)}.\text{“}$$

achdem der Verfasser sodann den Werth des Virials für einige
ille bestimmt, giebt er einen Beweis für den Satz. O.

. Clausius. Ueber die Beziehungen zwischen den bei Centralbewegungen vorkommenden characteristischen Grössen. Gött. Nachr. 1872. 600-646.

für die Bewegung um ein festes Anziehungscentrum, wie 1
Bewegung zweier materieller Punkte um einander Beziel
zwischen Umlaufszeit, lebendiger Kraft, Ergal und Energ
geleitet, unter der Voraussetzung der Bewegung in geschlo
Bahnen. In der vorliegenden Arbeit dehnt der Verfasse:
Behandlungsweise auf den Fall aus, dass die Bahnen kei
schlossenen Curven bilden. Im ersten Abschnitte stellt d
fasser die erste der beiden der Untersuchung zu Grun
genden Gleichungen für stationäre Bewegung auf, die er
früher besprochen hatte (siehe oben). Es ist

$$(1) \quad \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\tfrac{1}{2}Xx + \frac{m}{4}\,\frac{d^2(x^2)}{dt^2},$$

die für den Fall stationärer Bewegung übergeht in

$$(2) \quad \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\tfrac{1}{2}Xx.$$

In erweiterter Form können diese Gleichungen auch gesc
werden als:

$$(1a) \quad \Sigma\frac{m}{2}v^2 = -\tfrac{1}{2}\Sigma(Xx+Yy+Zz)+\tfrac{1}{4}\,\frac{d^2(\Sigma mr^2)}{dt^2}$$

und

$$(2a) \quad \Sigma\frac{m}{2}\overline{v^2} = -\tfrac{1}{2}\Sigma\overline{(Xx+Yy+Zz)},$$

welche letztere der im vorigen Referat besprochene Satz is
Verfasser erörtert nun den Zusammenhang, welcher zw
seiner Gleichung (1a) und der Gleichung

$$\frac{d^2(\Sigma\, m_i\, r_i^2)}{dt^2} = (2k+4)\,U+h$$

besteht, welche Jacobi in Crelle's Journal XVII. p. 121 auf
hat. Ebenso stellt er vergleichende Betrachtungen zwischen
Gleichung an und der Gleichung

$$\frac{d^2G}{dt^2} - 2T = \Sigma\left[(x_\alpha - a_\alpha)\frac{dU}{dx_\alpha} + (y_\alpha - b_\alpha)\frac{dU}{dy_\alpha} + (z_\alpha - c_\alpha)\frac{d}{d}\right.$$

die Lipschitz in seiner Abhandlung: „Ueber einen algebr
Typus der Bedingungen eines bewegten Massensystemes“
chardt J. LXVI.) aufgestellt hat.

Im zweiten Abschnitt wird die zweite Gleichung aufgestellt, e sich an den Satz von der kleinsten Wirkung mit der von amilton gegebenen Erweiterung anschliesst. Diese Gleichung isst:

$$(5) \qquad -(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \frac{m}{2}\,\delta\bar{v}^2 + mv^2\,\delta\log i,$$

o i die Zeit ist, welche der Punkt zu seiner Bewegung nöthig st. Haben die Kräfte ein Ergal, so geht diese Gleichung ber in

$$(5a) \qquad \overline{\frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z} = \frac{m}{2}\,\delta\bar{v}^2 + mv^2\,\delta\log i.$$

n § 3 wendet sich der Verfasser sodann zur Behandlung von ntralbewegungen. Die Bewegung eines Punktes um ein festes ziehungscentrum lässt sich bei Beziehung auf Polarcoordinaten s aus zwei verschiedenen Vorgängen bestehend, auffassen; mlich erstens der Winkelbewegung des Radiusvector, die als Drehungsbewegung" bezeichnet wird (Umdrehungszeit ist dieige, während welcher der Radiusvector den ganzen Winkelum 2π durchläuft), zweitens die Bewegung des Punktes auf n Radiusvector, der „radialen Schwingungsbewegung" (Schwinngszeit ist die Zeit für eine Hin- und Herschwingung, die bei tionärer Bewegung in abwechselnder Annäherung an das ntrum und Entfernung von demselben bestehen wird). Die te Gleichung lässt sich ohne Schwierigkeit in eine Form ngen, bei der es gleichgültig ist, ob die durchlaufene Bahn schlossen ist oder nicht, sofern nur die Bewegung überhaupt tionär ist. Anders aber ist es mit der zweiten Gleichung, in r die Zeit i der betrachteten Bewegung vorkommt. Findet die wegung in geschlossener Bahn statt, so kann man die Betrachng auf die einmalige Durchlaufung der Bahn beschränken, ein ll, den der Verfasser in der Arbeit des vorigen Jahres unterecht hat. Ist die Bahn keine geschlossene, so kann sich die trachtung nicht auf eine einfache Zeit beschränken. Im vierten bschnitt wendet sich der Verfasser daher zunächst zur genaueren etrachtung der Schwingungsbewegung. Indem er die durch e Drehung hervorgebrachte Centrifugalkraft als eine vom Centrum

ausgeübte Abstossungskraft betrachtet, leitet er die Gleichung her

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -F'(r) + mc^2\frac{1}{r^3},$$

mit deren Hülfe er die Schwingungsbewegung als eine für sich allein stehende Bewegung behandeln kann, so dass nun seine beiden Gleichungen Anwendung finden. Ebenso wird in §5 die Drehungsbewegung gesondert betrachtet. Indem er hier eine grössere Reihe von Umdrehungen betrachtet, verschafft er sich einen Mittelwerth der Umdrehungszeit, wodurch er dann zu den für diese Bewegung nöthigen Gleichungen gelangt. Nachdem die Gleichungen für jedes beliebige Kraftgesetz aufgestellt sind, werden dieselben im sechsten und siebenten Abschnitt auf die specielle Gruppe angewendet, wo die Kraft irgend einer Potenz der Entfernung proportional ist, wobei jedoch die $(-1)^{te}$ Potenz der Uebersichtlichkeit wegen ausgeschlossen bleibt. In § 8 werden dann die in den beiden letzten Paragraphen gefundenen Formeln, welche die den Bewegungsperioden entsprechenden Zeiten und verschiedene Mittelwerthe als Functionen zweier leicht bestimmbarer Grössen darstellen, noch einmal übersichtlich zusammengestellt. Der 9te Paragraph ist der Bestimmung der Function J_1, die in den vorherigen Rechnungen vorkommt, gewidmet. § 10 enthält die Reihenentwickelung derselben, wie auch §§ 11 und 12 denselben Gegenstand behandeln. O.

YVON VILLARCEAU. Sur un nouveau théorème de mécanique générale. C. R. LXXV. 232-240, 377-380.

Der neue Satz, den Herr Villarceau aufgestellt hat, lässt sich herleiten, wenn man von den Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes nach drei festen Axen ausgeht. Er heisst in Formel ausgedrückt:

$$\Sigma m v^2 = \tfrac{1}{2}\frac{d^2\Sigma mr^2}{dt^2} + \Sigma f\Delta - \Sigma(Xx + Yy + Zz).$$

Dabei bezeichnet v die Geschwindigkeit, r den Radiusvector des Punktes $m(x, y, z)$, X, Y, Z die Componenten nach den Axen, f

e Kraft als attractiv vorausgesetzt zwischen den Punkten m und m', ihre Entfernung. Die Aehnlichkeit mit dem von Clausius aufge-ellten Satze (siehe oben) erhellt beim ersten Blick. In der vor-egenden Arbeit hat der Verfasser einen Beweis dieses Satzes geben, der, wie bereits bemerkt, ohne Schwierigkeit ist. Er ndet den neuen Satz sodann auf eine gasförmige Masse an. tzt man die Dichtigkeit durch die ganze Masse als constant aus und betrachtet man die gegenseitigen Einwirkungen der olecüle als Null, so reducirt sich die Gleichung auf $\Sigma \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} \varpi V$, o V das Volumen, ϖ den Druck auf die Oberflächeneinheit be-ichnet. Den Schluss der ersten Notiz bildet eine Vergleichung s Satzes mit dem von Clausius. Der Verfasser spricht seinem tze grössere Allgemeinheit zu. In der zweiten Notiz findet h eine weitere Anwendung des Satzes auf das allgemeine eichgewicht eines Gases. O.

Clausius. Sur l'équation mécanique dont découle le théorème du viriel. C. R. LXXV. 912-916.

on Villarceau. Note concernant un théorème de mécanique. C. R. LXXV. 990-992.

Gasparis. Lettre sur un nouveau théorème de mécanique. C. R. LXXV. 537.

Herr Clausius knüpft in der erst bemerkten Arbeit an eine ere an und bestreitet zunächst die grössere Allgemeinheit s Satzes von Villarceau. Zum Schluss giebt er noch einige dere Formen des Satzes. Herr Villarceau antwortet darauf in r zweiten Note, indem er in der That einen Irrthum zugiebt, h übrigens auf einen Brief von Lipschitz beruft (siehe oben s Referat über die Arbeit von Clausius). Herr Gasparis er-nert an eine Arbeit in den Atti della Accademia di Napoli vom hre 1865, in der er bereits analoge Resultate für das Problem r drei Körper veröffentlicht habe. O.

Newcomb. Note sur un théorème de mécanique céleste. C. R. LXXV. 1750-1753.

Der Verfasser bemerkt, dass die Function, die Clausius dem Namen Virial belegt hat, eine grosse Rolle in der Mecha des Himmels spielt. Die mittleren Bewegungen der Plane und die Veränderungen der Winkel, von denen die secula Bewegungen ihrer Perihele und Knoten abhängen, können n lich als partielle Derivirte des Virials in Beziehung auf die E mente, als deren Functionen man sie ausdrücken kann, d gestellt werden. Um dies nachzuweisen, betrachtet er n Planeten die ihrer wechselseitigen Einwirkung und der der Sonne unte worfen sind. O.

J. L. Wezel. Notes scientifiques. Louvain.

Die erste Note enthält Bemerkungen über physikalisch Phänomene im Allgemeinen und die Theorie der Gase, die zwei elementare Beweise der hauptsächlichsten, auf Centralkräfte b züglichen Sätze. Der Verfasser zieht folgende merkwürdig Folgerung aus der Formel, welche zwischen der grossen Axe d Mondbahn, der Entfernung von Erde und Mond, ihrer gegen seitigen Anziehung und der Zeit einer Umdrehung stattfindet „Drückt man diese Attraction als Function der Schwerkraft aus, so kann man die Entfernung des Mondes von der E allein durch Beobachtung der siderealen Umlaufszeit dieses telliten ableiten.“ Beiläufig bemerkt Herr Wezel, dass der K der durch den Pol einer logarithmischen Spirale und zwei Punkte geht, auch durch den Schnittpunkt der Tangenten Normalen dieser Punkte geht, was unmittelbar den Krümmungs radius dieser Curve giebt. Mn. (Wn.)

P. v. Geer. Onderzvek eener byzondere Omstandigheid der centrale Beweging. Leiden, Sijthoff.

Der erste Abschnitt enthält eine historische Bearbeitung d Gegenstandes von Newton bis auf Jacobi und Cauchy. Im zwei ten Theile wird das Problem vom kinematischen, im dritten v dynamischen Standpunkte aus betrachtet. O.

. TISSÊRAND. Sur le mouvement des planètes autour du soleil d'après la loi électrodynamique de Weber. C. R. LXXV. 760-763.

In diesem Gesetze ist

$$F = \frac{fm\mu}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h^2}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2}{h^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right)$$

ie Kraft, welche die Bewegung des Planeten um die Sonne ervorbringt. Es bezeichnen dabei f die Constante der Attraction, die Masse des Planeten, μ die Summe dieser Masse und der r Sonne, r die Entfernung des Planeten von der Sonne, und h e Geschwindigkeit, mit der sich die Attraction im Raume fortlanzt. Die Integration der Gleichungen dieser Bewegung ist it Hülfe der elliptischen Functionen möglich. Man gelangt er schneller zum Ziele, wenn man

$$F = \frac{fm\mu}{r^2} + F_1$$

tzt und F_1 als störende Kraft betrachtet. Es genügt alsdann, e Constanten der elliptischen Bewegung zu variiren. Indem n der Verfasser dies Verfahren befolgt, gelangt er zu dem hlusse, dass die Perturbationen der verschiedenen Elemente ull oder periodisch sind, mit Ausnahme der des Perihels, die nen secularen Theil enthält. Die Elemente bleiben also in dem setze von Weber dieselben wie in dem von Newton, nur die nge des Periheliums vermehrt sich um eine Grösse, die mit r Nähe des Planeten zu der Sonne wächst. Zum Schlusse erden die Resultate der Untersuchung auf Mercur angewendet.

O.

. HESSE. Ueber das Problem der drei Körper. Borchardt J. LXXIV. 97-115.

Der Verfasser gelangt durch seine Untersuchungen zu dem lgenden Theorem: Wenn man das allgemeine Problem der drei rper beschränkt auf die Gestalt des Dreiecks, dessen Ecken e drei Körper bilden, so hängt die Lösung des engeren Proems ab von drei Differentialgleichungen der dritten Ordnung.

Wenn man aber die Principien der Mechanik voraussetzt, welche Integrale liefern, so lässt sich dasselbe abhängig machen von zwei Differentialgleichungen der zweiten Ordnung und einer Differentialgleichung dritter Ordnung.

Die Ausführung beginnt mit der Aufstellung der d'Alembert'schen Differentialgleichungen, welche das allgemeine Problem der drei Körper lösen; das bezeichnete engere Problem verlangt die Elimination sämmtlicher Variabeln aus diesen Differentialgleichungen mit Ausnahme der Radienvectoren und ihrer Differentialquotienten. Zu diesem Zwecke werden symmetrisch gebildete Functionen der zu eliminirenden Variabeln eingeführt, die sich alle durch die Radienvectoren und ihre Differentialquotienten bis zur zweiten Ordnung ausdrücken lassen, mit Ausnahme solcher, welche abgesehen von den Radienvectoren und ihren ersten Differentialquotienten allein von einer bestimmten alternirenden Function L abhängen. Der Verfasser sagt nun, dass diese Function L sich nur durch die Radienvectoren und ihre Differentialquotienten bis zur dritten Ordnung einschliesslich darstellen lässt, während thatsächlich L entweder auf dem Wege von Lagrange durch die Relationen der Winkel, welche eine Gerade mit drei im Raum gegebenen Geraden bildet, oder aus der von Bour in seiner Abhandlung über das Problem der drei Körper (Mém. sur le problème des trois corps. J. de l'Éc. Pol. Cah. 36. p. 40) aufgestellten Determinante durch die Radienvectoren und ihre ersten beiden Ableitungen bestimmt werden kann. Würde die Darstellung von L vom Verfasser so vollführt sein, dann wäre das angegebene Theorem erwiesen; er hätte dann drei Differentialgleichungen der dritten Ordnung zwischen den Radienvectoren und der Zeit (47, 48, 49), von denen die erste durch einmalige Integration auf den Flächensatz führt, die zweite auf die lebendige Kraft.

Der Verfasser hat aber, um L herzuleiten, für das Product LL', welches in der Gleichung (47) vorkommt, eine neue Darstellung gesucht, indem er von dem Flächensatz ausgehend durch Differentiation für LL' einen Ausdruck von der dritten Ordnung ableitet (54), hat jedoch nicht bemerkt, dass die neue Differentialgleichung (54) identisch ist mit der schon erwähnten (47). O.

. A. PROCTOR. On the motion of matter projected from the Sun: with special reference to the outburst witnessed by Prof. Young in America. Monthl. Not. XXXII. 42-53. 1871.

Enthält eine mit Hülfe einer Cycloide ausgeführte graphische Construction zur Bestimmung der Zeit des Falls eines Theilchens om übrig bleibenden Theil nach einer Kugel, deren Attraction ach dem Naturgesetz erfolgt. Glr. (O.)

ON DER HEYDEN. Bemerkungen zu der von Prof. Dr. Fresenius Jahrg. II. S. 215 d. Z. mitgetheilten Lösung einer Aufgabe vom schiefen Wurf. Hoffmann Z. III.

Die Fresenius'sche Lösung der Aufgabe, den Doppelwerth s Elevationswinkels eines Wurfes nach einem höher oder tiefer genden Ziele zu finden mittelst der Subtangente verwirft der rfasser wegen ihrer Weitläufigkeit, da sie sich direct mit Polarordinaten sehr leicht ergiebt. H.

DE ST. ROBERT. Mémoires scientifiques. Tome I. Balistique. 8. Paris. Gauthier-Villars.

. DE TILLY. Note sur quelques formules de balistique appliquée. Bull. de Belg. (2) XXXIV. 43-50.

Der Verfasser zeigt in dieser Note, wie man experimentell e Hypothesen controliren kann, die man gezwungen ist rücksichtlich der Bewegung länglicher Projectile zu machen, um diese Bewegung mit derjenigen sphärischer Projectile zu vergleichen. r untersucht dabei nur die Projection der Bewegung auf die rticale Schussebene. Mn. (Wn.)

I. RÉSAL. Interprétation géométrique de la trajectoire apparente d'un projectile dans le vide. Nouv. Ann. (2) XI. 433-438.

Man denke sich eine Kugel, die mit einer gleichförmigen otationsgeschwindigkeit begabt ist und materielle Punkte mit

constanter Kraft in der Richtung des Radius anzieht. Für einen Punkt, der mit einer bestimmten relativen Anfangsgeschwindigkeit in Bezug auf diese Kugel einen Bogen beschreibt, der klein genug ist, um die Richtung der anziehenden Kraft während des Durchlaufens als constant ansehen zu können, hat Bour in Liouville's J. 1863. bewiesen, dass seine Bewegung betrachtet werden kann als hervorgegangen aus der Bewegung auf einer Parabel, deren Ebene sich um eine der Rotationsaxe parallele Axe in dem Meridian des Orts dreht, und zwar mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich und entgegengesetzt der der Kugel. Herr Resal ist bei der Untersuchung des Problems zu einem anderen Resultate gekommen. Nach ihm kann die relative Bahn betrachtet werden als das Resultat einer geradlinigen, gleichförmig veränderten Bewegung, parallel der Rotationsaxe der Kugel in einer Ebene, die sich mit einer Winkelgeschwindigkeit, gleich und entgegengesetzt der des Systems um eine Axe bewegt, parallel der letzteren und selbst bewegt mit einer gleichförmigen Translationsbewegung senkrecht auf dem Meridian des Ortes. Die Differenz zwischen seinem Resultat und dem von Bour ist dadurch hervorgerufen, dass Bour die centrifugale Beschleunigung nicht in Grösse und Richtung als constant betrachtet hat. Den Beweis für seinen Satz führt Herr Resal, indem er die Gleichungen des Problems zunächst ohne jene Einschränkung aufstellt und dann die dadurch gebotenen Vereinfachungen einführt. O.

P. Morin. Note sur le „Traité de balistique extérieur de M. le général Mayewski.“ C. R. LXXV. 647-649.

Bericht des Herrn Morin über das russisch geschriebene Buch des Herrn Mayewski. Dasselbe enthält zwölf Capitel. Das erste giebt einen Bericht über die Apparate, welche zur Messung der Anfangsgeschwindigkeiten gebraucht werden. Im zweiten Capitel findet sich die Herleitung der Bewegungsgesetze im leeren Raume mit Anwendungen. Im dritten behandelt der Verfasser die Frage nach dem Widerstand der Luft. Er kommt dabei zu dem Resultat, dass der Widerstand ausgedrückt werden kann durch ein

ed proportional der dritten Potenz der Geschwindigkeit für ıärische und der vierten für oblonge Geschosse. Es folgt die ersuchung der Geschossbewegung in der Luft, abgesehen von ɜr Rotation. Im fünften Capitel werden mit Hülfe der geınenen Regeln einige Probleme gelöst. Capitel sechs handelt der Deviation der Geschosse, während das siebente die Beɲung länglicher Geschosse in der Luft behandelt, mit besonɜr Berücksichtigung der Arbeiten von H. Gautier (F. d. M. I. ·35) und von Herrn St. Robert. Im achten Capitel werden vendungen auf Probleme gegeben. Im neunten ist die Deion solcher Geschosse behandelt. Das zehnte beschäftigt sich der Aehnlichkeit der Bahnen. Das elfte ist der Frage des dringens der Geschosse in feste Mittel und des Durchschlagens Panzerplatten gewidmet. Im zwölften Capitel endlich finden ı Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate und der hrscheinlichkeitsrechnung auf das Schiessen. O.

DE BRETTES. Sur quelques lois de la pénétration les projectiles oblongs dans les milieux résistants. C. R. LXXV. 1702-1705.

Herr Didion hat in seiner Balistik folgende Sätze für sphähe Geschosse aufgestellt: „Die Längen und die Zeiten der hnen zweier Geschosse, die von einer gegebenen Geschwindigkt zu einer anderen ebenfalls gegebenen Geschwindigkeit überıen, sind proportional den Produkten der Durchmesser der schosse in ihre Dichtigkeiten.“ Der Verfasser hat nun zwei aloge Sätze auch für längliche Geschosse, die eine Translationschwindigkeit in der Richtung ihrer Axe haben, gefunden. steht man unter „reducirter Länge“ (longueur réduite) die ıge eines Cylinders von demselben Durchmesser, derselben htigkeit, demselben Gewicht, wie ihn das betreffende Geschoss so heissen die Sätze: „Die Längen und Zeiten der Bahnen ier verschiedener länglicher Geschosse, deren vordere Enden ›ch ähnlich sein müssen, sind unabhängig von den Durchsern und proportional den Produkten ihrer reducirten Länge ihre Dichtigkeiten.“ Die Note enthält den Beweis. O.

G. S. Carr. Solution of question 3444. Educ Tin 71-72.

Ein Massentheilchen ist in gegebener Entfernung vo gleichförmigen unbegrenzten dünnen Platte, deren Theilc einer Kraft, die dem Quadrat der Entfernung umgekel portional ist, anziehen. Finde die Zeit, in der das g Theilchen die Platte erreicht. Wenn f die Anziehung der I einheit und a die Entfernung von der Platte bedeutet, so Zeit $= \frac{a}{\pi f}$.

R. Townsend. Solution of question 3536. Educ. Times

Ein Massenpunkt beschreibt eine Ellipse unter der zeitigen Wirkung gegebener Centralkräfte (umgekehrt prop dem Quadrat der Entfernung) in den beiden Brennpunkten: die Differentialgleichung zwischen der Zeit und der excent Anomalie. Sie ist bei gewöhnlicher Bezeichnung

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{1}{a^3}\left(\frac{\mu}{(1+e\cos u)^2} + \frac{\mu'}{(1-e\cos u)^2}\right).$$

]

Weitere Aufgaben aus der Mechanik von den I R. Townsend, J. J. Walker, T. Mitcheson, O. W. S. A. Slade, R. Tucker, Evans, W. Liverle andern finden sich Educ. Times XVI., XVII.

J. Bode. Die Centripetalkraft und die ablenkende fester Curven. Hoffmann Z. III. 327-335.

Die Methode, welche der Verfasser an Stelle ungen angeblich falscher Methode für Lehrbücher empfiehlt, ist sell richtig, da sie eine Bewegung mit constanter Geschwindigl gebrochener Linie zur anfänglichen Annahme macht, und solche unmöglich ist. H

J. A. C. Bresse. Sur la détermination des brach chrones. C. R. LXXIV. 854-856.

Der Verfasser erweitert das Problem dahin, dass er, statt .e Jacob Bernoulli den Punkt der Schwere zu unterwerfen, ihn liebigen Kräften unterwirft, indem er nur die Bedingung stellt, ss es Niveauflächen und eine Kräftefunction giebt. Nach Aufellung der allgemeinen Gleichungen führt er die Lösung des oblems für den Fall einer centralen Kraft durch, die eine nction der Entfernung von einem festen Punkte ist. O.

A. C. Bresse. Sur la détermination de la trajectoire d'un point pour laquelle une certaine intégrale est minimum. C. R. LXXV. 1562-1567.

Als Verallgemeinerung des Problems der Brachistochrone sich der Verfasser folgendes Problem gestellt: „Ein beweger Punkt m geht von einem gegebenen Punkt A mit beanter Geschwindigkeit v aus. Er soll nach einem gegebenen nkte B gelangen unter Einwirkung einer Kraft F, die eine nction der Coordinaten x, y, z ist. Auf welcher Curve muss n der Punkt bewegen, damit das Integral $\int U ds$ (U irgend e Function der Geschwindigkeit v) ein Minimum ist?" Nachn der Verfasser die Frage allgemein erörtert und die Differengleichungen der Bahn aufgestellt hat, behandelt er speciell Fall der Schwere und einer centralen Kraft, die eine Function r Entfernung ist; in beiden Fällen kann die Aufgabe auch ne specielle Annahme über U auf Quadraturen zurückgeführt rden. O.

Ohrtmann. Das Problem der Tautochronen. Pr. Berlin.

Siehe Abschn. I. Cap. 1. p. 30.

Jordan. Sur les oscillations infiniment petites des systèmes matériels. C. R. LXXIV. 1395-1399.

Der Verfasser verspricht einen einfacheren Beweis für ein Retat von Somof (Mém. de St. Pét. 1859) zu geben. Letzterer

hat gezeigt, dass die Integrale des Systems von Differentia chungen

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial T}{\partial q_r}=\frac{\partial U}{\partial q_r}\qquad (r=1,2,\cdots n)$$

in der Form

$$T=\Sigma a_{rs}q_r q_s;\quad U=\Sigma b_{rs}q_r q_s$$

auch im Fall mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleic rein periodisch in t sind. Jordan's Beweis kann jedoch befriedigen, weil er dazu Substitutionen anwendet, welche abhängig von t machen, worauf er keine Rücksicht nimmt.

H.

H. Résal. Équation du mouvement d'une courbe f culaire assujettie à rester plane. C. R. LXXV. 1010-10

Einfacher, als sie aus den allgemeinen Gleichungen Lagrange hervorgehen, gestalten sich die Gleichungen der eb Bewegung eines Fadens, wenn man Bogen und Zeit zu u hängigen Variabeln, den Richtungswinkel der Tangente α gesuchten Function macht. Bezeichnen v, u die Componenten Geschwindigkeit, Φ, Ψ die der auf die Masseneinheit des Bo elements ∂s wirkenden Kraft, beide in tangentieller und norm Richtung zum Faden, so sind die Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial s}=u\frac{\partial \alpha}{\partial s};\quad \frac{\partial u}{\partial s}+v\frac{\partial \alpha}{\partial s}=\frac{\partial \alpha}{\partial t};$$

$$\left(\Psi-\frac{\partial u}{\partial s}-v\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\alpha}{\partial s^2}+\left(\Phi-\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\alpha}{\partial s^2}$$
$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(\Psi-\frac{\partial u}{\partial t}-v\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial s}=0,$$

wozu noch die äusseren Bedingungen kommen. Die Integ ist nicht gefunden; nur für 2 besondere Fälle liessen sich e hier nicht genannte Schlüsse machen.

H

H. Résal. Du mouvement relatif d'un point pesan une courbe comprise dans un plan vertical tou d'un mouvement uniforme autour d'un point d plan. Darboux Bull. III. 29-32.

Der Verfasser behandelt das Problem zunächst für den Fall iner geraden Linie, dann für den Fall eines Kreises und endlich ür den einer beliebigen Curve. Er gelangt dabei zu einer Gleihung, die nur für den erst behandelten Fall integrabel zu sein cheint. O.

. Résal. Du mouvement d'un corps solide relié à un système matériel animé d'un mouvement relatif par rapport à ce corps. Ann. d. l'Éc. Norm. (2) I. 115-156.

Der Verfasser will den Einfluss untersuchen, den die Trägit ausübt, die eine Folge der relativen Bewegung eines Systemes dessen Stützpunkte sich auf dem Körper S befinden, ist, auf e Bewegung des Körpers S. Nach Erwähnung der Sätze, auf e sich der Verfasser hauptsächlich stützt, behandelt er zunächst e Translationsbewegung des festen Körpers und wendet die fgestellte Gleichung auf die Stabilität der Dampfmaschinen an. I ist der Rotationsbewegung fester Körper um einen festen Punkt widmet. Die drei Componenten der absoluten Beschleunigung erden getrennt betrachtet, und dann die Anwendung auf die ewegung eines Systemes fester Körper, die auf einander wirken, macht, wenn man die Erschütterungen der Molecüle berückchtigt. In den §§ III und IV werden Fälle betrachtet, in denen as Gesetz der relativen Bewegung von s bekannt ist, während i § V der allgemeine Fall behandelt wird, wo die Elemente der lativen Bewegung von s selbst die Unbekannten des Problemes nd. Es folgen zwei Noten, von denen die erste die gewonnen Resultate auf die Bewegung eines Eisenbahnzuges anwendet, ihrend die zweite von dem Einflusse eines constanten Widerindes auf die oscillirende Bewegung eines Körpers, die aus riodischen Quellen entspringt, handelt. O.

. Résal. Équations générales du mouvement d'un corps solide rapporté à des axes mobiles. C. R. LXXIV. 10-12.

Der Verfasser hatte in einer früheren Arbeit (C. R. LXXIII.

1160. s. F. d. M. III. p. 465) die Bewegungsgleichunge Punktes eines festen Körpers in Beziehung auf beweglich abgeleitet. Im vorliegenden giebt er eine einfache Herl die sich auf folgenden Staz stützt: „Die Geschwindigkeit des der Axe des Momentes der Bewegungsmenge stellt in Gröss Richtung das Moment der Kräfte dar.“ (

H. Résal. Étude géométrique sur le mouvement sphère pesante glissant sur un plan horizontal. Nouv. Ann. (2) XI. 193-202.

Der Verfasser setzt voraus, dass die Kugel aus conc schen homogenen Schichten besteht und vernachlässigt die Rei des Rollens als zu gering gegen die des Gleitens. Er zeigt zunächst, dass die Componente der augenblicklichen Rotatio die Verticale constant ist, und betrachtet dann die Bewe cines einzelnen Punktes der Kugel. Danach wird speciell Bewegung des Berührungspunktes der Kugel mit der Eben örtert, ebenso die des Mittelpunkts der Kugel, wobei sich Anzahl von Sätzen ergeben, die theilweise schon von Co und J. A. Euler (dem Sohne L. Euler's) aufgestellt worden

O.

H. Résal. Méthode directe pour déterminer l'influ de la rotation de la Terre sur la chute des grav Nouv. Ann. (2) XI. 348-351.

Der Verfasser bestimmt die Abweichung, die ein fall Körper durch die Rotation der Erde erleidet. Er setzt dab Erde kugelförmig voraus und vernachlässigt die Fallhöhe den Radius der Erde. Den Widerstand der Luft berücks er nicht. Die Ableitung selbst ist einfach und ohne beso Interesse. Der Verfasser gelangt zu einer bereits bek Formel. (

V. Puiseux. De l'équilibre et du mouvement des pesants en ayant égard aux variations de dire et d'intensité de la pesanteur. Ann. de l'Éc. Norm. (2) I.

Die Theorie des Gleichgewichtes und der Bewegung schwerer .örper wird in der Regel unter der Voraussetzung entwickelt, ass die Richtung und Intensität der Schwere unveränderlich ind. Dies ist nun aber streng genommen nicht richtig, da weder ie Richtung der Schwere überall parallel ist, noch auch der Einfluss, den Sonne und Mond und die Bewegung der Erde ausüben, für jeden Punkt der Erde derselbe ist. Der Verfasser der vorliegenden Arbeit will nun die Theorie unter Berücksichtigung ller dieser Umstände entwickeln. Er betrachtet dabei die Erde ls ein Rotationsellipsoid, das aus Schichten mit constanter Dichtigeit zusammengesetzt ist. Bezeichnet man nun mit μ die Masse er Erde, mit u die Entfernung des Elementes $d\mu$ von einem sseren Punkte M, mit f die Anziehung der Masseneinheit auf e Masseneinheit in der Entfernung s, so sind die Componenten der nziehung auf den Punkt M die partiellen Derivirten des Integrals

$$T=\int\frac{fd\mu}{u}.$$

 Beziehung auf die Coordinaten von M.

Für die oben gemachte Voraussetzung ist dies T für alle unkte auf demselben Parallelkreis dasselbe. Der Verfasser entickelt nun zuvörderst die Componenten der Erdanziehung, und estimmt dann die Componenten der Kräfte, die aus den Wirungen von Sonne und Mond entstehen. Daraus ergeben sich ann die Componenten der in der That wirksamen Kraft:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt}+\omega^2\sin\lambda\cdot\alpha-\omega^2\sin^2\lambda\cdot x-\omega\sin\lambda\cdot\cos\lambda\cdot z,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt}-2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt}-\omega^2 y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt}+2\omega^2\cos\lambda\cdot\alpha-\omega^2\sin\lambda\cos\lambda\cdot x-\omega^2\cos^2\lambda\cdot z,$$

o ω die Rotationsgeschwindigkeit der Erde bezeichnet, λ den Vinkel, den die, durch den Punkt O (nahe der Oberfläche) gegte Coordinatenaxe Oz mit der durch den Mittelpunkt der Erde ehenden $C\zeta$ macht, α endlich das ξ des Punkts O ist. Nachem der Verfasser sodann die Bewegungsgleichungen eines

schweren Körpers aufgestellt hat, bestimmt er den Wink
ein Loth mit der durch den Aufhängepunkt gelegten Ve
bildet. Beide liegen in dem Meridian des Aufhänge
Der Winkel ist sehr klein, für Paris z. B. bei einer Län
100 m. 0,017 Secunden. Derselbe würde sonst ein Mittel
um durch eine Beobachtung an einem Orte die Abplattu
Erde zu bestimmen. Es wird sodann die Form eines sc
homogenen Fadens, der an einem Endpunkte aufgehä
bestimmt. Der Verfasser kommt hier zu demselben Re
das auch Herr Bertram in der im zweiten Bande der F.
p. 715 besprochenen Arbeit gefunden, dass nämlich der
die Form eines Parabelbogens (unabhängig von der Län
Fadens) annehme, dessen Durchmesser parallel dem Me
des Aufhängepunktes ist. Die convexe Seite des Boge
gegen den Aequator gerichtet, und der Parameter $\frac{4g}{E}$.
Minimum desselben tritt bei 45° ein, während er im Pol un
Aequator unendlich wird, sodass der Bogen dann in eine G
übergeht. Bei der Betrachtung des Falles im leeren Raum
langt der Verfasser zu den bereits bekannten Abweichu
Den Schluss der Abhandlung bildet die Betrachtung der Bewe
eines festen Körpers um eine durch seinen Schwerpunkt geh
und mit der mittleren Verticalen dieses Punktes zusammenf
de Gerade. O.

F. Tisserand. Sur les mouvements relatifs à la face de la terre. C. R. LXXV. 1567-1570.

Der Verfasser transformirt die bekannten Gleichungen

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=n[(A+B-C)c''q-(C+A-B)b'$$

$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=n[(B+C-A)a''r-(A+B-C)c'$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=n[(C+A-B)b''p-(B+C-A)a'$$

in folgende Formen

$$A\frac{dP}{dt}+(C-B)QR=n^2(C-B)\beta''\gamma'',$$

$$B\frac{dQ}{dt}+(A-C)RP=n^2(A-C)\gamma''\alpha'',$$

$$C\frac{dR}{dt}+(B-A)PQ=n^2(B-A)\alpha''\beta''.$$

O.

HOPPE. Ueber den Einfluss der Rotation eines Schwungrades auf die Bewegung eines damit verbundenen Körpers. Schlömilch Z. XVII. 167-174.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe zu untersuchen, ob die tation eines Schwungrades der Axe eine Widerstandskraft gen Ablenkung aus ihrer Richtung verleihe. Er betrachtet halb ein Schwungrad, dessen Axe in einem Gehäuse befestigt beide werden als Rotationskörper für eine gemeinsame Axe mit gemeinsamem Schwerpunkt betrachtet. Er erörtert zuhst den Fall, wo das Gehäuse anfänglich in Ruhe, das Schwung- in gegebener Rotation begriffen ist, und geht dann über zu Fall, wo das Gehäuse um eine feste, aber ganz beliebige rotirbar ist. Die Resultate, zu denen er gelangt, sind folde: „1) Die Rotation des Schwungrades setzt einer aus der e beginnenden Ablenkung seiner Axe mittels eines Kräfteres keinen Widerstand entgegen. 2) Sie strebt eine im Act riffene Ablenkung in die transversale Richtung überzuführen. macht die Lage der Axe nicht stabil, sondern übt nur auf Potential der ablenkenden Kraft eine stabilisirende Wirkung dem Sinne, dass sich dasselbe wenig ändert und periodisch seinen Anfangswerth zurückgeht.“ O.

M. MINCHIN and M. COLLINS. Solution of question 3093. Educ. Times XVI. 25-26 und 57.

Eine Kugel, welche gleichförmig um einen Durchmesser irt, wird horizontal fortgeschleudert in einer Ebene senkrecht

selbe von 2 äquidistanten Parabelbogen begrenzt wird un
windschief gemacht ist. Er bespricht zunächst den Einflu
der Luftwiderstand auf die Bewegung des Instrumentes ha
Ausgangspunkt dieses Theils der Untersuchung bildet d
Duhamel gegebene Formel, die der Verfasser für seinen
auf die Form $dR = \varrho v^2 \sin^2 \theta \, ds$ bringt, wo ds das Flächene
ϱ die Dichtigkeit des Fluidums, v die Geschwindigkeit d
wegten Körpers uud θ der Winkel ist, den die Ebene, di
Flüssigkeitsstrahl getroffen wird, mit der Bewegungsri
macht. Er berechnet sodann den Druck der Luft auf de
merang, indem er den Druck, der durch die Rotation des
entsteht, für sich allein betrachtet. Nachdem der Verfasser
den Einfluss, den dieser Luftdruck auf die Bewegung d
strumentes ausübt, discutirt hat, berechnet er die Bahn de
merangs für den Fall des sogenannten Horizontalwurfs. Er
als Projectionsgleichungen in der xz-Ebene eine Gleichun
der Form:

$$z = Ax^2 - B\cos(\alpha - bx) + Cx + D,$$

und in der xy-Ebene

$$y = E\sin(\alpha - bx) - Fx + G.$$

Die Gleichungen werden in der vorliegenden Arbeit nur
leitet, jedoch keiner Discussion unterworfen. (

usführung. Die Resultate seiner Untersuchung spricht der Verfsser hier in folgenden beiden Sätzen aus: „Dasselbe materielle endel hat für alle zu den horizontalen Drehaxen D_0 oder D_1 arallele und in gleichem Abstande vom Schwerpunkte S, also r alle auf dem Mantel eines geraden Kreiscylinders, dessen Axe it der Schweraxe D_0 zusammenfällt, liegende Drehaxen D_1 die imliche Schwingungszeit." „Wenn das Pendel für 2 parallele rehaxen D_1 und D_2, welche nicht auf derselben geraden Kreislinderfläche um eine durch den Schwerpunkt S des Pendels legte, zu D_1 und D_2 parallele Axe D_0 liegen, gleiche Schwinmgszeit besitzt, so ist die Summe der Abstände λ_1 und λ_2 der xen D_1 und D_2 vom Schwerpunkt S als Länge des dem materiellen Pendel entsprechenden einfachen Pendels zu nehmen."

O.

. Ronzoni. Théorie du pendule de Foucault. Mondes (2) XXVII. 422-424.

Herr J. A. Serret hat in der Sitzung vom 5. Februar 1872 ne Arbeit über die Theorie des Foucault'schen Pendels mitgeeilt. Der Bericht darüber in den Mondes hat den Verfasser rliegender Notiz an eine eigne Arbeit über diesen Gegenstand s dem Jahre 1853 erinnert. Bei Uebersendung derselben an rrn Moigno theilt er demselben zugleich mit, worin sich seine thode von der des Herrn Serret unterscheidet. Er hat nicht Variation der Willkürlichen, sondern ein bewegliches Axenstem benutzt. Zugleich führt er in dieser Notiz einige seiner sultate an, die mit denen des Herrn Serret übereinstimmen. leitungen sind in der Notiz nicht enthalten.

O.

von Villarceau. Sur les régulateurs isochrones, dérivés du système de Watt. C. R. LXXIV. 1437-1445.

Nach einem kurzen Rückblick auf die bisherige Entwickeng der Regulatoren theilt Herr Villarceau dieselben in zwei lassen, nämlich diejenigen, die die bewegende Arbeit veränder-

lich machen, und die, welche die widerstehende Arbeit verände Nachdem er sodann erwähnt, dass er schon 1868 eine Abha lung über die Theorie derselben fertig gestellt, geht er dazu üt zunächst das beiden Classen Gemeinsame zu erörtern und spricht dann die Eigenthümlichkeiten der beiden Classen. diese Notiz keine mathematischen Entwickelungen enthält, v schiebt Referent ein eingehenderes Referat bis zur Veröffe lichung der Abhandlung des Verfassers selbst. O.

Yvon Villarceau. Sur le régulateur isochrone à ailett construit par M. Bréguet. C. R. LXXIV. 1481-1483.

Ein Bericht über die Verbesserungen und Versuche, die mi dem genannten Apparate seit seiner ersten Construction im Jahr 1870 vorgenommen sind. Derselbe ist nach theoretisch gewonnenen Principien und Maassen angefertigt worden. O.

H. Résal. Théorie du régulateur Larivière. Ann. d. Mines (7) II. 259-264.

Siehe F. d. M. III. p. 465. O.

Worms de Romilly. Mémoire sur divers systèmes de régulateurs à force centrifuge. Ann. d. Mines (7) I. 36-6.

Nachdem der Verfasser allgemein die Forderungen besprochen, die an einen Regulator gestellt werden müssen, leitet er für eine Anzahl bekannter Systeme die Gleichgewichtsgleichungen ab und untersucht, in wiefern die betreffenden Constructionen den aufgestellten Forderungen entsprechen. O.

J. H. Jellett. A treatise on the theory of friction. Dublin.

Der Gegenstand dieses bedeutenden Werkes ist die Entwickelung des Artunterschiedes zwischen der Reibungskraft und den bewegenden Kräften, welcher Unterschied in der Regel von den Bearbeitern der rationalen Mechanik vernachlässigt worden

st. Ausgehend von den gebräuchlichen Axiomen über die Reiungstheorie, die durch das Experiment festgestellt werden müssen, ihrt der Verfasser mit mathematischer Schärfe zu wichtigen hysikalischen Folgerungen. So gelangt er von der Theorie des Tiderstandskegels und von dem bekannten Princip aus, dass die ichtung der Reibungskraft wirkt auf ein bewegendes Theilchen, ı dem wichtigen Resultat, dass wenn ein ruhendes Theilchen ch zu bewegen beginnt, jene Reibung mit einem Male seine ichtung ändert, so dass die Richtungen der statischen und ynamischen Reibung nicht nothwendig dieselben sind. Unter er Voraussetzung, dass die Reibungskraft unbestimmt ist, beandelt der Verfasser einige sehr allgemeine Probleme über leichgewicht von Systemen, die durch die Reibung beeinflusst rerden, und gelangt zu Ungleichungen als Bedingung des Gleichewichts, statt der Gleichungen, welche sich ergeben würden, renn alle Kräfte bestimmt wären. Dieses ist der Inhalt von Cap. III. Das allgemeine Problem lautet so: „Von einer Anzahl naterieller Theilchen liegt ein jedes auf einer rauhen Oberfläche, lle sind untereinander durch bekannte Relationen verbunden nd durch gegebene Kräfte beeinflusst; man soll untersuchen, ob ine gegebene Anzahl dieser Theilchen in der äussersten Gleichewichtslage ist.“

In dem die Dynamik behandelnden Theile des Werkes ist r Unterschied zwischen Reibung und bewegenden Kräften aufcht erhalten. Hier finden sich einzelne sehr elegante Formeln, e auf einen starren Körper anwendbar sind, wenn die Beweng eine blosse Rotation ist, z. B. die Formel

$$\frac{d}{d\vartheta}(J\omega^2) = 2L,$$

› $d\vartheta$ das Differential des Winkels, der von dem rotirenden örper beschrieben wird, J das Trägheitsmoment um die Axe, die Rotationsgeschwindigkeit und L das statische Moment der n die Axe angebrachten Kräfte ist. Von dieser Formel werden rschiedene wichtige Anwendungen gegeben. Kapitel VI enthält ne elegante Discussion über „nothwendiges und mögliches Gleichewicht“ und giebt Regeln zur Bestimmung der Fälle, wo Gleich-

gewicht nothwendig und wo es möglich ist. Zahlreiche Beispiele erläutern die allgemeinen Principien; mit ihrer Zusammenstellung schliesst das Werk. Csy. (M.)

M. DE TILLY. Études sur le frottement. Première partie. Note relative au frottement de glissement sur les surfaces héliçoides réglées. Mém. de Belg. XXII. 1-32.

Der Verfasser verbessert verschiedene von Poncelet, Coriolis, Noble, Ferssen und Gerloff aufgestellte Formeln, die sich auf das Gleichgewicht einer Schraube und auf die Bewegung der Projectile in gezogenen Schusswaffen beziehen. Der Irrthum jener Geometer entspringt daher, dass sie stillschweigend oder ausdrücklich angenommen haben, dass die ganze Reaction der Schraubenmutter einzig aus einem normalen Druck und der Reibung besteht, während man ausserdem noch eine seitliche Reaction, die auf den vorigen senkrecht steht, in Rechnung ziehen muss. Insbesondere folgt aus der Analyse des Herrn Tilly, dass die gewöhnlichen Formeln zur Berechnung des Drucks in der Whitworth-Kanone ungenau sind.

Man macht in den auf obigen Gegenstand bezüglichen Rechnungen gewöhnlich noch verschiedene andere Hypothesen, die nicht immer zulässig sind. So ist es nicht erlaubt, den auf die ganze Breite des Schraubengangs vertheilten Druck als in einem Punkte concentrirt anzunehmen, ausser wenn jene Breite im Verhältniss zum innern Durchmesser der Spindel sehr gering ist. Jene Concentration des Drucks in einem Punkte ist zulässig: 1) wenn der Druck gleichförmig längs der Schraubenlinie vertheilt und im Innern der Mutter eine ganze Zahl von Umdrehungen ist, 2) wenn statt einer Schraubenlinie mehrere neben einander liegen, die auf jedem Querschnitt symmetrisch vertheilt sind.

Die Arbeit von Tilly schliesst mit einer sehr präcisen Unterscheidung über die verschiedene Art des Contactes.

Mn. (Wn.)

W. HOGG. Solution of question 3396. Educ. Times XVI. 41-42.

ıe **Stange** von gleichförmigem Querschnitt ruht innerhalb **reises, dessen** Ebene vertical ist. Finde die Lage, in der ibung grade Gleichgewicht bedingt. Hi.

WNSEND. On a construction in rigid dynamics. art. J. XII. 138-145.

Giebt eine Construction für die Darstellung der Grösse und ung der impulsiven Wirkung eines starren Körpers, der sich im Raume bewegt, gegen ein festes Hinderniss, an welches Punkt seiner Masse, vorher in Bewegung, plötzlich unbeweg- angeheftet wird. Cly. (O.)

St. Venant. Sur un complément à donner à une les équations présentées par M. Lévy pour les mouvenents plastiques qui sont symmétriques autour d'un nême axe. C. R. LXXIV. 1083-1087.

Unter den Gleichungen für die innere Bewegung plastischer er [cf. F. d. M. II. 723, III. 473] gilt für den Fall der Sym- um eine Axe die Gleichung:

$$4T^2+(N_r-N_z)^2 = 4K^2.$$

t nicht in allen Fällen richtig, sondern nur dann, wenn te und kleinste Normaldruck, beide in der Meridianebene chteten Punktes liegen. Ist dies nicht der Fall, so lautet chung: $2K$ ist gleich demjenigen von den folgenden ücken

$$2\sqrt{T^2+\left(\frac{N_r-N_z}{2}\right)^2},$$

$$N_w-\frac{N_r+N_z}{2}-\sqrt{T^2+\left(\frac{N_r-N_z}{2}\right)^2},$$

$$N_w-\frac{N_r+N_z}{2}+\sqrt{T^2+\left(\frac{N_r-N_z}{2}\right)^2},$$

grössten absoluten Werth hat; unter N_w ist der Fläch[illegible] der Meridianebene des betrachteten stel[illegible]rd dies daraus bewiesen, dass die kr[illegible]n einer Gleichung dritten Grades

sind, und dass die grösste tangentiale Druckcomponente ode dasselbe ist, die halbe Differenz der grössten und kleinste malcomponente gleich dem specifischen Coefficienten l plastischen Widerstandes sein muss. W

J. Boussinesq. Lois géométriques de la distrib des pressions dans un solide homogène et d soumis à des déformations planes. C. R. LXXIV. 2

J. Boussinesq. Sur l'intégration de l'équation dérivées partielles des cylindres isostatiques pro dans un solide homogène et ductile. C. R. L: 318-321, 450-454.

J. Boussinesq. Sur une manière simple de détern expérimentalement la résistance au glissement n mum dans un solide ductile homogène et isot C. R. LXXV. 254-257.

Die allgemeinen Gleichungen für die Vertheilung des Di und für die Bewegung plastischer Körper sind von St. Ve und Lévy früher aufgestellt (F. d. M. II. 722, III. 472). In vorliegenden Arbeit wird nun für den Fall, dass alle Bewe einer festen Ebene parallel ist, die Lösung des Problems be tend weiter geführt. Die normale und tangentiale Druckcor nente auf ein beliebiges Linienelement sind auf bekannte W abhängig von den auf zwei rechtwinklige Linienelemente, par x und y, ausgeübten Druckkräften. Unter allen durch e Punkt gehenden Linienelementen giebt es zwei, für welche tangentiale Componente verschwindet. Der Verfasser denkt nun in der festen Ebene zwei Systeme von Curven, im Ra also zwei Systeme von Cylindern [isostatische Cylinder gena von der Beschaffenheit, dass für jedes Curvenelement irgend e Curve der beiden Systeme die tangentiale Componente versch det. Beide Systeme sind orthogonal. Sind ϱ und ϱ_1 ihre riablen Parameter und ist

$$h^2=\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}\right)^2=p^2+q^2;\ h_1^2=\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\right)^2=p_1^2\cdot$$

ind die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts, auf das
e System ϱ, ϱ_1 bezogen, integrabel und geben, unter X und
willkürliche Functionen verstanden, folgende Werthe für die
malen Druckcomponenten F, F_1 je eines Curvenelements:

$$F = K\left(2\log\frac{h_1}{X_1(\varrho_1)}+1\right),\ F_1 = K\left(2\log\frac{h}{X(\varrho)}+1\right);$$

$$\frac{h}{X(\varrho)}\cdot\frac{h_1}{X_1(\varrho_1)} = 1;$$

in ist K der specifische Widerstandscoefficient. Ersetzt man
Parameter ϱ, ϱ_1 durch zwei andere, so dass

$$= X(\varrho)d\varrho',\ d\varrho_1 = X_1(\varrho_1)d\varrho'_1,\ \text{also}\ \frac{h}{X(\varrho)} = h',\ \frac{h_1}{X_1(\varrho_1)} = h'_1,$$

lässt dann die Accente fort, so werden die Gleichungen:

$$F = K(1-\log h^2),\ F - F_1 = 2K,\ hh_1 = 1.$$

letzte Gleichung $hh_1 = 1$ bedeutet, dass die Flächenelemente,
von je vier Bogenelementen ϱ, ϱ_1 begrenzt werden, in der
zen Ebene gleichen Inhalt haben; und dies ist die Bedingung
Möglichkeit, dass ein System von orthogonalen Cylindern
tatisch ist. Diese Bedingung geht durch Transformation über in:

$$\cdot\left(\frac{p}{p^2+q^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{p^2+q^2}\right)=0\ \text{oder}\ (p^2-q^2)(r-t)+4pqs=0,$$

m r, t, s die zweiten Differentialquotienten von ϱ sind. Durch
führung einer neuen Function ϖ von der Beschaffenheit, dass

$$x = \frac{\partial\varpi}{\partial p},\ y = \frac{\partial\varpi}{\partial q},$$

l durch die Substitution $p = h\cos\alpha$, $q = h\sin\alpha$ geht die letzte
ichung über in folgende:

$$\frac{\partial^2\varpi}{\partial\alpha^2} = h^2\frac{\partial^2\varpi}{\partial h^2} - h\frac{\partial\varpi}{\partial h}.$$

s allgemeine Integral dieser Gleichung ist eine unendliche
mme von Ausdrücken von der Form:

$$\left(Ae^{\alpha\sqrt{n^2-1}} + Be^{-\alpha\sqrt{n^2-1}}\right)(Ch^{1+n}+Dh^{1-n}).$$

ser Ausdruck wird unter Annahme einer speciellen Grenz-
lingung etwas weiter behandelt.

In der folgenden Arbeit geht der Verfasser zu den Gleichun-
ı für die Bewegung über, während vorher nur die Druckver-

theilung im Gleichgewichtszustande betrachtet war. Er zeigt, dass die Bedingung der Incompressibilität darauf hinauskommt, dass für jeden Punkt die Geschwindigkeitscomponente, parallel der Normale des einen isostatischen Cylinders, gleich ist der partiellen Ableitung einer gewissen Function ψ nach der Normale des andern durch den Punkt gelegten Cylinders; d. h.

$$U = h_1 \frac{\partial \psi}{\partial \varrho_1}, \quad U_1 = -h \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}.$$

Für ψ jedoch ergiebt sich die nicht integrable Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho_1^2} = h^4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2}.$$

Der letzte Theil endlich enthält Vorschläge zu einer experimentellen Untersuchung der Frage, ob K wirklich eine Constante ist.

Wn.

DE SAINT-VENANT. Sur l'intensité des forces capables de déformer, avec continuité, des blocs ductiles, cylindriques, pleins ou évidés, et placés dans diverses circonstances. C. R. LXXIV. 1009-1017.

Der Verfasser stellt als Princip, von dem er bei der Bestimmung der Intensität ausgeht, auf, dass in jedem Punkte die grösste der Differenzen zwischen den normalen Druckkräften auf die verschiedenen Seiten gleich sei (für die Einheit der Oberfläche) $2K$, dem Doppelten des Coefficienten des plastischen Widerstandes. Davon ausgehend, erledigen sich die Fälle des rechtwinkligen Parallelepipedons, des Prisma und des vollen Cylinders mit beliebiger Basis ohne Schwierigkeit. Beim hohlen Cylinder ist die Berücksichtigung der Geschwindigkeiten in den verschiedenen Theilen des Körpers nöthig. Es gelingt dem Verfasser aber auch hier, mit Hülfe der früher gewonnenen Resultate, das Problem zu lösen.

O.

E. COMBESCURE. Sur un procédé d'intégration, par approximations successives, d'une certaine équation de la plasticodynamique. C. R. LXXIV. 1041-1041.

Betrifft die näherungsweise Integration gewisser simultaner rtieller Differentialgleichungen, zu denen de Saint-Venant in ner Arbeit über Plasticodynamik gelangt ist (siehe F. d. M. II. 722, III. 471). Die Integration wird durch Entwickelung in eihen bewirkt, für welche die Convergenzbedingungen wohl sehr hwierig festzustellen sein dürften. Mr.

B. Hydrodynamik.

A. Bjerkness. Mouvement simultané de corps sphériques variables dans un fluide. Darboux Bull. III 198.

Siehe F. d. M. III. p. 479-481. O.

Cockle. On the motion of fluids. Quart. J. XII. 19-34.

Schluss der Arbeiten in Band X. p. 311 und XI. 156; siehe d. M. II. p. 729, III. p. 473. Cly. (O.)

oudsky. Sur les mouvements libres d'un fluide incompressible. Mém. d. l. Soc. Phil. de Moscou 1872.

Eine (nicht in einem Gefässe eingeschlossene) Flüssigkeit nn durch Bewegungen erregt werden, bei denen der Druck alle Theilchen beständig Null ist. Der Verfasser giebt diesen wegungen den Namen „freie Bewegungen" und leitet die Begungen ab, denen die Kräfte und Anfangsgeschwindigkeiten erworfen sein müssen, damit solche Bewegungen stattfinden. ter Anderem beweist er, dass, wenn die Flüssigkeit nur einer iehenden Kraft unterworfen ist, deren Richtung beständig ch einen festen Punkt geht, und deren Grösse der Entfernung diesem Punkte proportional ist, eine solche Bewegung nicht treten kann. Z. (O.)

non Moseley. On the steady flow of a liquid. Phil. Mag. 1872.

Unter gleichförmigem Strom der Flüssigkeit wird in dieser Arbeit derjenige Zustand der Bewegung verstanden, den sie erlangen würde in einem Canal von gleichförmigem Durchschnitt, dessen innere Fläche durchweg dieselbe Reibung bietet, dessen Richtung gerade und dessen Gestalt constant bleibt. Die bei der Untersuchung benutzte Fundamentalgleichung lautet:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4.$$

U ist die Arbeit, die in der Zeiteinheit auf die Flüssigkeit ausgeübt wird, welche durch den Druck derselben in dem Reservoir in die Röhre eintritt. U_1 ist gleich der Arbeit, welche in der Zeiteinheit durch die Flüssigkeit fortgeführt wird, welche vom Ende der Röhre herfliesst. U_2 ist gleich der Arbeit, die aufgewendet wird für die verschiedenen Widerstände, welche sich dem Eintritt der Flüssigkeit aus dem Reservoir in den Canal entgegensetzen. U_3 ist die Arbeit, welche erfordert wird um die Reibung in der Röhre zu überwinden. U_4 ist die innere Arbeit des Widerstandes der Schichten der Flüssigkeit in Bezug auf das Fliessen jeder einzelnen Schicht über die Oberfläche der nächst folgenden. Man durchschneide die Flüssigkeit durch eine zur Strömung senkrechte Ebene und nehme den Punkt als Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, wo dasjenige Flüssigkeitstheilchen (oder Fädchen) ist, das mit der grössten Geschwindigkeit hindurchgeht; die z-Axe sei horizontal. x, y seien die Coordinaten eines Punktes, wo irgend ein anderes Flüssigkeitsfädchen die Ebene durchschneidet, und v seine Geschwindigkeit. Dann ist, wie bewiesen wird, die Fundamentalgleichung äquivalent der folgenden:

$$w\left(\frac{h}{y} + l\sin i\right)\iint v\,dx\,dy = \frac{w}{2g}\iint v^3\,dx\,dy + U_3$$
$$-\iint \mu l \left\{\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\right)\right\} dx\,dy.$$

Differentiiren wir zweimal und beachten, dass

$$\frac{d^2 U_3}{dx\,dy} = 0$$

ist, so erhalten wir:

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{w v^3}{2\mu g l} - \frac{w}{\mu l}\left(\frac{h}{y} + l\sin i\right) v,$$

id

$$\frac{w}{2\mu g l} = \alpha^2, \quad \frac{w}{\mu l}\left(\frac{h}{y} + l\sin i\right)v = \beta^2.$$

ie Lösung dieser Gleichung ist:

$$v^2 = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{1 - \left\{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha v_0}\right)^2\right\} e^{2\beta^2}\{x + \varphi(y-x) - \varphi(0)\}}.$$

hliesslich werden die unter den gemachten Voraussetzungen eoretisch gewonnenen Resultate mit den experimentellen Erbnissen verglichen. Csy. (M.)

c ST.-VENANT. Rapport sur un mémoire de M. KLEITZ, intitulé: Études sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement, et application à l'hydrodynamique. R. C. LXXIV. 426-438.

Navier und Poisson hatten schon früher für die regelmässigen ewegungen von Flüssigkeiten mit Rücksicht auf die innere Reiung folgende Formeln abgeleitet, welche die Abhängigkeit der if drei rechtwinklige Flächenelemente ausgeübten normalen und ngentialen Druckkräfte von den 3 Geschwindigkeitscomponenten v, w darstellen:

$$p_{xx} = p - 2\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}, \quad p_{yy} = p - 2\varepsilon\frac{\partial v}{\partial y}, \quad p_{zz} = p - 2\varepsilon\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$p_{yz} = -\varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad p_{zx} = -\varepsilon\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$p_{xy} = -\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$p = \tfrac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}), \quad \text{da} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

erzu kommen noch drei Gleichungen zwischen den inneren uckkräften und den äussern Kräften, ähnlich den elastischen eichungen. In der obigen Formel bezeichnet p_{xx} die x-Comnente des Drucks auf ein Flächenelement, das zur x-Axe senk-

recht ist, etc. Während aber Navier ε für die ganze Flüssigl
masse als constant annahm, ist nach St.-Venant ε bei
regelmässiger Bewegung der Flüssigkeit nur für jeden F
constant, ändert sich aber von Punkt zu Punkt. Der Beweis
Richtigkeit obiger Formeln für jede in Bewegung befind
Flüssigkeitsmasse bildet den ersten Theil der Arbeit von Kl
über welche hier ein Bericht von St.-Venant vorliegt. Di
Discussion obiger Formeln leitet der Verfasser sodann ab, (
die von einigen Autoren für die Reibung gemachte Annal
$f = \varepsilon_m \left(-\frac{du}{dn}\right)^m$, wo n die Normale der reibenden Fläche, ε_m e
Constante bedeutet, oder die Annahme, dass f aus einer Sum
ähnlich gebildeter Ausdrücke bestehe, mit den obigen Form
unvereinbar ist. Es folgen einige geometrische Sätze über d
Vertheilung des Drucks um einen Punkt herum, z. B. dass d
Ebene, für welche die tangentiale Componente ein Maximum i
den Winkel zwischen den beiden Ebenen halbirt, auf welche d
grösste und kleinste Normaldruck ausgeübt wird, etc. Die Formel
werden dann auf den Fall der gleichförmigen Bewegung ang
wandt, wo die Schwerpunkte aller Flüssigkeitselemente sich gera
linig, parallel und mit constanter (aber von Punkt zu Punl
variabler) Geschwindigkeit bewegen. Ueber diese Bewegu
werden einige Sätze aufgestellt, und es wird zur Vereinfachu
der Rechnung ein krummliniges orthogonales Coordinatensyste
eingeführt, die Curven gleicher Geschwindigkeit, die Curven,
denen die Reibung gleich Null ist, endlich die Richtung der p
rallelen Wasserfäden. In dem vorliegenden Auszuge ist über d
Gang der Rechnung nichts mitgetheilt; wir übergehen daher d
einzelnen Sätze. Bei der nicht gleichförmigen Bewegung wi
ähnlich verfahren. Da jedoch die Wasserfäden hier nicht paral
sind, werden als Coordinaten eingeführt die Tangente an ei
solchen Faden und zwei beliebige, auf einander senkrechte N
malen des Fadens. Zum Schluss wird die permanente Beweg
d. h. die, bei der ein bestimmter Punkt des Raumes imme
demselben Bewegungszustande ist, behandelt. Aus der a
meinen Theorie werden für diesen Fall Näherungsformeln a

tet, die sich von den gebräuchlichen durch Hinzufügung zweier
uen Glieder unterscheiden.

Die Arbeit des Herrn Kleitz enthält ausserdem Speculationen
er die Bestimmung von ε, die Herr St.-Venant nicht für richtig
ält (cf. das folgende Referat). Wn.

E St.-Venant. Sur l'hydrodynamique des cours d'eau.
C. R. LXXIV. 570-577, 649-657, 693-701, 770-774.

Der Verfasser giebt eine historisch-kritische Uebersicht über
ie Formeln, betreffend die Druckvertheilung in einer bewegten
lüssigkeit, falls man die Reibung mit berücksichtigt (siehe das
orhergehende Referat). Für die regelmässigen Bewegungen sind
ne von Navier aufgestellten Formeln durch die Erfahrung be-
ätigt; für nicht regelmässige Bewegungen gelten sie ebenfalls,
ir dass dann ε für jeden Punkt zwar constant, aber von Punkt
Punkt variabel ist. Der Verfasser bespricht nun die Versuche
n Kleitz und Lévy, den Werth von ε theoretisch zu bestimmen.
e Versuche beruhen wesentlich auf der Annahme, dass Navier
i der Entwickelung obiger Gleichungen die Annäherung nicht
it genug getrieben hat. Der eine der beiden eben genannten
toren berücksichtigt bei seiner Entwickelung höhere Potenzen
r relativen Geschwindigkeiten, der andere die höheren Ablei-
gen der absoluten Geschwindigkeiten. Beide Methoden hält
rr St.-Venant für ungeeignet, die Aufgabe zu lösen, theils
gen Bedenken gegen die Ableitung, theils weil die schliess-
hen Formeln experimentell nicht bestätigt werden. Nach St.-
nant's Ansicht muss man folgendermaassen verfahren: Für
gelmässige Bewegungen ist ε in der ganzen Flüssigkeit als
nstant anzusehen. Jede Störung der Regelmässigkeit aber,
B. jeder Wirbel, ändert den Werth von ε. Man suche daher,
lche Umstände die Bildung derartiger Wirbel bewirken können.
er ist namentlich die Beschaffenheit der Wand des Canals zu
nnen. Ueber den Einfluss solcher Störungen auf den Werth
n ε muss man dann gewisse Annahmen machen, deren Recht-
tigung die Vergleichung des Resultats mit der Beobachtung
fern muss. Diesen Weg, den Boussinesq in einer im vorigen

Jahresbericht erwähnten Arbeit (F. d. M. III. p. 487) eingeschl
gen, hält St.-Venant für den allein zum Ziele führenden.

Wn.

E. Phillips. Sur l'écoulement d'un liquide sortant d'i réservoir à niveau constant par un grand orifice mince paroi. C. R. LXXV. 1733-1735.

Beim Ausfluss des Wassers durch eine grössere Oeffnung Form eines Rechtecks, von dem zwei Seiten horizontal sind, o genauer, wenn der contrahirte Querschnitt ein solches Recht bildet, erhält man bei Berechnung der Ausflussmenge fast ge dasselbe Resultat, mag man nun auf die Verschiedenheit der (schwindigkeit der einzelnen Wasserfäden Rücksicht nehmen, o mag man die grosse Oeffnung ebenso behandeln wie eine s kleine Oeffnung, falls man nur als gemeinsame Geschwindigk die desjenigen Wasserfadens nimmt, der durch den Schwerpun geht. Dieser Satz, der für ein Rechteck und eine kreisförmi Oeffnung bekannt ist, wird hier für eine Oeffnung von beliebige Form bewiesen, wenn nur jene Oeffnung durch eine horizontale in ihrer Ebene liegende Linie symmetrisch getheilt wird.

Wn.

Th. d'Estocquois. Note sur le mouvement de l'eau dans les déversoirs. C. R. LXXIV. 1247-1249.

Unter der Annahme, dass ein Geschwindigkeitspotential φ existirt, und dass dasselbe nur von zwei Dimensionen abhängt, findet bekanntlich die Gleichung statt:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

Eine der möglichen Lösungen derselben ist

$$\varphi = B(y^2-x^2).$$

Die Flüssigkeitsfäden werden dann gleichseitige Hyperbeln [$xy=$ const.]. Der Verfasser wendet diese Formeln auf eine Schleu an, bei der eine schwere Flüssigkeit zuerst auf einer horizontale dann auf einer geneigten Ebene fliesst und von letzterer fr

ıerabfällt [y ist dabei vertical, x in der Richtung der Bewegung les Wassers gerechnet], und bestimmt dann experimentell die in len obigen Gleichungen auftretenden Constanten und die Lage les Anfangspunktes. Wn.

A. Steen. Om tunge Vadskers Udströmning af Sideaabninger. Zeuthen Tidsskr. (3) II. 145.

Der Verfasser stellt eine sehr einfache Näherungsformel auf, um die Ausflussgeschwindigkeit einer Flüssigkeit durch eine seitliche Oeffnung zu bestimmen. Hn. (Wn.)

J. Boussinesq. De l'influence des forces centrifuges sur l'écoulement de l'eau. C. R. LXXIV. 1026-1030. Inst. XL. 1955.

J. Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courantes. C. R. LXXV. 1011-1015.

Da im nächsten Jahresberichte ein ausführliches Referat des Herrn St.-Venant über die Arbeiten, von denen hier nur kurze Auszüge vorliegen, zu besprechen sein wird, so verschieben wir unser Referat bis dahin. Wn.

J. Boussinesq. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. Liouville J. (2) XVII. 55-109.

Ueber einen Theil der vorliegenden Arbeit ist bereits im vorigen Jahresbericht (F. d. M. III. p. 486-487) nach einem in den Comptes rendus enthaltenen Auszuge berichtet. Wir knüpfen an jenen Bericht, in dem die zu Grunde gelegten Voraussetzungen und die Methode der Entwickelung angegeben sind, an, indem wir nur bemerken, dass es dort p. 486 in der letzten Zeile heissen muss: auf einer Verticalen $y = \text{const.}$, während x der horizontalen Länge des Kanals parallel ist. Bezeichnet H die constante Kanaltiefe, h die (sehr kleine) Erhebung der Welle über dem

ursprünglichen Niveau, g die Constante der Schwerkraft, so jene Methode in erster Annäherung auf die Differentialgleicl

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 h}{\partial x^2},$$

während die weitere Annäherung ergiebt:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + gH \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right).$$

Hierzu kommt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit w die (chung:

$$(2) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hw)}{\partial x} = 0.$$

Letztere Gleichung drückt aus, dass jedes Element der W beim Fortschreiten dasselbe Volumen behält. Aus diesen G chungen wird nun mit Vernachlässigung aller Glieder, die vorliegende Näherung übersteigen, folgende Relation abgeleit

$$(3) \quad h(w - \sqrt{gH}) - \frac{\sqrt{gH}}{2}\left(\frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) = \chi(x + t\sqrt{gH}),$$

wo χ eine willkürliche Function bezeichnet. Nimmt man nun Bezug auf den Anfangszustand an, dass für $t = 0$ h und sei Ableitung nach x verschwinden für alle positiven x, so ist f alle Theilchen, die dem vorderen Ende der fortschreitend Wellenerhebung nahe sind, $\chi = 0$, und aus der Gleichung (folgt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Elements d Welle:

$$(3a) \quad w^2 = g\left(H + \frac{3h}{2} + \frac{H^2}{3h}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right),$$

so dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auch von der Krü mung der freien Oberfläche abhängt. Es folgen nun noch ei Umformungen der Gleichung (2) für h, ferner die Formeln, d welche bei der hier durchgeführten Näherung die Geschwin keiten und der Druck bestimmt werden.

Der folgende Abschnitt behandelt die Bewegung des Sch punkts der ganzen Welle. Das Quadrat der Fortpflanzung schwindigkeit dieses Punktes ist $= g(H + 3\eta)$, wo η die I des Schwerpunktes über dem ursprünglichen Niveau ist; constant, so dass der Schwerpunkt sich auf einer geraden I

ewegt. — Von besonderem Interesse ist diejenige Welle, bei ler alle Theilchen sich mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen so dass w constant ist), und die bei ihrer Fortpflanzung nahezu dieselbe Form behält (onde solitaire). Die freie Oberfläche dieser Welle wird bestimmt durch die Gleichung

$$h = \frac{4h_1}{2 + e^{\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-wt)} + e^{-\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-wt)}},$$

wenn $w^2 = g(H+h_1)$ der constante Werth von w ist. Der Schwerpunkt dieser Welle liegt in $\frac{1}{3}$ ihrer Höhe.

Moment der Instabilität nennt ferner der Verfasser folgendes Integral:

$$M = \int_{x_0}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{3h^3}{H^3} \right] dx.$$

Dasselbe ist ein Minimum für die onde solitaire. Für irgend ine andere Welle kann der Ueberschuss des wirklichen Werthes on M über den Minimalwerth betrachtet werden als Maass der bweichung der Gestalt dieser Welle von der onde solitaire, soie auch als Maass für die Deformation, welche die Welle bei rer Fortpflanzung erleidet. Weitere Discussionen und Erläurungen der obigen Formeln bilden den Schluss der Arbeit.

Wn.

E PAMBOUR. Sur la théorie des roues hydrauliques: théorie de la roue à réaction. C. R LXXIV. 445-449, 607-610. LXXV. 131-134, 1757-1761.

Die Arbeit enthält eine detaillirte Berechnung des Nutzeffectes der Reactionsräder. Der Verfasser verfährt dabei so, dass er die einzelnen auf das Rad wirkenden Kräfte in Rechnung zieht, den directen Stoss des Wassers, die Centrifugalkraft des Rades, die der Schaufeln, endlich die Reactionskraft, die durch die Geschwindigkeit hervorgebracht wird, welche das Wasser beim Austritt aus den von den Schaufeln gebildeten Kanälen besitzt. Da, wie die Erfahrung zeigt, das Reactionsrad sehr bald eine gleichförmige Bewegung annimmt, so müssen die wirkenden Kräfte den durch Reibung und Widerstand hervorgebrachten verzögernden Kräften

in jedem Augenblick das Gleichgewicht halten. Aus der so auf gestellten Gleichung ergiebt sich unmittelbar der Nutzeffect. Besonders erläutert wird bei der Ableitung die Centrifugalkraft des Rades und der Uebergang von der absoluten Geschwindigkeit des wirkenden Wassers zu seiner relativen Geschwindigkeit in Bezug auf das Rad. Im dritten Theile seiner Arbeit wendet der Verfasser seine Formel zu einer numerischen Rechnung an, deren Vergleichung mit den Beobachtungen zwar im Einzelnen grössere, im Mittel aber nur Abweichungen von 1 Procent giebt. Im letzten Abschnitt wendet sich der Verfasser gegen die bisher übliche Methode, den wirklichen Nutzeffect aus dem theoretischen durch Coefficienten, die der Beobachtung entnommen sind, zu ermitteln, ohne die einzelnen auf das Rad wirkenden Kräfte in Rechnung zu ziehen. Wn.

J. K. Abbott. Notes on the theory of the tides. Phil. Mag. 1872. Quart. J. XII. 7-16.

Die Arbeit enthält einen elementar-geometrischen Beweis für einige Erscheinungen der Meeresströmungen. Csy. (M.)

M. A. Challis. On the mathematical theory of atmospheric tides. Phil. Mag. 1872.

Der Verfasser leitet die Lösung des Problems der Luftströmungen aus den allgemeinen Gleichungen der Hydrodynamik her. Der Einfachheit wegen werden folgende Voraussetzungen gemacht: 1) Die innere Grenze der Atmosphäre ist eine Kugel, deren Radius gleich dem mittleren Radius der Erde ist; 2) der anziehende Körper ist der Mond, welcher sich ostwärts um die Erde in der Ebene des Aequators, in seinem mittleren Abstande und mit seiner mittleren Winkelgeschwindigkeit bewegt; 3) die Erde ist in Ruhe versetzt, während die relative Winkelgeschwindigkeit der Erde und des Mondes μ ist. Nun sei $udx + vdy + wdz$ ein vollständiges Differential $d\varphi$. Die Centrifugalkraft wird vernachlässigt. Ebenso wird der Einfluss der Temperaturveränderung vernachlässigt, so dass die Relation $p = a^2\varrho$ zwischen dem Druck p und der Dichtigkeit ϱ als in allen Punkten gültig angenommen wird.

ch diesen Voraussetzungen wird die Untersuchung auf folgende ݁annten Differentialgleichungen basirt:

$$\frac{d^2\varphi}{a^2 dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

$$-\frac{a^2(d\varrho)}{\varrho} = x\,dx + y\,dy + z\,dz - d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Csy. (M.)

M. Guldberg. Theorien for Vandets og Luftens Strömninger paa Jordens Overflade. Polyt. Tidsskr. 1872. 1-9.

Der Verfasser giebt eine Uebersicht über Arbeiten von Colng (s. F. d. M. III. p. 488); sodann eigene Untersuchungen. : beschäftigt sich mit dem Golfstrome und mit der Bewegung :r Luft bei Orkanen. Für das letzte Phänomen wird eine Formel ıfgestellt. L.

'. M. Rankine. Sur les roulis des navires. Mondes (2) XXVII. 611-613.

Auszug aus einer Mittheilung, die Herr Rankine dem Meeting r Naval Architects zu London im März 1872 gemacht hat.

Herr Froude hat in den Transactions de l'Institut des navals :hitects 1861 einen Ausdruck gegeben für die Neigung eines f bewegtem Meer rollenden Schiffes gegen den Horizont. Diese rmel heisst:

$$\theta_s = \theta_m \frac{T_m^2}{T_m^2 - T_s^2} + A \sin 2\pi \frac{(t+a)}{T_s},$$

' T_m die Dauer der Oscillation der Welle, T_s die Dauer einer llständigen Oscillation des Schiffes, das im ruhigen Wasser .lt, t die Zeit gerechnet von dem Augenblick, wo sich das hiff auf der Spitze des Berges oder in der Tiefe des Thales ıer Welle befindet, θ_m die Neigung der Welle zur Zeit t, θ_s dlich die Neigung des Schiffes gegen den Horizont zur selben it bedeutet, A und a ferner Constanten sind. Herr Rankine t nun nach dem vorliegenden Auszug des Herrn Leclert aus ıer Mittheilung den Fall betrachtet, wo ein Schiff, das anfängh unbeweglich ist, den Stoss einer Welle zur Zeit t empfängt.

Es finden sich indess hier nur kurze Notizen über die gewonnenen Resultate. O.

KÜLP. Das Verhältniss der Wassermengen bei sinkendem und constantem Niveau. Grunert Arch. LIV. 207-208.

Der Verfasser bemerkt, dass die theoretische Zeitdauer, in der ein und dieselbe Wassermenge bei constantem und sinkendem Niveau entfliesst, beim Experiment sich nicht gleich ergebe. Er lässt daher das Behältniss sich nicht völlig entleeren, sondern sucht das Verhältniss der Wassermengen in ein und derselben Zeit bei constantem und sinkendem Niveau. Dabei findet er

$$\frac{M_v}{M_i} = \tfrac{1}{2}\left[1+\sqrt{\frac{h_1}{h}}\right].$$

O.

J. HERVERT. Ueber transversal schwingende Flammen. Pogg. Ann. CXLVII. 590-604.

Der Verfasser betrachtet eine unendlich dünne Flamme (leuchtende Linie), welche aus aufeinander folgenden glühenden Kohlentheilchen besteht. Er nimmt 1) an, dass ein Kohlentheilchen an der Bewegung der umgebenden Luft (die als einfach periodisch vorausgesetzt wird), mit der ganzen Geschwindigkeit theilnimmt, 2) dass die Beschleunigung des glühenden Theilchens proportional ist der Differenz der Luftgeschwindigkeit und seiner eignen Geschwindigkeit. Für beide Fälle ergeben sich einfache Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integration unmittelbar ersichtlich ist. Wn.

Capitel 5.

Potentialtheorie.

TH. KÖTTERITZSCH. Beitrag zur Potentialtheorie. Schlömilch Z. XVII. 232-244, 257-313.

Der Verfasser bespricht in § 1 die allgemeinste Form, welche die Lösung der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ unter den bekannten

er Potentialtheorie auftretenden Grenz- und Stetigkeitsbe-
ıngen besitzt, und stellt als solche das Potential

$$\int \frac{f\,dw}{r}$$

· mit Masse belegten Oberfläche hin, indem er sich dabei auf
ı in seinem „Lehrbuch der Electrostatik" bewiesenen Satz
t, wonach das Potential eines mit Masse erfüllten Raumes
ər reducirt werden könne auf das einer mit Masse belegten
schlossenen Fläche. Hiergegen ist nun, ganz abgesehen
den bedenklichen Seiten in dem Beweise des gedachten
es, zu bemerken, dass es einerseits Functionen giebt, welche
characteristischen Eigenschaften eines Potentials besitzen und
eine solche Reduction nicht zulassen (vergl. Christoffel: Zur
ɔrie der einwerthigen Potentiale, Borchardt J. LXIV.), und
es andererseits auch homogene Körper, z. B. den Ringkörper,
t, für welche dasselbe gilt. In § 2 wird nach Besprechung
bekannten allgemeinen Eigenschaften der Niveauflächen die
ührung krummliniger Coordinaten behandelt. Der Verfasser
lt hierzu die Schaar der Niveauflächen und die beiden Flächen-
ıaren, welche einander und die erstgenannte unter rechten
keln schneiden, obwohl dies nicht immer zulässig ist. Zwar
t Herr Kötteritzsch einen Beweis dafür, dass zu einer Niveau-
ıenschaar immer zwei orthogonale Flächenschaaren existiren,
ssen folgt die Unrichtigkeit dieses Beweises schon einfach
ıus, dass derselbe ohne Weiteres auch auf eine ganz beliebige
chenschaar anwendbar sein würde. Deshalb sind vor der
d die weiteren Entwickelungen nur für solche Potentiale gül-
deren Niveauflächen Theile eines Systems von Orthogonal-
ıen sein können.

Bezeichnen nun α, β, γ die krummlinigen Coordinaten eines
ktes und entsprechen der Gleichung $\alpha = \text{const.}$ die Punkte
r Niveaufläche, so erhält man für die reciproke Entfernung
R zweier Punkte die Relation

$$\frac{1}{R} = F(\alpha_a, \beta_a, \gamma_a, \alpha, \beta, \gamma) = F\left(\frac{\alpha_a}{\alpha} z, \beta_a, \gamma_a, z, \beta, \gamma\right),$$

z einen von der Summe der wirkenden Massen abhängigen

Factor bedeutet. Unter der Voraussetzung, dass für $r = \infty$ $\lim rV$ einen von Null verschiedenen Werth besitze, ist, wenn die Fläche α_a die Fläche α umschliesst, $\alpha_a : \alpha < 1$, und man kann sich dann die Aufgabe stellen, die Grösse $1 : R$ nach Potenzen von $\frac{\alpha_a}{\alpha}$ zu entwickeln. Mit der Lösung dieser Aufgabe beschäftigt sich der Hauptheil der vorliegenden Arbeit (§ 3—6). In Betreff der verschiedenen hierbei in Anwendung kommenden Methoden und Sätze muss auf die Abhandlung selbst verwiesen werden, da dieselben eine auszugsweise Darstellung nicht zulassen. Es mag hier nur erwähnt werden, dass die betreffenden Entwicklungscoefficienten eine ganze Reihe von Eigenschaften gemeinsam haben, zu denen sich in der Theorie der Kreis- und Kugelfunctionen die Analoga finden. Den Schluss der Arbeit bildet eine Anwendung der entwickelten Sätze auf das Potential einer gleichförmig mit Masse belegten geradlinigen Strecke. Die Niveauflächen sind in diesem Falle confocale Rotationsellipsoide.

B.

H. de la Goupillière. Sur la transformation du potentiel par rayons vecteurs réciproques. Mondes (2) XXVII. 71-73.

Ueber diese Arbeit ist nach einem Abdruck in den C. R. LXXIII. 1438-1440 bereits im 3ten Bd. d. F. d. M. p. 496 referirt worden.

O.

J. Todhunter. Note relating to the attraction of spheroids. Proc. of Lond. XX. 507-517.

In einer Abhandlung über die Attraction der Sphäroide, welche in der Connaissance des tems für das Jahr 1829 veröffentlicht ist, zeigte Poisson, dass gewisse wichtige Formeln richtig seien bis auf die dritte Ordnung incl. der kleinen Normalgrösse. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, die Richtigkeit der Formel für alle Ordnungen der kleinen Grösse nachzuweisen. Die Resultate sind in zwei Sätzen enthalten, in einem aus der

nentaren Algebra und einem aus der Theorie der Laplace'-en Functionen. 1) Setzt man

$$\frac{1}{+3)r^{h+1}}\{(r+z')^{h+3}-r^{h+3}\}+\frac{r^h}{h-2}\{(r+z')^{-h+2}-r^{-h+2}\}=f(z)$$

. entwickelt nach steigenden Potenzen von z', so ist der Coef-nt einer jeden Potenz von z' gleich dem Product von $2n+1$ eine rationale Function von h^2+h. 2) Ist ξ' eine Laplace'-e Function der gebräuchlichen Variabeln μ' und ψ', und ξ selbe Function von μ und ψ, und setzt man $r<\xi'$ voraus, ist

$$\Sigma\int_0^{4\pi}f(\xi')P'_n d\omega'$$

e Function von ξ und seinen Differentialquotienten, welche ξ^2 Factor enthält, also mit ξ verschwindet. Cly. (M.)

TOWNSEND. On the attraction of the ellipsoid for the law of the inverse fourth power of the distance. Quart. J. XII. 66-69.

Der Verfasser bemerkt, dass, seines Wissens, die besonderen rtheile, welche das Problem der Anziehung des Ellipsoids bei ier Anziehung nach der umgekehrten vierten Potenz der Ent-nung für seine Lösung darbietet, noch wenig beachtet sind. e geometrischen Eigenschaften, von denen die Hauptresultate hängen, sind leicht und elementar, und die Formeln, durch elche sie ausgedrückt werden (verschieden von denen für den chtigeren Fall des umgekehrten Quadrates der Entfernung), sind ist einfache algebraische Functionen einiger darin enthaltenen össen. Die Resultate schliessen die folgenden ein: Ein festes mogenes Ellipsoid — Kraft umgekehrt wie die vierte Potenz r Entfernung —:

1) Für einen innern Punkt. a) Die Anziehung ist normal dem coaxialen Ellipsoid durch n Punkt, ähnlich der Ober-che, welche die Masse begrenzt.

2) Für einen äussern Punkt. a) Die Anziehung ist normal zu dem coaxialen Ellipsoid, confocal mit der Oberfläche, welche die Masse begrenzt.

b) Für verschiedene innere Punkte variirt die Anziehung umgekehrt wie die Senkrechte von dem Punkt auf die Polarebene in Beziehung auf die Oberfläche, welche die Masse begrenzt.

c) Die inneren Oberflächen des Gleichgewichtes sind coaxiale Ellipsoide, ähnlich der Oberfläche, die die Masse begrenzt.

b) Für verschieden Punkte auf demselben c Ellipsoid variirt die A direct wie die Senkre Mittelpunkt auf die Ta ebene zu dem Mittelpu

c) Die äusseren Ob des Gleichgewichtes sinc Ellipsoide, confocal mit fläche, die die Masse l

Cly.

E. Beltrami. Intorno ad una trasformazione di Dir Battaglini G. X. 49-52.

Der Verfasser giebt einfachere Ableitungen einer die bei der Herleitung allgemeiner Ausdrücke für die P function eines Ellipsoids von Herrn R. del Grosso in B G. VIII. p. 100 (siehe F. d. M. II p. 757) benutzt worde

G. S. Carr. Solution of question 3541. Educ. Tim 17-18.

Ein biegsamer Draht von constanter Dicke, desse Anziehungskräfte proportional dem umgekehrten Quad Entfernung ausüben, ist in der Form der Catacaustica ei rabel für Strahlen senkrecht der Axe gebogen; A_1, A_2, die Anziehungskräfte auf ein Theilchen im Brennpunkt, ganze Curve, für die Schleife und für den Theil der Curve, die grösste Anziehung nach dem Scheitel hervorbringt. B 1) dass $A_1 : A_2 : A_3 = 8 : 6\sqrt{3} : 19$ und 2) dass der Bog Curve, welcher vom Scheitel nach beiden Seiten bis z Winkelentfernung von 23° 44′ 2″ sich erstreckt, dieselbe An auf den Brennpunkt ausübt wie die ganze Curve.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Capitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

. C. WITTWER. Antikritik. Schlömilch Z. XVII. Litz. 98-99.

Bezieht sich auf die Bd. III. d. F. d. M. p. 500 besprochene :beit des Verfassers. Wn.

. SCHRAMM. Allgemeine Bewegung der Materie als Grundursache aller Naturerscheinungen. 1. Abth. Wien. Braumüller.

Eine Recension des Herrn Kötteritzsch, der die Ansichten des erfassers als ganz verfehlt bezeichnet, findet sich Schlömilch Z. VII. Litz. 99-101. Wn.

ANDL. Ueber die Constitution der Flüssigkeiten. Wien. Ber. LXV. 377-389.

Die Ansicht des Verfassers über die Constitution der Flüssig- iten schliesst sich an die bekannte, am deutlichsten durch ausius ausgesprochene an, dass die Moleküle der Flüssigkeiten h vermöge ihrer Molekularbewegung beständig nebeneinander rbeidrängen. Doch glaubt Herr Handl, dass dabei ihre mittlere schwindigkeit so gross ist, dass jedes Molekül, das sich mit eser mittleren Geschwindigkeit bewegt, im Stande ist, sich aus r Wirkungssphäre seines Nachbarmoleküls loszureissen; die

Flüssigkeit hält nur durch den Druck des darüberstehenden Dampfes zusammen. Jedes Theilchen, das sich im Flüssigkeitsniveau mit seiner mittleren Geschwindigkeit senkrecht zum Niveau bewegt, reisst sich ebenfalls los (nicht wie Clausius meint, bloss wenn eine besonders günstige Combination der progressiven, drehenden und schwingenden Bewegungen des Nachbarmoleküls eintritt). Bn.

E. Betti. Teoria della elasticità. Il Nuovo Cimento (2) VII. VIII. 5-21, 69-97, 158-180, 357-368.

Referent behält sich den Bericht bis zum vollendeten Erscheinen der Arbeit vor. Jg. (O.)

G. Curioni. Sulla resistenza trasversale dei solidi elastici. Atti di Torino VII. 597-614.

Nach Aufstellung der allgemeinen Formeln für die Werthe der transversalen Festigkeit an den verschiedenen Punkten gerader Schnitte elastischer Körper, die der Wirkung beliebiger äusserer Kräfte unterworfen sind, bespricht der Verfasser den Punkt des Null-Widerstandes, die Linien gleichen Widerstandes, und den Punkt, in dem sich das Maximum des transversalen Widerstandes findet, und giebt einfache analytische Ausdrücke dafür. Jg. (O.)

H. Résal. Équation du mouvement vibratoire d'une lame circulaire. C. R. LXXIV. 171-172, Ann. d. Mines (7) II. 226-232.

Herr Résal stellt die Bewegungsgleichungen für die Schwingungen einer elastischen Lamelle mit kreisförmiger Mittellinie auf, für den Fall, dass alle Punkte der Lamelle parallel der Ebene der Mittellinie, also theils radial (in der Richtung der Radien derselben), theils tangential (senkrecht auf dem Radius, aber in der Ebene der Mittellinie) schwingen. Herr Résal leitet aus diesen Bewegungsgleichungen das Resultat ab, dass weder die longitudinalen, noch die transversalen Schwingungen für sich allein bestehen können und findet particuläre Integrale derselben.

Wenn man den Radius der Mittellinie unendlich gross setzt, gehen Résal's Bewegungsgleichungen über in die bekannte Differentialgleichung 2ter Ordnung für die longitudinalen Schwingungen und in die 4ter Ordnung für die transversalen Schwingungen gerader elastischer Stäbe. Bn.

J. Carvallo. Deux mémoires de mécanique rationelle. C. R. LXXIV. 172-173.

J. Carvallo. Nouveau mémoire de mécanique rationelle. C. R. LXXIV. 439.

Das 1te Memoire enthält zwei neue Beweise des Satzes, dass die elastischen Kräfte, welche zwischen 2 Trennungsflächen eines Körpers wirksam sind, sich immer so vertheilen, dass die Summe der Momente der Elementarvolumina der Deformationen ein Minimum ist, das 2te die Anwendung dieses Satzes auf einen Tisch, der auf beliebig vielen Füssen ruht, das 3te einen Beweis, dass die elastischen Kräfte im Innern eines Körpers sich immer so vertheilen, dass die Variation der von allen im Innern wirksamen Kräfte geleisteten Arbeit gleich Null ist. Bn.

J. Stefan. Schwingungen eines Systems von Punkten. Wien. Ber. LXVI. 159.

Es sei ein homogener elastischer Körper in Schwingungen begriffen. Zur Zeit t seien ξ^1, ξ^2, ξ^3 die Verschiebungen in den Richtungen der Coordinatenaxen desjenigen Punktes, der ursprünglich die Coordinaten x^1, x^2, x^3 hatte. Die Grössen ξ^1, ξ^2, ξ^3 müssen dann gewissen partiellen Differentialgleichungen (den Bewegungsgleichungen des Körpers) genügen, welche als particuläre Integrale für ξ^1, ξ^2, ξ^3 Ausdrücke von der Form $f\cdot\frac{\cos}{\sin}(pt)$ liefern. Hierbei ist p eine durch die Beschaffenheit und Gestalt des Körpers bestimmte Constante, f eine Function von x^1, x^2, x^3, welche bis auf einen constanten Factor ebenfalls durch Beschaffenheit und Gestalt des Körpers und durch den Werth von p bestimmt ist. Jede Bewegung, bei der jede der Grössen ξ^1, ξ^2, ξ^3

durch einen einzigen Ausdruck von der Form

$$f(a\cos pt + b\sin pt)$$

bestimmt ist, heisst eine einfache Schwingung. Für jeden Körper sind unendlich viele Werthe des p möglich, denen auch verschiedene Functionen f zugehören; jeder Körper ist also im Stande, unendlich viele einfache Schwingungen zu machen: Die Bewegung, welche er im Allgemeinen macht, ist die Uebereinanderlagerung aller jener einfachen Schwingungen, so dass also ξ^i im allgemeinen gleich

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} f_k^i (a_k^i \cos p_k t + b_k^i \sin p_k t)$$

ist, wobei die Constanten a, b nicht allein durch die Beschaffenheit, sondern erst durch den Anfangszustand des Körpers bestimmt sind. i kann jeden der Werthe 1, 2, 3 haben. Clebsch wies nach, dass, sobald k und l verschiedene ganze Zahlen sind, der Ausdruck

$$(f_k^1 f_l^1 + f_k^2 f_l^2 + f_k^3 f_l^3)\, dx^1\, dx^2\, dx^3,$$

über den ganzen Körper integrirt, verschwindet. Daraus folgt erstens, dass die lebendige Kraft des ganzen Körpers in jedem Momente gleich der Summe der lebendigen Kräfte ist, die dem Körper in Folge jeder einfachen Schwingung zukommen würde. Denn die erstere lebendige Kraft findet man, indem man

$$\frac{\varrho}{2} \sum_{i=1}^{i=3} \left[\sum_{k=1}^{k=\infty} f_k^i p_k (-a_k^i \sin p_k t + b_k^i \cos p_k t) \right]^2 dx^1\, dx^2\, dx^3,$$

die Summe der letzteren, indem man

$$\frac{\varrho}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{i=1}^{i=3} \left[f_k^i p_k (-a_k^i \sin p_k t + b_k^i \cos p_k t) \right]^2 dx^1\, dx^2\, dx^3$$

über den ganzen Körper integrirt; beide Grössen sind aber in Folge des Clebsch'schen Satzes gleich. Zweitens liefert der Clebsch'sche Satz ein Mittel zur Bestimmung der Constanten a und b aus dem Anfangszustande des Körpers.

Die erstere Consequenz wurde von St.-Venant (C. R. LX.) an mehreren speciellen Fällen bewahrheitet und von Lippich (Wien. Ber. LIV.) etwas erweitert. In dem speciellen Falle jedoch, dass der elastische Körper eine gespannte Saite ist, wurde der Clebsch'sche Satz schon von Lagrange in dessen bekannten

›handlungen in den Miscell. taur. in sehr eigenthümlicher Weise ›wiesen. Lagrange betrachtet die Saite zuerst als einen Inbeiff discreter materieller Punkte und lässt dann erst die Zahl eser Punkte sehr gross werden. In diesem speciellen Falle ist ›r Clebsch'sche Satz identisch mit der bekannten Gleichung

$$\int_0^{2\pi} {\cos \atop \sin} kx {\cos \atop \sin} lx\, dx = 0,$$

elche zur Bestimmung der Coefficienten der Fourier'schen Reihe ent. Stefan weist nun nach, dass der Clebsch'sche Satz auch seiner vollen Allgemeinheit nach der Methode Lagrange's be.esen werden kann. Er betrachtet zu diesem Zwecke ein ›stem beliebig vieler, beliebig angeordneter discreter materieller ınkte. Wie Lagrange nimmt er an, dass die Verschiebungen ›rselben sehr klein sind, so dass die auf jeden Punkt wirkende ›aft eine lineare Function der Verschiebungen aller Punkte ist. ›mittelbar aus den Bewegungsgleichungen der Punkte lässt sich ınn der Clebsch'sche Satz ableiten. Nimmt man die Punkte cht gedrängt, so geht das Stefan'sche Punktsystem in einen astischen Körper über; der Clebsch'sche Satz ist also auch für ›n letzteren erwiesen und er hat noch eine Verallgemeinerung so fern erfahren, als auch ein System beliebig vieler elastiher Körper mit constanter oder variabler Dichte, in denen be›bige Punkte (oder Flächen) fest oder von ihren Verschiebungen ›oportionalen Kräften afficirt sein können, als Grenze eines ›efan'schen Punktsystems aufgefasst werden kann. Endlich be›rkt Stefan noch, dass die Gültigkeit des Clebsch'schen Satzes ›r durch die Form der betreffenden Differentialgleichungen bengt ist, und dass daher analoge Sätze (und daher eine analoge ethode der Coefficientenbestimmung) auch bei den Integralen lgemeinerer Differentialgleichungen gelten müssen. Eine sehr gemeine Form von Differentialgleichungen, bei denen dies stattdet, stellt Stefan auf. Specielle Fälle davon sind die Bewengsgleichungen von materiellen Punkten, auf die ausser den ıher betrachteten Kräften noch ihrer Geschwindigkeit proporıale Widerstände wirken und die Differentialgleichungen für › Wärmeleitung. Bn.

T. HOPKINSON. On the imperfect elasticity of perfe elastic rods. Messenger (2) I. 129-131.

Das in vorliegender Arbeit betrachtete Problem ist das d Stosses zweier vollkommen elastischer Stäbe (d. h. derart b schaffener, dass keine Energie durch die Wirkung der Reibun verschwinden kann). Es wird bewiesen, dass wenn zwei Stät ohne Vibration zurückprallen, ihre Länge gleich sein müss Einige Schlüsse in dieser Arbeit sind unrichtig; sie werden i dritten Bande (1874) des Messenger berichtigt werden.

Glr. (O.)

T. HOPKINSON. On the stresses produced in an elastic disc by rapid rotation. Messenger (2) II. 53-54.

Das betrachtete Problem ist das der Zersplitterung (technisch „bursting") eines Schleifsteines. Es wird gezeigt, dass der Stein mit einem radialen Bruch brechen wird, der auf der Innenseite beginnt; dass, je grösser das Loch in der Mitte des Steines, desto fester der Stein sein wird, und dass, wenn das Verhältnis des Radius des Steines zum Radius des Loches dasselbe ist, die zulässige Winkelgeschwindigkeit des Steines variirt umgekehrt wie die Quadratwurzel des Radius: also die Geschwindigkeit der Oberfläche variirt direct wie die Quadratwurzel des Radius.

Glr. (O.)

E. PHILLIPS. Théorème sur le spiral réglant des chronomètres. C. R. LXXIV. 581-583.

Im Jahre 1871 (siehe C. R. LXXIII. 1131-1136; F. d. M. III. p. 508) hatte der Verfasser den Satz bewiesen, dass wenn die Form einer Spirale so beschaffen ist, dass, während der Bewegung kein Druck gegen die Axe des Balanciers ausgeübt wird, der Schwerpunkt der Spirale auf der Axe bleibt. In der vorliegenden Notiz beweist der Verfasser die Umkehrung des Satzes, dass, wenn bei einer Spirale der Schwerpunkt auf der

Axe bleibt, kein Druck ausgeübt wird. Der Beweis ist ohne Schwierigkeit. O.

LAVOINNE. Sur la résistance des parois planes des chaudières à vapeur. Ann. d. P. et Ch. (5) III. 276-303.

Das Problem der Biegung einer ebenen Platte unter Normaldruck ist ausführlich behandelt und Rücksicht genommen auf die Unterstützungen derselben.

Der Endzweck der ganzen Arbeit ist ein vorwiegend praktischer. Ok.

DECOMBLE. Résistance des matériaux. Ann. d. P. et Ch. (5) III. 174-203.

Von wesentlich technischem Interesse. Wn.

E. ROGER. Théorie des phénomènes capillaires. C. R. LXXIV. 1510-1513.

Der Verfasser führt als Coordinaten zur Bestimmung eines Punktes eine Schaar paralleler Ebenen, eine andere Schaar darauf senkrechter Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden, und eine Schaar von Kugelflächen ein, deren gemeinsames Centrum in einem Punkte jener Geraden liegt. In diesen Coordinaten bestimmt er die Grössen eines Volumenelementes, eines Oberflächenelementes, etc. — Hierauf benutzt er dieselben, um die capillare Anziehung einer Wand gegen einen Flüssigkeitsmeniscus zu berechnen, wenn der Randwinkel zwischen beiden Null ist, wobei er jedoch voraussetzt, dass nur die Oberflächenelemente der Wand auf die Oberflächenelemente der Flüssigkeit einwirken, und gelangt, entgegen der gewöhnlichen Theorie, zu dem Resultate, dass für Capillarröhren von sehr kleinem kreisförmigen Querschnitte die Steighöhe rascher als im verkehrten Verhältniss des Durchmessers zunimmt. Bn.

Capitel 2.

Akustik und Optik.

G. Guéroult. Des relations entre les nombres de vibrations des sons musicaux et leurs intervalles. C. R. LXXIV. 1330-1332.

G. Guéroult. De quelques applications de la règle au calcul acoustique. C. R. LXXIV. 1403-1406.

Der Verfasser macht den Vorschlag, zur Messung des Tonintervalls nicht das Verhältniss der Schwingungszahlen, sondern den Logarithmus dieses Verhältnisses zu nehmen, so dass, wenn y die Schwingungszahl, x das Intervall von einem gegebenen Grundton an gerechnet, ist, $y = a^x$ wird. Der Verfasser zeigt die Vereinfachung, die dadurch z. B. bei Berechnung der Länge einer Saite entsteht, und beschreibt endlich einen passend eingetheilten Maassstab, der die nach obigem Princip auszuführenden Rechnungen erleichtern soll. Wn.

J. Bourget. Théorie mathématique du mouvement d'une corde dont une des extrémités possède un mouvement périodique donné. C. R. LXXV. 5-7.

Der im C. R. gegebene Auszug der überschriebenen Abhandlung erwähnt nur einige Resultate derselben in Beziehung zu den Experimenten von Melde und Gripon, mit denen er sich fast ausschliesslich beschäftigt. Die Saite behält ihre eigne Schwingung, deren Amplitude sich in hohem Grade steigert, wenn ihr Ton von dem gegebenen des Endes wenig differirt. Für den Fall vollkommenen Einklangs tritt in den Formeln eine Discontinuität ein. H.

E. Gripon. Vibration des cordes sous l'influence d'un diapason. C. R. LXXV. 201-204, 425-427.

Experimentelle Bestätigung der Arbeit von Bourget, über die F. d. M. II. p. 776 berichtet ist. Wn.

F. BRAUN. Ueber den Einfluss der Steifigkeit, Befestigung und Amplitude auf die Schwingungen von Saiten. Pogg. Ann. CXLVII. 64-92.

Nach einer historischen Uebersicht über die verschiedenen Bearbeitungen des Problems der schwingenden Saite, und nach einem Hinweis auf die Analogie der Saitenschwingungen mit elliptisch polarisirtem Licht reproducirt der Verfasser die Hauptresultate der Theorie aus Clebsch „Theorie der Elasticität fester Körper" (p. 253). Aus den Formeln werden einige Schlüsse gezogen, z. B. dass sich verschieden hohe Töne auf der gespannten steifen Saite mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. Sodann wird die neue Annahme gemacht, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich auch dem Quadrat der Amplitude proportional ändert. Die experimentelle Bestätigung der aus dieser Annahme gezogenen Schlüsse bildet den weitern Inhalt der Arbeit.

Wn.

J. BOURGET. Théorie mathématique des expériences acoustiques de Kundt. C. R. LXXV. 1263-1265.

Aus dem vorliegenden Auszuge lässt sich über die mathematische Behandlung des Problems gar nichts ersehen, der Verfasser hat nur einige Sätze ohne Zusammenhang mitgetheilt.

Wn.

T. HOPKINSON. The mathematical theory of Tartini's beats. Messenger (2) II. 24-27.

Wenn zwei musikalische Töne von verschiedener Höhe zusammen in genügender Stärke hervorgebracht werden, kann ein dritter und schwacher Ton beobachtet werden, der eine Anzahl von Schwingungen macht, gleich der Differenz der Schwingungszahlen der beiden bezeichneten Töne. Diese Erscheinung wurde zuerst von Lorge beobachtet im Jahre 1740 und später unab-

hängig von Tartini entdeckt. Erklärt wurde sie von Young und neuerdings in anderer Weise von Helmholtz. In vorliegender Arbeit wendet der Verfasser eine Methode an, welche wesentlich dieselbe ist, die von Herrn Earnshaw in einer Arbeit benutzt worden ist (in der Royal Society im Jahre 1860 mitgetheilt), um die Bewegungsgleichungen des zweiten Grades zu lösen und die von Helmholtz gegebene Erklärung zu erläutern. Glr. (O.)

DE SAINT-VENANT. Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses. Paris 1872. Darboux Bull. III. 195.

Herr St.-Venant giebt hier eine historisch-kritische Uebersicht über die verschiedenen Behandlungen der Undulationstheorie und über die den einzelnen Theorien zu Grunde gelegten Voraussetzungen. Für am meisten einwandsfrei hält er die Theorie von Boussinesq, über die im ersten Bande ausführlich berichtet ist. (Vergl. auch das folgende Referat). Wn.

J. BOUSSINESQ. Sur les lois qui régissent, à une première approximation, les ondes lumineuses propagées dans un milieu homogène et transparent d'une contexture quelconque. Liouville J. (2) XVII. 167-176.

Die Arbeit knüpft an eine frühere Arbeit desselben Verfassers an, über die F. d. M. I. p. 362-367 berichtet ist. Für die Lichtschwingungen waren dort mit Berücksichtigung der Einwirkung der Körpertheilchen Gleichungen von folgender Form aufgestellt:

$$(1) \quad \varrho \frac{d^2u}{dt^2} + \varrho_1 \frac{d^2u_1}{dt^2} = (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu \varDelta_2 u \quad \text{etc.},$$

wo u die Verschiebung eines Aethertheilchens, u_1 die eines Körpertheilchens bezeichnet, θ die räumliche Dilatation, ϱ die Dichtigkeit des Aethers, ϱ_1 die der ponderablen Theilchen, λ, μ die Elasticitätscoefficienten. In erster Annäherung setzt nun der Verfasser für u_1, v_1, w_1 lineare Functionen von u, v, w, also:

$$(2) \quad u_1 = \alpha u + \xi_1 v + \varepsilon w, \quad v_1 = \beta v + \delta_1 w + \xi u, \quad w_1 = \gamma w + \varepsilon_1 u + \delta v.$$

Er transformirt diese Ausdrücke auf ein neues System orthogonaler

ordinaten. Dann sind die Ausdrücke der neuen Coefficienten ξ'_1 etc. von derselben Form, wie die Coefficienten der Vabeln in der Gleichung eines Ellipsoids, wenn man dasselbe die Hauptaxen transformirt. Er nimmt ferner für die Lösungen Gleichungen (1), bezogen auf das neue Coordinatensystem, gewöhnliche Form an:

$$\frac{u}{m'} = \frac{v}{n'} = \frac{w}{p'} = J \cos \frac{2w}{\tau}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{w} - \psi\right),$$

d setzt diese Ausdrücke in (1) und (2) ein, so ergeben sich ei Gleichungen für die Verhältnisse $\frac{m'}{p'}$, $\frac{n'}{p'}$ und für die Fortlanzungsgeschwindigkeit w. Die weitere Discussion dieser Ausücke ergiebt, falls man von der Dispersion und der Drehung r Polarisationsebene abstrahirt, folgendes Resultat:

Die optische Constitution eines durchsichtigen Mediums ist ometrisch definirt durch ein gewisses Ellipsoid (Elasticitätsipsoid) und eine Gerade von gegebener Länge und Richtung, vom Mittelpunkt des Ellipsoids ausgeht. Das Medium kann rallel irgend einer Diametralebene des Ellipsoids zwei Systeme ener Wellen mit nahezu transversalen Schwingungen fortpflanzen. e Schwingungsrichtungen und die Fortpflanzungsgeschwindigiten erhält man auf folgende Weise: Man denke sich einen obachter so aufgestellt, dass seine Füsse im Mittelpunkt des lipsoids stehen, während der Körper längs der gegebenen Linie xe der Unsymmetrie] sich befindet. Der Beobachter stelle sich , dass er vor sich zur Linken eine grosse Halbaxe a, zur chten eine kleine Halbaxe b von dem Schnitt des Ellipsoids t der betrachteten Diametralebene sieht. Man ziehe dann ischen beiden Halbaxen in demselben Schnitt zwei Halbmesser , b_1 von der Beschaffenheit, dass

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{1}{b_1^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}(1 + \alpha^2)$$

t, wo α die Projection der Axen der Unsymmetrie auf die Wellenrmale ist. Jeder dieser so construirten Halbmesser giebt seiner ichtung nach die Richtung der dem einen der beiden ebenen ellensysteme entsprechenden Schwingungen, seiner Grösse nach

den reciproken Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit desselben Systems an. Wn.

W. Sellmeier. Ueber die durch Aetherschwingungen erregten Mitschwingungen der Körpertheilchen und deren Rückwirkung auf die ersteren, besonders zur Erklärung der Dispersion und ihrer Anomalien.

Pogg. Ann. CXLV. 399-421, 520-549. CXLVII. 386-403, 525-555.

Gegen alle bisher aufgestellten Theorien der Reflexion und Brechung lassen sich wesentliche Einwände erheben. In Fresnel's Theorie wird die Dichtigkeit des Aethers in verschiedenen Körpern verschieden angenommen. Dann müsste aber ein doppelbrechender Körper in verschiedenen Richtungen verschiedene Dichtigkeit haben, was unmöglich ist, da Dichtigkeit ein räumlicher Begriff ist. Neumann's Theorie, die gleiche Dichtigkeit, aber verschiedene Elasticität des Aethers in verschiedenen Körpern voraussetzt, ist in Widerspruch mit den Folgerungen aus der Aberration, mit denen aus der Unabhängigkeit der Brechung und Interferenz des Lichtes von der Fortbewegung des Beobachtungsortes und mit denen aus dem Cauchy'schen Princip der Continuität der Aetherbewegung, Folgerungen, die durch Versuche bestätigt sind. Eine Vereinigung beider Ansichten, d. h. Ungleichheit der Elasticität und Dichtigkeit, ist mit den Intensitätsgesetzen des reflectirten Lichtes im Widerspruch. Der Verfasser der vorliegenden Arbeit lässt daher alle Modificationen, die der Aether innerhalb der ponderablen Körper erfahren soll, ganz fallen und substituirt an deren Stelle ein Mitschwingen der Körperatome mit den Aetheratomen und somit eine Rückwirkung der ersteren auf die Bewegung der letzteren. Begründet wird diese Annahme dadurch, dass durch eine Verschiebung der Aethertheilchen auch die Gleichgewichtslage der ponderablen Atome beeinflusst wird. Um ungereimte Folgerungen in Bezug auf die Aetherdichtigkeit abzuschneiden, ist die weitere Annahme nöthig, dass die Körpertheilchen in sehr viel kleineren Amplituden schwingen, als der Aether. Die mathematische Entwicklung der Theorie beginnt damit, dass auf bekannte Weise die Kraft, durch die ein Körpermolecül in seine

genblickliche Gleichgewichtslage zurückgeführt wird, berechnet
ird. Alle Körper- und Aetheratome werden dabei als mit Masse
gabte Punkte angesehen, zwischen je zwei von denen eine Kraft
$mm'f(r)$ wirkt. Die Function f kann verschiedene Werthe
iben, je nachdem von der Wirkung zweier Körperatome oder
nes Körper- und Aetheratoms die Rede ist. Die gewonnenen
isdrücke werden speciell auf den Fall angewandt, dass ursprüng-
h nur ein Körpertheilchen aus seiner Ruhelage verschoben, alle
dern unbewegt sind. Unter dieser Voraussetzung giebt es für
es Theilchen drei senkrechte Schwingungsaxen, d. h. Linien
n solcher Beschaffenheit, dass die einer dieser Linien parallele
aftcomponente blos von der derselben Axe parallelen Ver-
iebungs-Componente abhängt und ihr proportional ist. Die
ei für diesen Fall sich ergebenden Werthe der Schwingungs-
uer nennt der Verfasser die dem Körpertheilchen eigenthüm-
hen Schwingungszeiten. Letztere sowohl, als die Richtung der
hwingungsaxen sind, wie weiter gezeigt wird, von den Ver-
iebungen der andern Körper- und Aethertheilchen, sowie von
r dadurch bestimmten Lage des momentanen Gleichgewichts-
tes jenes Körpertheilchens unabhängig. Lässt man nun die
ordinatenaxen mit den Schwingungsaxen zusammenfallen, so
erden die Componenten der beschleunigenden Kräfte

$$X = -\frac{4\pi^2}{\delta^2}(\xi - \xi_0),$$

d ähnlich Y und Z. ξ bedeutet hier die Verschiebung des
örpertheilchens parallel x, ξ_0 die seines momentanen Gleich-
wichtsortes, δ seine eigenthümliche Schwingungsdauer parallel
Nun wird angenommen, der momentane Gleichgewichtsort
llführe eine periodische Bewegung von der Form:

$$(1) \quad \xi_0 = a_0 \sin 2\pi \frac{t+\alpha}{\tau},$$

wird die Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\delta^2}(\xi - \xi_0)$$

egrirt durch:

$$(2) \quad \xi = \frac{\tau^2}{\tau^2 - \delta^2} a_0 \sin 2\pi \frac{t+\alpha}{\tau} + b \sin 2\pi \frac{t+\beta}{\delta},$$

oder durch:

$$(3) \quad \xi = -\pi \frac{t}{\delta} a_0 \cos 2\pi \frac{t+\alpha}{\delta} + b \sin 2\pi \frac{t+\beta}{\delta},$$

je nachdem die eigenthümliche Schwingungsdauer δ des Theilchens mit der Schwingungsdauer τ des Gleichgewichtsortes zusammenfällt (dann gilt Gl. 3) oder nicht (in welchem Falle Gl. 2 gilt). In beiden Fällen ist die Schwingungsbewegung des Körpertheilchens in der Richtung x eine doppelte; das erste Glied ist unabhängig vom Anfangszustande; es stellt die wesentlichen Schwingungen dar. Das zweite Glied stellt Schwingungen dar, die nach Amplitude (b) und Phase (β) vom Anfangszustande abhängen, da b und β willkürliche Constante sind; dies sind die unwesentlichen Schwingungen.

Dass durch die Lichtschwingungen periodische Aenderungen des Gleichgewichtsortes eines Körpertheilchens von der Form (1) bewirkt werden, erörtert der Verfasser auf folgende Weise. Er nimmt an, dass wegen der grossen Spannung des Aethers die Lage der Aethertheilchen gegen einander durch ein Körpertheilchen nicht merklich geändert wird, und zeigt, dass dann die durch den Aether allein bewirkte Verschiebung des Gleichgewichtsortes mit der Aetherverschiebung gleich gerichtet und proportional ist. τ in der Gleichung (1) ist dann die Dauer der Aetherschwingung. Dass auch die Verschiebung der übrigen Körpertheilchen eine ähnliche Aenderung des Gleichgewichtsortes hervorbringt, scheint dem Referenten nicht genügend streng begründet. Bisher war a, als constant betrachtet. Im Folgenden wird diese Voraussetzung fallen gelassen und angenommen, dass die Schwingungsamplitude in einem linear polarisirten homogenen Lichtstrahl sich continuirlich ändert, und zwar langsam im Verhältniss zur Geschwindigkeit der Schwingungen. Auf diese Auffassung ist der Verfasser durch die bekannte Auffassung des natürlichen Lichtes als polarisirtes Licht mit continuirlich veränderter Schwingungsrichtung geführt. Damit ändert sich auch die Projection der Amplitude auf eine feste Richtung continuirlich. Da alle wesentlichen Schwingungen dieselbe Phase haben, wie die erregende Schwingung, so ändert sich in ihnen durch die neue Annahme nichts, während

: die einzelnen unwesentlichen Schwingungen die Phase β ver-
nieden ist. Durch Zusammensetzung der verschiedenen un-
sentlichen Schwingungen ergiebt sich, dass die Amplitude der
sultirenden Schwingung unendlich klein ist. Die unwesentlichen
hwingungen werden daher vernachlässigt, und die Gleichungen
) und (3) werden nun:

$$(2a) \quad \xi = \frac{\tau^2}{\tau^2 - \delta^2} \xi_0 = \frac{\tau^2}{\tau^2 - \delta^2} a_0 \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$$

$$(3a) \quad \xi = -a \cos 2\pi \frac{t}{\delta}, \text{ wo } \frac{da}{dt} = \frac{\pi}{\delta} a_0 \text{ ist.}$$

ie Gleichungen (2a) [zu der hingeschriebenen kommen noch
rei ähnliche für η und ζ hinzu], die für $\tau \gtrless \delta$ gelten, sagen
ts, dass durch das Licht stets nur solche Schwingungen der
örpertheilchen erregt werden, die mit den Lichtschwingungen
chron sind. Diese Schwingungen der Körpertheilchen sieht
r Verfasser als Ursache der Refraction an. Die durch die
eichungen (3a) dargestellten Schwingungen der Körpertheilchen,
für $\tau = \delta$ gelten, und die gegen die Aetherschwingungen um
verzögert sind, werden als Ursache der Absorption angesehen.
sonders behandelt wird noch der Fall, wo τ nahe $= \delta$ ist.
an findet eine Nebenabsorption statt. Der Verfasser sucht
llich seine Theorie der Vorstellung näher zu bringen durch
rgleichung mit einem Pendel, dessen Drehpunkt Schwingungen
l führt.

Im zweiten Theile untersucht nun der Verfasser den Einfluss
: vorher behandelten Körperschwingungen auf die Fortpflan-
ngsgeschwindigkeit des Lichtes. Er leitet zunächst einen Aus-
ack für das Brechungsvermögen auf folgende Weise ab. Ein
lumen V sei so klein, dass alle in demselben befindlichen
thertheilchen in gleicher Phase schwingen, zugleich so gross,
ss es eine grosse Anzahl von Körpertheilchen umfasst. Für
n in V enthaltenen Aether wird die potentielle Energie zur Zeit
ines Verschiebungs-Maximums, sowie seine actuelle Energie zur
it seiner Ankunft im Ruheorte berechnet, daraus die Energie,
lche der in V befindliche Aether während seines Fallens nach
m Ruheorte an die Körpertheilchen verliert. Ebenso wird für

jedes Körpertheilchen die Energie berechnet, welche dasselbe während seines Fallens nach dem Ruheorte von dem Aether empfängt, durch Summation dann die Energie für alle Körpertheilchen. Die beiden so berechneten Ausdrücke werden gleich gesetzt, woraus folgt:

$$n^2 - 1 = \frac{\Sigma m a a_0}{m' \cdot a'^2}.$$

Hier bedeutet n den Brechungsexponenten des betreffenden Körpers, m' die Masse des ganzen Aethers innerhalb V, a' die Amplitude der Aetherschwingung, m die Masse eines Körpertheilchens, a_0 die Amplitude für die Schwingung der Ruhelage, a die Amplitude des Körpertheilchens, also $a = \frac{\tau^2}{\tau^2 - \delta^2} a_0$. In der Summe kommt jedes Körpertheilchen dreimal vor, nämlich in Bezug auf seine drei Schwingungsaxen. Der Ableitung liegt die Vorstellung zu Grunde, dass die in V enthaltene mechanische Energie in V bleibe, und nur vom Aether auf die Körpertheilchen übertragen werde. Da dies jedenfalls für stehende Schwingungen richtig ist, diese aber in zwei nach entgegengesetzter Seite fortschreitende Wellenreihen zerlegt werden können, so nimmt der Verfasser es auch für diese als richtig an.

Es folgt nun die Ableitung der Ausdrücke für die Intensität des reflectirten und gebrochenen Lichtes. Die Grenzbedingungen sind dabei den Fresnel'schen ähnlich. Nur an Stelle der Gleichung der lebendigen Kraft tritt, da Elasticität und Dichtigkeit des Aethers als unveränderlich angenommen sind, das obige Princip: Die mechanische Energie in einem Volumen ist constant. Sind daher a', a'_1, a'_2 die Amplituden des einfallenden, des reflectirten und des gebrochenen Lichtstrahls, α der Einfalls-, α_2 der Brechungswinkel, n der Brechungsexponent des ersten, n_2 des zweiten Mediums, ferner:

$$\varepsilon = \frac{\Sigma m a (a - a_0)}{m' a'^2},$$

und hat ε'_2 dieselbe Bedeutung für das zweite Medium, so ist:

$$(a'^2 - a'^2_1) \operatorname{cotg} \alpha \left(1 + \frac{\varepsilon}{n^2}\right) = a'^2_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{n^2_2}\right).$$

e Vergleichung der gewonnenen Formeln mit der Erfahrung ırt auf Widersprüche, daher wird die weitere Annahme geicht, dass nur die potentielle Energie des Aethers und die raus entstandene actuelle Energie in der Welle sich fortpflanze, ss dagegen die potentielle Energie, welche die Körpertheilchen ihrem Verschiebungsmaximum haben, von der Fortpflanzung sgeschlossen sei. Dann ist $\epsilon = 0$ und $\epsilon_1 = 0$, und die letzte eichung ist genau dieselbe, wie die, auf die bei Fresnel das incip der lebendigen Kraft führt.

Der Schluss der Arbeit enthält Folgerungen aus der Formel r die brechende Kraft n^2-1. Ist zunächst δ klein gegen τ, wird a durch a_0 ausgedrückt und der Ausdruck in eine Reihe twickelt, die nach Potenzen von $\frac{1}{\tau^2}$ fortschreitet. Die durch aphische Darstellung der Reihe erhaltene Curve wird als Curve · brechenden Kraft der refractiven Theilchen bezeichnet; sie eine gerade Linie, wenn man nach dem zweiten Gliede abcht. Für die absorptiven Theilchen dagegen, deren eigenthümle Schwingungsdauer mit der eines homogenen Strahles zusamnfällt, ist jene Curve bei derselben Annäherung, falls nur abptive Theilchen einer Art vorhanden sind, eine Hyperbel, che zu Asymptoten hat 1) diejenige Ordinate, die der Abscisse (δ_1 die eigenthümliche Schwingungsdauer) entspricht, 2) dieige gerade Linie, welche die brechende Kraft der refractiven eilchen darstellt. Durch Discussion der Curve der brechenden aft werden dann noch einige Sätze über die Unregelmässigkeit · hier stattfindenden Dispersion abgeleitet und mit der Beobatung verglichen.

Wn.

E. Meyer. Versuch einer Erklärung der anomalen Farbenzerstreuung. Pogg. Ann. CXLV. 80-86.

Der Verfasser versucht die Erscheinung der anomalen Disrsion dadurch zu erklären, dass er zu der Differentialgleichung r ebenen Wellenbewegung:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \mu^2 \frac{d^2v}{dx^2}$$

auf der rechten Seite ein neues Glied hinzufügt, das entw

$$1) = -\varkappa \frac{dv}{dt} \text{ oder } 2) = -\nu \frac{d^3v}{dt\,dx^2}$$

ist. Er begründet die Hinzufügung dieses Gliedes durch An eines Widerstandes, den im ersten Falle die relativ unbeweg ponderablen Atome auf die Aethertheilchen ausüben, im z Falle durch eine innere Reibung der schwingenden Aetherthei Das Integral der neuen Differentialgleichung unterscheide von dem der alten:

$$v = A\cos\alpha(\mu t - x) + B\sin\alpha(\mu t - x)$$

durch Hinzufügung eines Factors $e^{-\gamma x}$ auf der rechten Dieser Factor erklärt 1) die elliptische Polarisation, die immer mit der anomalen Dispersion verbunden ist; 2) f aus der Formel für v auf bekannte Weise Formeln für Brechungsverhältniss, wonach dasselbe bei beiden Annahmen wachsender Wellenlänge zunimmt. Die numerischen Resu dieser Formeln stimmen jedoch mit der Beobachtung nicht übe Sodann würde aus beiden Annahmen folgen, dass Licht kürzerer Wellenlänge stärker absorbirt wird, dass also Körper mit anomaler Dispersion in durchgehendem Lichte erscheinen müssten, was ebenfalls der Erfahrung widerspr Die aufgestellte Theorie ist somit nicht einwandsfrei. W

J. J. Müller. Ueber die Fortpflanzung des Lichte
Pogg. Ann. CXLV. 86-132.

Die wesentlich experimentelle Arbeit sucht durch Beob tungen über Verschiebung von Interferenzstreifen zu zeigen, d die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Hellig abhängt. Um dies Resultat auch theoretisch zu erklären, ni der Verfasser eine innere Reibung zwischen den Aethermolec an und fügt daher der gewöhnlichen Differentialgleichung für Lichtschwingungen ein Glied von der Form $c\frac{\partial^3\xi}{\partial t\,\partial x^2}$ hinzu, w ξ die Verschiebung eines Theilchens bedeutet. (Vergl. auch vorhergehende Referat). Durch Integration der verände Gleichung folgen dann folgende Sätze: 1) Die lebendige K

r gesammten fortgepflanzten Schwingungsbewegung nimmt ab, enn die durchlaufene Strecke wächst. Das Princip der Erhalng der lebendigen Kraft ist also für das Schwingungssystem cht mehr gültig. 2) Sowohl die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, s der Ausdruck für die Abhängigkeit der Amplitude von der archlaufenen Strecke variiren mit Amplitude und Schwingungsahl. Die Fortpflanzungsgesetze sind also nicht mehr für alle chwingungen dieselben.

Bei der Annahme obiger Hypothese würden die verschiedeen Strahlen sich auch im Weltraume mit verschiedener Gehwindigkeit fortpflanzen, und es würde im Weltraume eine Abrption des Lichtes stattfinden. Beide Folgerungen sucht der erfasser als möglich hinzustellen. Wn.

. v. d. Mühl. Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze unkrystallinischer Medien. Clebsch Ann. V. 471-559.

Die Hauptschwierigkeit in der Theorie der Reflexion und echung des Lichtes liegt in den Grenzbedingungen an der ennungsfläche der beiden Medien. Das Princip der Continuität rlangt, dass 1) die drei Componenten der Verrückungen, 2) die ei Componenten des molecularen Drucks auf beiden Seiten der ennungsfläche dieselben seien. Streng kann diesen Gleichuugen r genügt werden, wenn aus einer einfallenden transversalen elle zwei reflectirte und zwei gebrochene Wellen, je eine transrsale und eine longitudinale entstehen; und dies widerspricht r Erfahrung. Fresnel und Neumann haben daher in ihren eorien jenes Princip der Continuität nur theilweise angewandt d dazu die Gleichung der lebendigen Kraft genommen, die bei enger Behandlung sich erst als Folge ergeben müsste. Cauchy t zwar das Princip der Continuität streng angewandt, die enthende longitudinale Welle hat bei ihm aber eine rein imaginäre rtpflanzungsgeschwindigkeit, und dies Resultat ist unverträglich t Betrachtungen über den moleculären Druck, Betrachtungen, e nothwendig sind, wenn man das Gleichgewicht endlich beenzter Theile eines Mediums untersucht. Diese Bedenken, die

in der Einleitung eingehend erörtert werden, haben den Ve
veranlasst, eine neue Theorie der Reflexion aufzustellen. U
longitudinale Welle zu beseitigen, wird die von C. Neuman
gestellte Hypothese zu Grunde gelegt, dass der Aether den K
gegenüber, die bei der Fortpflanzung des Lichtes auftrete
compressibel sei. Dies schliesst die weitere Annahme nich
dass die Aetherdichtigkeit innerhalb verschiedener Medie
schieden sei. Die aus diesem Princip abgeleiteten Elasti
gleichungen unterscheiden sich dadurch von den bekannten
zu jeder der drei letzteren der erste Differentialquotient
unbekannten Function nach je einer der Coordinaten, multi
mit der Dichtigkeit, vorkommt [cf. F. d. M. II. p. 782]. Als
Gleichung, die wegen der neuen unbekannten Function n
ist, hat man die Bedingung der Incompressibilität. Der Ver
leitet diese allgemeinen Gleichungen und die zugehörigen (
flächengleichungen aus dem Princip der virtuellen Geschwi
keiten ab und bestimmt dann für krystallinische, durch
rechtwinklige Ebenen symmetrisch theilbare Ebenen zwei s
Systeme von Particularlösungen, die ebenen Wellen entspre
Das eine System hat die bekannte Form

$$u = C_1 \cdot e^{i2\pi\left(\frac{px+qy+rz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)}.$$

v und w unterscheiden sich von u nur durch den Werth
Factors C_1. Für das zweite System sind u, v, w die Differe
quotienten ein und derselben Function S, die der Gleichung

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0$$

genügt. Ihre Lösung ist:

$$S = Ce^{i2\pi\left(\frac{px+qy+rz-(\varkappa+\sigma i)(\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

wenn $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ die Grenzebene ist, $\varkappa = \alpha p + \beta q \cdot$
$\varkappa^2 + \sigma^2 = 1$. Dies zweite System von Particularlösungen, da
Stelle der longitudinalen Schwingungen, wie sie aus den gew
lichen Gleichungen folgen, tritt, ist nothwendig, um zur Erfül
der sechs Continuitätsgleichungen bei der Reflexion die nö
Anzahl von willkürlichen Constanten zu haben. Der reelle T

ler Exponentialgrösse verschwindet, wenn $\sigma(\alpha x + \beta y + \gamma z)$ auf iner bestimmten Seite der Grenzebene einen negativen Werth hat.

Indem er nun zu dem eigentlichen Problem der Reflexion ibergeht, wendet der Verfasser die obigen Lösungen auf zwei ınkrystallinische Medien an, die in der Ebene $z = 0$ aneinander-;renzen. Für jedes Medium gelten die vier allgemeinen Glei-:hungen, deren Lösung eben besprochen ist. Die sechs Grenzbe-lingungen werden durch das im Eingang erörterte vollständige }ontinuitätsprincip geliefert. Dichtigkeit und Elasticität des Aethers rird als verschieden in beiden Medien genommen; die Definition ler Polarisationsebene bleibt vorläufig unbestimmt. Die resul-irenden Formeln übergehen wir hier und bemerken nur, dass owohl für die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene, als ir die der Einfallsebene parallelen Bewegungen [nur für letztere ommt die zweite Art von Particularlösungen in Betracht] die leichung der Erhaltung der lebendigen Kraft sich als Folge giebt. Jene Lösungen gelten ferner auch für den Fall der talen Reflexion. Der Verfasser untersucht nun, unter welchen nnahmen über das Verhältniss der Dichtigkeiten beider Medien ine Formeln mit denen von Fresnel oder mit denen von Neu-ann übereinstimmen; denn sowohl Fresnel's als Neumann's heorie liefern Formeln, die bis auf geringe Abweichungen durch ie Erfahrung bestätigt sind. Es findet sich nun, dass, mag die resnel'sche oder die Neumann'sche Definition der Polarisations-bene angenommen werden, jene Uebereinstimmung nur zu er-eichen ist, wenn gleichzeitig die Elasticität und die Dichtigkeit es Aethers in beiden Medien dieselben sind. Beide Annahmen leichzeitig sind aber nicht möglich, die eine schliesst die andere us. Mithin steht die eben entwickelte Theorie mit der Erfahrung ı Widerspruch. Kleine Abweichungen von den Fresnel'schen 'ormeln, wie sie die Cauchy'sche Theorie liefert, könnten aus en abgeleiteten Formeln ebenfalls erklärt werden. Die oben eforderte Uebereinstimmung brauchte dann nur eine angenäherte u sein.

Das eben besprochene negative Resultat hat den Verfasser un veranlasst, das Problem noch von einem andern Gesichts-

punkte aus zu behandeln. Er lässt die Annahme fallen, dass beide Medien in einer Ebene an einander stossen, und nimmt statt dessen an, dass in Bezug auf Dichtigkeit und Elasticität ein allmählicher Uebergang von dem einen Medium zum andern stattfinde, ohne über die Dicke der Uebergangsschicht eine Annahme zu machen. Die Behandlung geschieht so, dass die Uebergangsschicht in m Theile getheilt wird, in deren jedem Elasticität und Dichtigkeit unverändert sind, während von einem Theil zum andern eine sprungweise Aenderung dieser Grössen stattfindet. Beim Uebergang von einer Schicht zur andern können dann die im ersten Theile gewonnenen Formeln benutzt werden. Schliesslich wird der bekannte Schluss auf den Fall der continuirlichen Aenderung gemacht. Da ein Eingehen auf die Einzelheiten der mathematischen Behandlung hier zu weit führen würde, so heben wir nur das Hauptresultat hervor. Dieses ist, dass die Intensität des reflectirten und gebrochenen Strahls sich mit Hülfe von convergirenden Reihen darstellen lässt, deren einzelne Glieder wiederholte Integrale sind, und zwar ist für jedes Glied die Anzahl der Integrationen um 2 vermehrt. Der Satz der lebendigen Kraft bleibt für jede Dicke der Uebergangsschicht gültig. Nimmt man diese Dicke im Verhältniss zu einer Wellenlänge verschwindend klein, so erhält man dieselben Formeln, wie oben bei Annahme eines plötzlichen Uebergangs. Diese Annahme ist also durch die Erfahrung ausgeschlossen.

Der Verfasser giebt dann noch eine zweite Ableitung der letzten Resultate. Statt durch Grenzbetrachtungen von der sprungweisen zur continuirlichen Aenderung der Elasticität und Dichtigkeit überzugehen, wird von vorne herein für die Uebergangsschicht Elasticität und Dichtigkeit als eine Function der Coordinaten betrachtet. Die für die Uebergangsschicht geltenden elastischen Gleichungen sind dann, insofern die Componenten des molecularen Drucks in ihnen vorkommen, dieselben wie gewöhnlich, ebenso die Ausdrücke der Druckcomponenten durch die drei Verrückungen. Nur wenn man diese Ausdrücke in die allgemeinen Gleichungen einsetzt, hat man beim Differentiiren auf jene Veränderlichkeit Rücksicht zu nehmen. Obwohl die

Dichtigkeit der Uebergangsschicht variabel ist, wird dieselbe doch während der Lichtschwingungen nicht geändert; für diese ist auch die Uebergangsschicht als incompressibel anzusehen. Die Incompressibilität lässt jedoch eine doppelte Auffassung zu, entweder die, dass eine bestimmte Stelle des Mediums, welche an der Bewegung theilnimmt, immer dieselbe Dichtigkeit besitzt. Der mathematische Ausdruck hierfür ist, wenn u', v', w' die Verrückungen für einen Punkt jener Schicht sind:

$$(a) \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

Oder es kann statt dessen die Dichtigkeit an einem bestimmten Orte des Raumes ungeändert bleiben. Dann lautet jene Bedingung, falls ε' die Dichtigkeit bezeichnet:

$$(b) \quad \frac{\partial \varepsilon' u'}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon' v'}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon' w'}{\partial z} = 0.$$

Für die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene führen beide Formen der Incompressibilitätsbedingung zu genau demselben Resultat, wie vorher der Grenzübergang. Für die Schwingungen in der Einfallsebene führt nur die Bedingung (a) zu demselben Resultat, die Bedingung (b) führt zu etwas andern Reihenentwickelungen für die Intensitäten. Beide Entwickelungen fallen für $\varepsilon' =$ Const. zusammen.

Zum Schluss werden die Bedingungsgleichungen dafür aufgestellt, dass die Resultate der letzten Entwickelung mit denen der Beobachtung übereinstimmen. Solche Bedingungsgleichungen müssen existiren, da das Verhältniss der Dichtigkeiten in den beiden Medien, die Dicke der Uebergangsschicht, die Aenderung der Dichtigkeit und des Brechungsexponenten innerhalb der Uebergangsschicht bisher noch willkürlich gelassen war. Die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist acht, und zwar haben dieselben eine verschiedene Form, je nachdem man die Fresnel'sche oder Neumann'sche Definition der Polarisationsebene zu Grunde legt. Die genauere Discussion dieser Bedingungsgleichungen, deren einzelne Glieder unendliche, nach Potenzen von $\sin^2\varphi$ [φ der Einfallswinkel] fortschreitende Reihen sind, die also in unendlich viele Systeme von je acht Gleichungen zerfallen, giebt

der Verfasser an dieser Stelle nicht. Er bemerkt nur, dass die Gleichungen erster Ordnung für beide Definitionen der Polarisationsebene dieselben sind, dass dieselben ferner bei Zugrundelegung der Incompressibilitätsbedingung (*b*) immer erfüllt sind ohne weitere Annahmen über die disponiblen Grössen, während man bei Zugrundelegung von (*a*) schon aus den Gleichungen erster Ordnung Bedingungen zwischen jenen disponiblen Grössen erhält. Wn.

A. Potier. Sur les causes de la polarisation elliptique. C. R. LXXV. 617-619.

A. Potier. Sur les changements de phase produits par la réflexion métallique. C. R. LXXV. 674-677.

Die Formeln der Cauchy'schen Reflexionstheorie des Lichtes an durchsichtigen Körpern sind von Jamin experimentell bestätigt bis auf eine Formel, welche die drei Ellipticitätscoefficienten dreier Substanzen, falls dieselben zu je zwei zusammengestellt werden, verbindet. Der Verfasser hat deshalb die Cauchy'sche Theorie etwas modificirt, indem er einen allmählichen Uebergang des Aetherzustandes in einem Medium zu dem im andern annimmt. Von der auf diese Hypothese basirten Rechnung enthält jedoch der vorliegende Auszug gar nichts, sondern es sind nur einige Resultate kurz erwähnt.

In der zweiten Arbeit werden nur einige von Cauchy aufgestellte Formeln für die Metallreflexion auf ein bestimmtes Experiment angewandt. Wn.

E. Ketteler. Ueber den Einfluss der astronomischen Bewegungen auf die optischen Erscheinungen. Pogg. Ann. CXLVI. 406-430; CXVLII. 404-429, 478-479.

Fortsetzung der Arbeit, über die F. d. M. III. p. 515 und ff. berichtet ist. Der Verfasser behandelt zuerst die Theorie des Fizeau'schen Versuches über die Drehung der Polarisationsebene. Unter der Annahme, dass die Grenzfläche zweier Medien nicht fest ist, sondern sich in einer Richtung, die mit dem Lothe den

inkel ψ bildet, mit der Geschwindigkeit g fortbewegt, leitet
r Verfasser Ausdrücke für die Intensität des gebrochenen und
flectirten Lichtes ab, indem er die Cauchy'sche Form der Grenz-
dingungen zu Grunde legt. Um die Bewegung der Grenzfläche
Rechnung zu stellen, sind nur die absoluten Coordinaten der
ınkte der Grenzfläche durch die relativen auszudrücken und
ese Ausdrücke in die Formeln für die Schwingungscomponenten
s Strahles zu setzen. Die Fälle, dass das einfallende Licht in
r Einfallsebene oder senkrecht dagegen schwingt, werden ge-
ınnt behandelt. Im letzteren Falle entsteht durch die Bewegung
ine Modification, wohl aber im ersteren. Indem er die erhal-
ıen Resultate für die Intensität des reflectirten Lichtes auf
ıen einmaligen Wellenstoss anwendet, dessen Einfallswinkel
hr klein ist, und dazu die Annahme macht, dass, da der An-
all nur sehr kurze Zeit dauert, das Resultat dasselbe ist, wie
i ruhender Grenzfläche, leitet der Verfasser auch hier für den
'esnel'schen Coefficienten k den früher (cf. F. d. M. III. p. 516)
ıf anderm Wege ermittelten Werth ab:

$$k = \frac{n^2-1}{n^2}.$$

iese Ableitung erscheint dem Referenten nicht einwandsfrei.
ıdann werden die berechneten Ausdrücke für die Intensität des
brochenen und reflectirten Lichtes angewandt auf den Fall,
ıss das Licht von einem ruhenden Sterne kommt und die sich
wegende Erde trifft. Der Vergleich mit der Erfahrung führt
ınn auf das Postulat, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit
Innern eines bewegten Mediums von der Translation des
ediums unabhängig ist.

Der Verfasser glaubt, dass die Fresnel'sche und Neumann'-
ıe Form der Grenzbedingungen (bei beiden ist eine Gleichung
der lebendigen Kraft) eine Verallgemeinerung auf den Fall
r bewegten Grenzfläche nicht zulässt, sondern nur die Cauchy'-
ıe Form, bei der alle Grenzbedingungen aus dem Princip der
ntinuität abgeleitet werden. Eine indirecte Folgerung aus des
rfassers Theorie wäre dann, dass polarisirtes Licht senkrecht
r Polarisationsebene schwingt. Ist diese Folgerung richtig, so

müsste, wie aus des Verfassers Formeln hervorgeht, unter dem Einfluss der Erdbewegung die Polarisationsebene gedreht werden.

Im letzten Theile seiner Arbeit führt Herr K. dieselbe Rechnung, die vorher bei isotropen Medien angestellt war, für die Reflexion und Brechung an optisch-einaxigen bewegten Krystallflächen durch und wendet dieselbe auf ein System von optisch-einaxigen Reflexionsprismen an. Die Resultate der Rechnung werden mit der Beobachtung verglichen. Letztere ergiebt keine Aenderung der Richtung des extraordinären Strahls. Soll die Rechnung zu demselben Resultat führen, so ist die weitere Annahme nöthig, dass entweder die Geschwindigkeit des im Krystall mitbewegten Aethers, oder dessen Elasticität oder Dichtigkeit sich ändert.

Zum Schluss werden ohne Beweis Formeln mitgetheilt, um aus den Coordinaten der Wellenfläche für den Ruhezustand die entsprechenden für den Zustand der Bewegung abzuleiten.

Wn.

M. Mascart. Sur les modifications qu'éprouve la lumière par suite du mouvement de la source lumineuse et du mouvement de l'observateur. Ann. de l'Ec. Norm. (2) I. 157-214.

Die wesentlich experimentelle Arbeit beschäftigt sich mit dem Einfluss der Aberration auf die Erscheinung der Reflexion, Brechung und Interferenz, nachdem in der Einleitung die hauptsächlichsten, seit Fresnel über diesen Gegenstand veröffentlichten Arbeiten besprochen sind. Die mathematischen Betrachtungen, die der Verfasser giebt, beziehen sich auf die Ableitung des Doppler'schen Princips, die Richtungsänderungen der reflectirten Strahlen durch die Bewegung der Erde, die damit verbundene Aenderung der Wellenlänge, die Verschiebung der Interferenzstreifen. Alle mitgetheilten Rechnungen sind in fast derselben Weise, und zum Theil allgemeiner im Jahre 1871 von Ketteler veröffentlicht (cf. F. d. M. III. 515-518), ohne dass Mascart dessen Arbeit auch nur erwähnt.

Wn.

J. Boussinesq. Sur le calcul de la vitesse de la lumière. C. R. LXXV. 1573-1576.

Anknüpfend an einen Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, den er in einer früheren Arbeit in Liouville's Journal XIII. abgeleitet hatte, beweist der Verfasser dass für jeden durchsichtigen, isotrop-symmetrischen Körper, wenn derselbe sich im Raume fortbewegt mit einer Geschwindigkeit, die gegen die des Lichtes klein ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes gleich ist der Summe zweier Ausdrücke: 1) der Geschwindigkeit, mit der sich durch denselben Körper, wenn er in Ruhe wäre, Lichtwellen bewegen würden, die für einen auf dem Körper befindlichen Beobachter dieselbe scheinbare Schwingungsdauer haben, und 2) des Productes aus der Translationsgeschwindigkeit des Körpers, projicirt auf die Fortpflanzungsrichtung der Wellen, und $\left(1-\frac{1}{N^2}\right)$, wo N der Brechungsindex für eine hinreichend grosse Wellenlänge ist, so dass für diese der Einfluss der Dispersion vernachlässigt werden kann. Dies Gesetz unterscheidet sich von dem Fresnel'schen dadurch, dass im ersten Gliede die scheinbare, nicht die wirkliche Schwingungsdauer vorkommt, von einer von Mascart aufgestellten Formel dadurch, dass N nicht der Brechungsindex für die grade vorliegende Schwingungsdauer ist.

Wn.

G. Quincke. Optische Experimentaluntersuchungen. Ueber Beugungsgitter. Pogg. Ann. CXLVI. 1-65.

Für ein Gitter, zwischen dessen Oeffnungen sich durchsichtige Stäbe von dreiseitig-prismatischer Gestalt befinden, werden sowohl die im reflectirten, als die im gebrochenen Lichte auftretenden Beugungserscheinungen wesentlich nach bekannter Methode berechnet.

Wn.

Crova. Sur les phénomènes d'interférence produits par les réseaux parallèles. C. R. LXXIV. 932-936.

Anwendung bekannter Formeln und Methoden, die mathematisch nichts Neues enthalten.

Wn.

V. Abbia. Sur les couleurs des lames cristallisé la lumière polarisée. Mém. de Bord. VIII. 59-80.

Ableitung der Interferenzstreifen, die eine einaxige platte im polarisirten Lichte zeigt, und zwar für die di dass die Platte senkrecht zur Axe geschnitten ist, oder der Axe, oder dass endlich das Licht durch zwei der Axe geschnittene gekreuzte Platten geht. Neues enthält di weder in der Methode, noch in den Resultaten.

J. Stefan. Ueber die mit dem Soleil'schen Dopp ausgeführten Interferenzversuche. Wien. Ber. LXVI

Auf eine Quarzplatte fällt ein Lichtstrahl von sol schaffenheit, dass die eine Schwingungscomponente g andere eine gegebene Verzögerung hat. Auf eine zwei fällt ein anderer Strahl; nach dem Durchgang durch die tiven Platten interferiren beide Strahlen. Es sollen die und Minima der Intensität des resultirenden Strahles g werden. Der einfallende Strahl wird dadurch, dass Componente gewisse Glieder addirt und subtrahirt wer

}. VAN DE SANDE-BACKHUYZEN. Zur Theorie des ·laristrobometers. Pogg. Ann. CXLV. 259-278.

}ei dem Polaristrobometer von Wild sollten die in den vier :anten vorgenommenen Ablesungen genau um 90, 180, 270° ren. Diese Genauigkeit wird nie erreicht, sondern es finden)ifferenzen von circa 20 Minuten, die, wie sich der Ver- ' durch Beobachtung überzeugt hat, nicht von Fehlern der ;heilung herrühren können. Er unterwirft daher die beiden übrigen Fehlerquellen der Rechnung. Er berechnet zunächst, en Einfluss der Umstand hat, dass die Drehungsaxe des ; und der austretende Strahl nicht genau zusammenfallen; n welcher Fehler durch unrichtige Stellung der Kalkspath- n des Savart'schen Polariskops entsteht. Die ziemlich weit- e Rechnung erklärt die beobachteten Differenzen vollständig, ss keine andern constanten Fehler bei dem Instrument an- men sind. Zugleich ergiebt sich, dass, wenn man das Mittel en Bestimmungen in den vier Quadranten nimmt, der Ein- ler Fehlerquelle vollständig aufgehoben wird. Nahezu wird be schon aufgehoben, wenn man das Mittel aus den Be- ungen in zwei diametralen Quadranten nimmt. Wn.

W. ZENGER. Sur la vitesse de transmission de la nière dans les corps simples. C. R. LXXV. 670-674.

)urch mehrere, entweder gar nicht, oder durchaus nicht ; begründete Annahmen gelangt der Verfasser von der Formel .e Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls $v = \sqrt{\frac{d}{e}}$, die Weiteres auf das Licht übertragen wird, zu folgender For- ür den Brechungsexponenten n eines nach dem regulären m krystallisirten Körpers

$$n = c\,\frac{m^{\frac{1}{3}}}{w^{\frac{1}{6}}},$$

eine Constante, m das chemische Aequivalent, w die Dich- it bezeichnet. Die Formel wird zur Berechnung der Brechungs-

indices verschiedener Substanzen angewandt, wobei sich e
ziemlich gute Uebereinstimmung mit der Beobachtung ergiebt
Wn.

CH. W. ZENGER. Ueber die Lichtgeschwindigkeit in chen
schen Mitteln. Casopis I. 246-252 (Böhmisch).

Uebersetzung der in den C. R. LXXV. p. 670 (siehe das vo
hergehende Referat) enthaltenen Berichte. W.

A. HANDL. Notiz über absolute Intensität und Absorp-
tion des Lichtes. Wien. Ber. LXV. 129-133.

Ist a die Amplitude einer Lichtschwingung, so ist die Inten-
sität $J = a^2. K$. Für den Factor K, der gewöhnlich constant ge-
nommen wird, setzt der Verfasser die Reihe

$$K = \frac{A}{\lambda^2}\left(1 - \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \cdots\right)$$

und gewinnt so eine Formel, die es ermöglichen soll, die Inten-
sitäten von verschiedenfarbigem Licht zu vergleichen. Wn.

W. STEADMAN ALDES. An elementary treatise on geo-
metrical optics. 12mo. London. Bell.

Hi.

J. HERVERT. Die Dioptrik vom Gesichtspunkte de
neueren Geometrie. Casopis I. 71-82. (Böhmisch).

W.

L. GEISENHEIMER. Zur Theorie der sphärischen Aber-
ration. Schlömilch Z. XVII. 387-416.

Es wird zuerst der Dupin'sche Satz abgeleitet, dass ei
Strahlensystem, dessen Strahlen die Normalen einer Fläche sin
diese Eigenschaft durch die Brechung nicht verliert. Dara
schliessen sich, unter Benutzung einiger von Kummer in
Theorie der Strahlensysteme eingeführten Begriffe, einige allge-
meine Sätze, die sich auf die Indicatrix der Normalfläche, so

lie Vertheilung und die Intensität der Lichtstrahlen bei der
hung an einer Ebene, an einem System von Ebenen, sowie
inem System von Rotationsflächen beziehen. Sodann werden
allgemeinen Gleichungen aufgestellt, aus denen man die
rische Aberration für einen beliebigen Strahl in eine von
Coordinaten der brechenden Fläche abhängige Reihe ent-
.eln kann, sowie die allgemeinen Bedingungen für Systeme,
he Hauptstrahlen liefern. Speciell werden die gewonnenen
neln angewandt auf eine einmalige Brechung [die brechende
he muss eine Kugelfläche sein, damit ein unendlich dünnes,
ıal auffallendes Strahlenbündel nach einmaliger Brechung
in einem Punkte vereinigt], auf ein Prisma, eine Cylinder-
: und ein System sphärischer Linsen mit gemeinsamer Axe.
diese Specialfälle ist die Berechnung der Aberration zu Ende
hrt. Wn.

Cornu. De la réfraction à travers un prisme suivant ne loi quelconque. Ann. de l'Ec. Norm. (2) I. 231-272.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, den Gang der Licht-
ılen in einem Prisma zu verfolgen, und die durch das Prisma
'orgebrachte Ablenkung zu berechnen, wenn das Medium des
mas nicht mehr isotrop ist, also Strahl und Wellennormale
t mehr zusammenfallen. Die Resultate sollen die Grundlage
r neuen optischen Beobachtungsmethode bilden; durch Beob-
tungen der wirklichen Ablenkung sollen nämlich die Elemente
:s Lichtstrahls unabhängig von jeder Voraussetzung über die
llenfläche bestimmt werden. Diese Elemente sind: die Fort-
nzungsgeschwindigkeit der Wellennormale, der Winkel zwi-
en Strahl und Normale, die Lage der durch Strahl und Nor-
.e gelegten Ebene. Im ersten Theil wird der Fall betrachtet,
s die einfallenden Strahlen parallel sind und in dem Haupt-
nitt des Prismas liegen. Aus der Theorie der Brechung einer
nen Welle in einem beliebigen homogenen (isotropen oder
stallinischen) Medium werden folgende Sätze vorausgesetzt:
Eine ebene Welle bleibt nach ein- oder mehrmaliger Brechung
einer ebenen Fläche eben. Fallen also parallele Strahlen auf

das Prisma, so sind die austretenden Strahlen wieder pa
2) Die Richtung der mehrmals gebrochenen ebenen Wel
nur von den verschiedenen Geschwindigkeiten der Wellenno
abhängig. Beide Sätze liegen auch der Huyghens'schen
struction zu Grunde, die ausserdem die Strahlen liefert.
Construction wird nun zunächst angewandt, um, falls die W
fläche bekannt ist, die Lage des Strahles nach der Bre
durch das Prisma zu construiren. Dabei wird der Einfa
wegen derjenige der parallelen Strahlen genommen, der
die brechende Kante geht. Man erhält bei dieser Constru
nicht den Strahl innerhalb des Prismas, sondern nur seine
jection auf den Hauptschnitt. Analytisch ausgedrückt erhält
zur Bestimmung des austretenden Strahles und der Ablenk
dieselben Gleichungen, wie bei einem isotropen Medium,
dass der Brechungsexponent nicht als constant zu betrachten
Auf bekannte Weise ergeben sich zwei Gleichungen, um
Gang der Strahlen im Prisma und daraus den Brechungse
nenten zu bestimmen. Die Ausführung der Rechnung kö
dazu dienen, eine Reihe von Tangenten an die Durchschn
curve der Wellenfläche mit dem Hauptschnitt zu legen und
jene Curve graphisch zu bestimmen. Herr Cornu leitet aus
genannten Formeln auf ziemlich einfache Weise einige interess
Sätze über die Lage der gebrochenen Welle innerhalb des
mas ab. Jene gebrochene Welle (oder vielmehr ihr Durchsc
mit der Normalebene des Prismas) berührt nicht nur die We
fläche, sondern ausserdem eine Ellipse, deren Axen parallel
Halbirungslinie des brechenden Winkels und seines Nebenwi
sind und die Grösse haben

$$\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A+D}{2}}, \quad \text{resp.} \quad \frac{2\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A+D}{2}}$$

(A brechender Winkel, D Ablenkung). Diese Ellipse geht
durch vier feste Punkte, die Schnittpunkte eines um die breche
Kante mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises mit den Se
des Primas und deren Verlängerungen. Im Falle des Minim

r Ablenkung berührt diese Ellipse zugleich die Wellenfläche demselben Punkte, wie die ebene Welle, so dass man die ellenfläche in diesem Falle durch die Ellipse, von der man vier unkte und eine Tangente kennt, ersetzen kann. Danach sind lgende Aufgaben leicht zu lösen: Aus der gegebenen Form r Wellenfläche den Eintritts- und Austrittswinkel für das Minimum der Ablenkung zu berechnen, und die umgekehrte: Aus r Minimalablenkung sowie dem zugehörigen Eintritts- und Austrittswinkel den zugehörigen Punkt der Wellenfläche und die ichtung der Tangente in diesem Punkte, und damit die Richtung d Grösse der Wellennormale und des Strahls zu bestimmen. e Gleichung, durch die das Minimum der Ablenkung bestimmt rd, ist nicht mehr, wie bei isotropen Medien $e = e'$, sondern

$$\operatorname{tg}\frac{e-e'}{2} = \frac{\nu}{\mu}\operatorname{tg}\frac{r-r'}{2},$$

an e, e' Einfalls- und Austrittswinkel sind, r, r' die Winkel Wellennormale innerhalb des Primas mit den Normalen der nzflächen, μ und ν die Axen der obigen Ellipse. Endlich let noch die folgende Gleichung statt: Ist β der Winkel, den Halbirungslinie des vom eintretenden und austretenden Strahle ildeten Winkels mit der Halbirungslinie des Prismenwinkels let, ist α der Winkel, den die Wellennormale innerhalb des smas, α' der, den der zugehörige Strahl mit der Halbirungse des Prismenwinkels bildet, so ist

$$\operatorname{tg}^2\beta = \operatorname{tg}\alpha.\ \operatorname{tg}\alpha';$$

erste Linie liegt daher immer zwischen den beiden andern.

Im zweiten Theile behandelt der Verfasser die Brechung im sma für den Fall, dass die einfallenden Strahlen nicht mehr Normalschnitt liegen, sondern gegen denselben geneigt sind. r Verfasser beweist zunächst, indem er wieder denjenigen ahl, der durch die brechende Kante geht, untersucht, folgende ze: 1) Die eintretende Welle bildet mit der Prismenkante denben Winkel θ, wie die austretende. 2) Auf den Schnitt der lle mit dem Hauptschnitt des Primas kann man das einfache echungsgesetz anwenden, wenn man nur statt des einfachen echungsindex n den folgenden nimmt:

$$m = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\,\mathrm{tg}^2\,\theta.}$$

Er bestimmt dann das Bild einer unendlich fernen leucht Linie, die durch das Prisma nahe der brechenden Kante achtet wird. Das Verfahren dabei ist folgendes: Die ein den Strahlen bilden einen Kegel mit sehr kleiner Oeffnung, Spitze ein Punkt der brechenden Kante des Prismas ist; die gebrochenen Strahlen. Zunächst wird jeder dieser Keg setzt durch einen mittleren Strahl, der mit dem Hauptschni Winkel θ bildet. Bildet die Projection des einfallenden mit Strahls auf den Hauptschnitt des Prismas den Winkel e mit Einfallslothe, ist e' der entsprechende Winkel des austret Strahls, r, r' die Neigungswinkel der ebenen Welle innerhalb Prismas gegen die Prismenflächen, so ist nach Satz 2)

$$\sin e = m \sin r,\ \sin e' = m \sin r',\ r + r' = A.$$

Daraus wird eine Gleichung zwischen e, e', A, θ abgeleitet. irgend einen andern Strahl des Strahlenkegels sind statt e, zu nehmen $e + de,\ e' + de',\ \theta + d\theta$. Differentiirt man nun obige Gleichung zwischen e, e', A, θ, so erhält man eine Be hung zwischen $de, d\theta, de'$, und somit ist die Oeffnung de' gebrochenen Strahlenkegels bestimmt. Bei der Differentiation zu berücksichtigen, dass auch n mit θ variabel ist. Man k jedoch vorher n eliminiren, indem man die Gleichung der Eb der aus dem Prisma austretenden Welle (für den mittleren Str bestimmt. Die gewonnenen Formeln werden auf den Fall gewandt, dass die leuchtende Linie eine gerade ist und ihr telpunkt mit der Spitze des Strahlenkegels in demselben Hau schnitt des Prismas liegt. Ist dann φ der Winkel, den die du die leuchtende Linie und die Kegelspitze gelegte Ebene mit brechenden Prismenkante bildet, φ' der entsprechende Wink für den gebrochenen Strahlenkegel, so ist

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{de}{d\theta},\ \mathrm{tg}\,\varphi' = -\frac{de'}{d\theta}.$$

Diese Werthe werden in die obige Gleichung eingesetzt und wi dieselbe dann auf einige Specialfälle angewandt, namentlich

$$\varphi = 0,\ \varphi' = 0,\ \varphi = \pm\frac{\pi}{4}.$$

ie so abgeleiteten Formeln geben ein Mittel, den Strahl, wel-
ıer einer gebrochenen ebenen Welle innerhalb des Prismas zu-
ehört, vollständig zu bestimmen, ebenso den Durchschnitt dieser
'elle mit dem Hauptschnitt des Prismas und die Coordinaten
es Berührungspunktes der Ebene mit ihrer Enveloppe, der
'ellenfläche. Die Formeln vereinfachen sich bedeutend für das
inimum der Ablenkung.

Als Anhang giebt der Verfasser noch eine Ausdehnung eines
n ersten Theile abgeleiteten Theorems auf den Raum. Jede
bene gebrochene Welle innerhalb des Prismas berührt nämlich
in dreiaxiges Ellipsoid, dessen Kreisschnitte die Durchschnitte
er Kugel vom Radius 1, die um einen Punkt der brechenden
ante beschrieben ist, mit den Prismenflächen sind. Die grösste
ıd kleinste Axe des Ellipsoids haben denselben Werth, wie in
eil 1) die Ellipsenaxen; sie hängen ab von der Ablenkung der
ojection des einfallenden und des austretenden Strahles, und
m brechenden Winkel des Prismas. Wn.

. A. Proctor. Note on the curve traversed by base-end (remotest from fixed pivot) of the last prism of a single or double automatic spectroscope. Monthl. Not. XXXI. 245-246. 1871.

Die Curve ist, wie leicht zu beweisen, von der Form:

$$4\cos\left(\frac{\theta}{6}+\alpha\right)\mp a\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Glr. (O).

B. Listing. Ueber das Reflexionsprisma. Pogg. Ann. CXLV. 25-27.

Das Referat befindet sich im vorigen Jahrgange [F. d. M. . 522]. Wn.

. Beck. Die Fundamentalgleichungen der Linsensysteme in geometrischer Darstellung. Wolf. Z. VII. 317-338.

Wn.

J. Casorati. Ricerche e considerazioni sugli strumenti ottici. Rend. d. Ist. Lomb. (2) V. 172-192.

J. Casorati. Le proprietà cardinali degli strumenti ottici anche non centrati. Milano. 1872.

Der Verfasser betrachtet einige optische Instrumente, die unvollkommen centrirt sind. Er stellt die Parameter des Ausfalls eines Lichtstrahls mit Hülfe von Determinanten durch einfache Ausdrücke der Parameter des Einfalls dar und beweist, dass für solche, ebenso wie für centrirte Instrumente immer eine und nur eine Gerade existirt, die den Weg des Einfalls und den des Ausfalls eines Lichtstrahls enthält. Diese Gerade enthält die 3 Paare von Hauptpunkten und vertritt überhaupt, für alle Haupteigenschaften, in einem nicht centrirten System die Stelle der Geraden der Mittelpunkte im centrirten System, weshalb der Verfasser sie „Hauptgerade" (cardinal) nennt.

In Verbindung mit diesem Werk citiren wir eine Abhandlung von A. Beck: „Die Fundamentaleigenschaften der Linsensysteme in geometrischer Darstellung", in der nach den Worten des Verfassers „die Theorie der Linsensysteme mit Einschluss der Verallgemeinerung von Casorati rein geometrisch abgeleitet werden soll". Jg. (O.)

V. v. Lang. Zur Dioptrik eines Systems centrirter Kugelflächen. Carl Repert. VIII. 20-25.

Siehe F. d. M. III p. 522.

L. Seidel. Ueber ein von Dr. Adolf Steinheil neuerlich construirtes Objectiv und über die benutzten Rechnungsvorschriften. Münch. Ber. 1872. Carl Rep. VIII. 173-183.

Herr Seidel, welcher bekanntlich der analytischen Dioptrik von jeher seine besondere Theilnahme zuwandte, entwickelt hier ganz allgemein die Theorie, welche bei Herstellung eines der astronomischen Photographie gewidmeten Objectives zu Grunde

ʒ. Zwei Grundgedanken waren es, auf die sich das Haupt-
ıgenmerk concentrirte und deren Realisirung einerseits, haupt-
chlich der Technik, andererseits der Mathematik zugewiesen
ərden muss: Möglichste Unterdrückung des secundären Spectrums
ırch Auswahl geeigneter Glassorten und Herstellung gleich-
ässiger Präcision der Abbildung des Gesichtsfeldes auch für
ssen äussere Theile. Die perspectivische Richtigkeit kommt
ıbei weniger in Betracht. Herr Steinheil wählt hiefür eine
ombination von vier Linsen, welche um die Mittellinie des Ob-
ctivs symmetrisch geordnet sind. Für dieses auf den ersten
ick nicht nöthig scheinende Arrangement giebt Herr Seidel
chstehende wichtige Gründe. Ist ein der Axe parallel einfal-
ıdes Strahlenbüschel frei von Farbenzerstreuung und sphärischer
weichung, so schneiden die einzelnen Strahlen des Büschels
ch ihrer Brechung die Axe in dem sogenannten zweiten Brenn-
ınkte des Systems. Gelangen also von diesem Punkt Strahlen
umgekehrter Richtung auf den Apparat, so treten diese Strahlen
enfalls parallel aus der vordersten Fläche aus; ist also das
stem in der angedeuteten Weise symmetrisch construirt, so ist
sselbe fehlerfrei nicht nur für ein unendlich fernes Object,
ndern auch für ein im ersten Brennpunkt befindliches. Es tritt
mnach auch für zwischenliegende Objecte eine grössere Frei-
it von Fehlern ein, als dies bei einer andern Anordnung zu
eichen ist. Hierdurch ist dann zugleich erfüllt die Gauss'sche
rderung, dass die Object-Abbildung durch die verschieden
bigen Strahlen die nämliche Grösse habe, so wie auch die
ı Fraunhofer gestellte Bedingung, dass nicht nur die Mitte,
ıdern auch die seitlichen Theile möglichst frei sind von den
ch die Kugelgestalt bedingten Fehlern. Hat man ein nicht
ımetrisches System von vier Linsen, so sind elf Unbekannte
bestimmen; von diesen werden sofort fünf durch die Steinheil'-
e Zusammenstellung eliminirt.

Dem Zweck des Apparates entsprechend wurden bei der
ɾechnung vorzüglich die chemischen Strahlen berücksichtigt.
es ferner wünschenswerth erschien für Strahlenbüschel, die
ı verschiedenen Stellen im Gesichtsfelde herkommen, ver-

schiedene Theile der Oeffnung zur Wirkung kommen zu lassen, so wurden Diaphragmen angebracht. Der weitere Verlauf der Abhandlung enthält die durchgeführten Rechnungen für ein Parallel- und zwei seitlich einfallende Büschel. Gr.

T. W. STRUTT. On the diffraction of object glasses. Monthl. Not. XXXIII. 59-63.

Der Verfasser schlägt vor beim Sehen nach der Sonne mit einem Telescope die centralen Theile des Glases statt der Theile am Rande durch ein Diaphragma zu verdecken und bemerkt, dass die eigenthümlichen Vortheile einer weiteren Oeffnung auf diese Weise nicht verloren gehen, während die Unvollkommenheit, die aus sphärischer Aberration hervorgeht, verringert wird. Allgemeine Gründe für diese Ansicht werden gegeben. Die Arbeit schliesst mit der mathematischen Discussion der zwei Fälle: 1) wenn das Objectivglas völlig unbedeckt ist, 2) wenn ein enger seitlicher Rand allein zur Wirkung kommt. Glr. (O.)

A. v. WALTENHOFEN. Ueber eine neue Methode, die Vergrösserung und das Gesichtsfeld von Fernröhren zu bestimmen. Prag. Abh. (6) V. Carl Rep. VIII. 184-188.

Ist V' die Vergrösserung, die man erhält, wenn man unmittelbar vor dem Objectiv eines Fernrohrs eine Sammellinse von der Brennweite F aufstellt und eine genau in der Entfernung F befindliche Scala beobachtet, ist ferner L die Länge des Fernrohrs, so ist die Vergrösserung des Rohrs nach Wegnahme der Linse:

$$V = V' \frac{F}{F+L}.$$

Das Gesichtsfeld ist

$$\varphi^0 = \frac{180}{\pi} \frac{H}{F},$$

wo H die Länge ist, die der scheinbare Durchmesser des Gesichtsfeldes bei der Vergrösserung V' einnimmt. Wn.

LUBIMOFF. Neue Theorie des Gesichtsfeldes und der Vergrösserung der optischen Instrumente. Carl Rep. VIII. 336-350.

Die neue Theorie, auf die der Verfasser dadurch geführt , dass er das Gesichtsfeld des Galilei'schen Fernrohrs bedeutend össer gefunden hat, als es nach den meisten Lehrbüchern sein llte, besteht in folgendem Princip. Der bilderzeugende Apparat inse oder Spiegel) wird als eine Oeffnung, das Bild als ein genstand betrachtet, der in bestimmter Weise hinter jener ffnung gelegen ist und durch dieselbe beobachtet wird. Aus sem Princip, dessen Richtigkeit dem Referenten nicht zweifel- scheint, werden Ausdrücke für die Grösse des Gesichtsfeldes l der Vergrösserung des Galilei'schen und des Keppler'schen nrohrs hergeleitet. Wn.

GÜNTHER. Studien zur theoretischen Photometrie. Erlangen. Besold. — Darboux Bull. III. 194.

Im Anschluss an Beer's Grundriss des photometrischen Cal- s werden die allgemeinen Formeln abgeleitet 1) für die In- sität, mit der ein Flächenelement durch eine beliebige leuch- de Fläche beleuchtet wird, 2) für die absolute Lichtmenge l die mittlere Helligkeit, welche eine grössere Fläche durch beliebig gegebenes Stück einer leuchtenden Fläche empfängt. n den wesentlich bekannten Formeln werden nur die ersteren specielle Fälle angewandt, und zwar wird die Lichtmenge timmt, welche ein horizontales ebenes Flächenstück von einer chtenden Fläche empfängt. Die leuchtende Fläche wird dabei die scheinbare Himmelskugel projicirt, und ein Ort der Him- skugel durch seine sphärischen Coordinaten r, v bestimmt, ei das Zenith zum Pol des Coordinatensystemes genommen l. Zuerst wird der Fall behandelt, dass die leuchtende he ein sphärisches Dreieck ist, dessen Seiten Bogen kleiner gelkreise sind. Daran schliesst sich dieselbe Aufgabe für eine ahl von Flächen, die von speciellen sphärischen Curven be- nzt sind. Als Grenzcurven sind stets solche Curven gewählt, denen die Integration sich leicht ausführen lässt.

Sodann wird die Erleuchtung eines Punktes des Saturns durch seinen Ring berechnet, falls letzterer homogenes Licht reflectirt und seiner ganzen Ausdehnung nach sichtbar ist. Es kommt dabei, da die Projectionen der Ringränder auf die scheinbare Himmelskugel sphärische Ellipsen sind, auf die Bestimmung der Erleuchtung durch einen elliptischen Sector an. Weiter wird die Beleuchtung eines Ortes der Erde durch das Zodiakallicht behandelt. Letzteres wird dabei als eine die Sonnenkugel umgebende Atmosphäre von der Form eines abgeplatteten Rotationsellipsoids betrachtet; und die variable Leuchtkraft eines Punktes im Innern jener Atmosphäre wird proportional der Grösse $1-\frac{m}{n}$ angenommen, wo m die Entfernung des betreffenden Punktes vom Sonnenmittelpunkt bedeutet, n die Länge der Linie, die man durch Verlängerung der Linie m bis zur Grenze des Ellipsoids erhält.

Im letzten Abschnitt werden die bekannten Gleichungen der Linien gleicher Lichtintensität bei Beleuchtung von einem Punkte oder mehreren Punkten, sowie bei paralleler Beleuchtung aufgestellt. Daraus wird die Stärke der Beleuchtung eines kreisförmig begrenzten Stückes einer Kugelfläche berechnet, das von parallelen Strahlen getroffen wird. Der durch den Kugelmittelpunkt gehende Strahl, der die Kugel im Mittelpunkte der Transparenz trifft, trifft dabei nicht den Mittelpunkt der Kreisfläche. Dieselbe Aufgabe für eine sphärische Ellipse führt, falls Mittelpunkt der Transparenz und Mittelpunkt der Fläche zusammenfallen, auf elliptische Integrale. Diese letzten Aufgaben wendet der Verfasser an auf die Erleuchtung eines Flächenelements durch eine Planetenscheibe oder einen Kometen, der als Rotationsparaboloid angesehen wird. Wn.

F. Hoza. Kleinere mathematische Mittheilungen.

Grunert Arch. LIV. 164-174.

Ableitung der bekannten Gleichungen der Intensitätslinien einer Fläche, falls die Strahlen von einem Punkte ausgehen, resp. bei paralleler Beleuchtung. Im letzteren Falle sind für ein

perbolisches Paraboloid die Projectionen der Intensitätslinien f eine der Hauptebenen Kegelschnitte. Die speciellen Fälle rden discutirt, die Mittelpunkte der Linien und die Schatten-›nze bestimmt.

Ohne Zusammenhang mit dem Vorhergehenden werden am hluss einige bekannte Sätze über Kegelschnitte synthetisch wiesen. Wn.

. BURKHART-JEZLER. Die Abendlichter an der östlichen Küste Süd-Amerikas. Pogg. Ann. CXLV. 196-218, 337-364.

Zur Erklärung der Erscheinung der Abendröthe werden mit ilfe des einfachen Brechungsgesetzes die verschiedenen möghen Fälle der Brechung des Lichtes an einer Hohlkugel, en innerer Raum mit Luft angefüllt ist, erörtert, und es rden die Intensitätsverhältnisse der gebrochenen Strahlen nach a bekannten Fresnel'schen Formeln untersucht. Es ergiebt h, dass das Verhältniss der beiden Kugelradien von wesentaem Einflusse auf die Erscheinung ist. Im Uebrigen enthält Arbeit nur Beobachtungen der oben genannten Erscheinung. Wn.

Capitel 3.

Electricität und Magnetismus.

I. KÖTTERITZSCH. Lehrbuch der Electrostatik. Leipzig. Teubner 8.

Das vorliegende Lehrbuch giebt eine umfassende und ausırliche Darstellung alles dessen, was über die Electrostatik her geschrieben ist. Die drei ersten Capitel enthalten die allmeinen Sätze über das Potential und die Massenvertheilung, sonders die Fundamentaltheoreme von Green und Gauss mit n bekannten Anwendungen auf die Electrostatik. In dem rten Capitel ist eine Lösung des allgemeinsten Problems der

Electrostatik auseinandergesetzt, welche der Verfasser selb schon früher (F. d. M. III. p. 528) veröffentlicht hat. Wennglei die Behandlungsweise in dem vorliegenden Werk einige Verei fachungen gegen früher erfahren hat, so bleibt doch noch ei derartige Complication der Rechnung, dass man bei Lösung v Aufgaben auf diesem Gebiet wohl meistens speciellere Method suchen wird.

Die beiden letzten Capitel enthalten die Wirkungen, welc electrisirte Körper auf einander ausüben, und Betrachtungen üb die zu Grunde gelegten Hypothesen. Ok.

H. Helmholtz. Ueber die Theorie der Electrodynamil Berl. Monatsber. 1872. 248-256.

Inhaltsangabe der folgenden Arbeit. Ok.

H. Helmholtz. Ueber die Theorie der Electrodynamik (Abhandl. II, Kritisches). Borchardt, J. LXXV. 35-67.

J. Bertrand. Note sur la théorie mathématique de l'électricité dynamique. C. R. LXXIV. 965-970.

J. Bertrand. Observations à l'occasion du dernier cahier du Journal „für die reine und ang. Math.", publié à Berlin. C. R. LXXV. 860-865.

E. Riecke. Ueber das von Helmholtz vorgeschlagene Gesetz der electrodynamischen Wechselwirkungen. Gött. Nachr. 1872, 394-462.

H. Helmholtz. Vergleich des Ampère'schen und Neumann'schen Gesetzes für die electrodynamischen Kräfte. Berl. Monatsber. 1873*). 92-104.

Die in diesen Berichten (II, 800-805) besprochene Abhandlung von Helmholtz (Borch. J. LXXII.) hat in Folge der neuen

*) Die letzte Arbeit ist grösserer Uebersichtlichkeit wegen schon in diesem Jahrgang besprochen worden. Redaction.

Art der Behandlung, welche die Theorie der Electrodynamik darin erfährt, von verschiedenen Seiten lebhaften Widerspruch hervorgerufen. Wir werden hier auf die einzelnen Einwürfe gleichzeitig mit den inzwischen schon erschienenen Erwiderungen von Helmholtz eingehen.

Während in der soeben genannten Abhandlung von Helmholtz die Unzuträglichkeiten, zu denen das Weber'sche Gesetz führt, nur allgemein angedeutet sind, musste die Erwiderung Weber's (Leipz. Abh. X, 1-61; s. F. d. M. III. 526) die Discussion zunächst auf diesen ihren Ausgangspunkt zurücklenken. Helmholtz hatte gezeigt, dass jenes Gesetz schon in dem ganz speciellen Problem der Bewegung zweier Electricitätstheilchen auf ihrer Verbindungslinie zu einer unzulässigen Consequenz führt, indem bei einer gewissen Entfernung die Beschleunigung unendlich gross werden kann, und bei einer geringeren Entfernung der Coefficient der Beschleunigung, welcher der Masse entspricht, negativ wird.

Man übersieht diese Verhältnisse am besten aus der von Helmholtz aufgestellten Differentialgleichung der Bewegung eines electrischen Theilchens e in Gegenwart eines zweiten festen Theilchens e', welches sich in der Entfernung r von jenem befindet:

$$\nu\mu\left(1-\frac{\varrho}{r}\right)\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e\cdot e'}{r^2}\left(1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)+R.$$

Diese Differentialgleichung stimmt überein mit derjenigen eines Punktes in einem widerstehenden Mittel. Sie unterscheidet sich nur von derselben durch den Factor $\left(1-\frac{\varrho}{r}\right)$, mit welchem die Masse μ multiplicirt ist. Die hier vorkommende Grösse:

$$\varrho = \frac{2\cdot e\cdot e'}{c^2\cdot\mu}$$

nennt Helmholtz die „kritische" Entfernung. Ist die gegenseitige Entfernung r kleiner als ϱ, so tritt der Fall einer negativen Masse ein, der eine verkehrte Mechanik zur Folge haben würde.

Hiergegen hat Weber den Einwand gemacht, dass ϱ sehr klein ausfallen muss, wegen des in dem Nenner auftretenden Factors c^2, welcher bekanntlich sehr gross ist, so klein, dass

in diesem Falle andere moleculare Anziehungsgesetze gelten würden. Helmholtz macht indess darauf aufmerksam, dass der Entfernung ϱ stets ein endlicher Werth ertheilt werden kann, wenn nur die feste electrische Masse e' hinreichend vergrössert wird.

Bei einem zweiten Beispiel treten dieselben Kennzeichen der negativen Masse in Folge der Anwendung des Weber'schen Gesetzes noch auffälliger hervor. Denkt man sich ein electrisches Massentheilchen beweglich innerhalb einer Hohlkugel, welche gleichmässig mit Electricität belegt ist, so kann ebenfalls der Fall eintreten, dass der Coefficient der Beschleunigung negativ wird. Und zwar würde dieser Fall dann gleichmässig für jeden Punkt im Innern eintreten, also ohne dass die Annäherung des beweglichen Theilchens an die festen eine sehr grosse zu sein braucht. Die Folge hiervon würde eine Realisation des Perpetuum mobile sein.

Ein zweiter von C. Neumann herrührender Einwand betraf die Hypothesen, die den Kirchhoff'schen Gleichungen zu Grunde liegen sollen. Helmholtz zeigt, dass dieselben bis auf die Benutzung des Weber'schen Gesetzes unbestreitbar und bisher allgemein angenommen worden sind.

In der ersten der citirten Arbeiten von Bertrand wendet sich derselbe gegen den Ausgangspunkt der Helmholtz'schen Arbeit, indem er die Zulässigkeit eines Potentials für die Wirkung zweier Stromelemente auf einander bestreitet. Definirt man das Potential als die Arbeit, die geleistet wird, wenn man das eine Element unter Einwirkung des andern in unendliche Entfernung rückt, so lässt sich leicht aus dem Helmholtz'schen Potentialausdruck übersehen, dass eine ebenso grosse Arbeit auch geleistet werden kann, wenn man, ohne den Abstand beider Elemente zu verändern, das eine um einen bestimmten Winkel dreht. Da hierbei nach Bertrand's Anschauung keine Arbeit geleistet werden sollte, indem das Potential nur anziehende Kräfte in Richtung der Verbindungslinie bedinge, so sieht er hierin einen Widerspruch. Dieser Widerspruch verschwindet indess sofort, wenn man nicht nur auf die anziehenden Kräfte, sondern auch auf die auftreten-

ı Kräftepaare Rücksicht nimmt, welche durch das aufgestellte
tential der Stromelemente ebenfalls bedingt sind.

Ein Potential zweier Stromelemente auf einander ist daher
›nso zulässig und giebt einen ebenso guten Sinn als das Po-
tial zweier Magnete auf einander.

Hieran knüpft Bertrand in seiner zweiten Erwiderung an,
.em er nachzuweisen sucht, dass, wenn an jedem Element eines
omkreises ein Kräftepaar von endlicher Grösse angreift, der
'omkreis als solcher nicht bestehen kann, sondern in sich zer-
sen werden müsste, sobald in ihm und in einem benachbarten
'ahtkreise electrische Ströme circuliren.

Die Erwiderung von Helmholtz auf diesen Einwurf hebt den
ıterschied einer absoluten und relativen Deformation einer
nnen Lamelle durch ein Kräftepaar hervor, die von Bertrand
rwechselt sein soll; sie ist indess zu kurz, um diesen Punkt
llig aufzuklären.

In der citirten Arbeit erörtert Riecke die Zulässigkeit des
ɔlmholtz'schen Potentials von einem andern Gesichtspunkt aus.
ichdem er die aus demselben resultirenden Componenten der
·äfte eines Elementes auf ein anderes, und die beiden möglichen
›rmen des Potentials eines geschlossenen Stromes auf ein Strom-
ɜment angegeben hat, zieht er aus letzterem die Folgerung,
ss die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf den beweg-
hen Theil eines anderen Stromes nicht, wie nach Ampère,
nkrecht zu diesem steht. So ist z. B. die Wirkung eines Kreis-
omes auf ein Drahtstück, das einen Radius dieses Kreises
det, nach Helmholtz null, während nach Ampère eine fort-
uernde Drehung dieses Radius stattfindet, wie auch der Ver-
ɔh sie ergiebt

Aufschlüsse über diesen Punkt giebt die letzte Arbeit von
lmholtz. In derselben wird gezeigt, dass aus dem aufgestellten
tential der Stromelemente sich bewegende Kräfte für zwei un-
schlossene Stromtheile herleiten lassen, welche für diese Strom-
ɔile selbst sowohl in diejenige Form gebracht werden können,
ɔlche Grassmann, als auch in diejenige, welche Ampère diesen

Kräften gegeben hat. In beiden Fällen treten aber bei Benutzung des Potentialgesetzes noch neue Kräfte hinzu, und zwar:

1) zwischen Stromenden und Stromelementen,
2) zwischen den Stromenden der beiden Leiter.

Hiernach sind auch die Bewegungen der sog. Rotationsapparate zu berechnen, wie der oben von Riecke angeführte. Bei denselben treten Gleitstellen auf, die im Sinne von Helmholtz als Stromenden anzusehen sind.

Schliesslich giebt Helmholtz selbst einen Versuch an, der geeignet ist, zwischen seinem und dem Ampère'schen Elementengesetze zu entscheiden: die Entladung einer Franklin'schen Tafel durch einen Draht, der spiralförmig einen Ringmagnet umgiebt.

Ok.

C. NEUMANN. Electrodynamische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf das Princip der Energie. Leipz. Ber. XXIII. 386-449.

Das Weber'sche Gesetz giebt keinen Aufschluss, weder über die gegenseitige Einwirkung zwischen ponderabler und electrischer Materie, noch auch über die gegenseitige Beziehung zwischen Electricität und Wärme. Schwerlich aber dürften irgend welche electrische Erscheinungen anzugeben sein, bei denen man von der Mitwirkung der ponderablen Materie oder von der entwickelten Wärme völlig abstrahiren darf. Zur Begründung einer exacten Theorie werden daher ausser dem Weber'schen Gesetz immer noch irgend welche accessorische Annahmen erforderlich sein, so z. B. die Annahme des Ohm'schen Gesetzes, ferner das Joule'sche Gesetz, ferner die Annahme, dass die auf die electrische Materie eines Leiterelements ausgeübte Kraft sich unmittelbar übertrage auf seine ponderable Masse.

Der Verfasser vorliegender Abhandlung hat nun, an Stelle des Ohm'schen, Joule'schen und des eben genannten Uebertragungsgesetzes, andere Annahmen von etwas einfacherem Charakter einzuführen gesucht. Die seiner Theorie zu Grunde gelegten Prämissen sind im Ganzen folgende:

1) Je zwei electrische Theilchen wirken auf einander nach
n Weber'schen Gesetz.

2) Die negativen Theilchen sind mit der ponderablen Masse
Leiters unlöslich verbunden; die positiven Theilchen hingegen
den in ihrer Gesammtheit ein Fluidum, welches im Innern des
iters mit einer gewissen Reibung beweglich ist. Die Stärke
ser Reibung ist proportional mit der relativen Geschwindigkeit.

3) Die durch die Reibung verloren gehende lebendige Kraft
als entstehende Wärme zu betrachten.

4) Die Trägheit (oder Masse) der electrischen Materie ist
Allgemeinen verschwindend klein gegenüber der Trägheit der
derablen Materie.

Der Verfasser zeigt nun, dass das vorhin genannte Ueber-
gungsgesetz, und ebenso auch das Ohm'sche und Joule'sche
setz angesehen werden können als eine Folge dieser vier
missen.

Ferner gelangt der Verfasser, auf Grund seiner vier Prä-
ssen, zu dem Resultat, dass das Princip der lebendigen Kraft
Gebiet der electrischen Erscheinungen repräsentirt sei durch
ei wohl von einander zu unterscheidende Sätze, von denen er
einen als Energiegesetz, den andern als Potentialgesetz be-
hnet.

Um näher hierauf einzugehen, denke man sich ein System
(linearen oder körperlichen) Conductoren, die in beliebigen
egungen begriffen sind, während gleichzeitig im Innern eines
n Conductors irgend welche electrische Vorgänge stattfinden.
von Aussen her einwirkenden Kräfte seien durchweg ordi-
r (nicht electrischer) Natur. Ferner sei T die actuelle (oder
tische), und F die potentielle Energie des Systemes; mit
eren Worten: es sei T die lebendige Kraft aller in dem System
handenen ponderablen Massen, und es repräsentire F den
druck:

$$(1.)\quad F = U^0 + U - V,$$

U^0 das ordinäre, U das electrostatische und V das electro-
amische Potential des Systems auf sich selber bezeichnet.
dann lauten jene Gesetze folgendermaassen:

Das Energiegesetz: „Für jedes Zeitelement dt ist

$$(2.a)\quad d(T+F) = dS - dQ,$$

d. i.

$$(2.b)\quad d(T+U^0+U-V) = dS - dQ,$$

wo dS die von den äusseren Kräften auf das System ausge Arbeit, und dQ die im System (in Folge der electrischen gänge) sich entwickelnde Wärme vorstellt."

Das Potentialgesetz: „Für jedes Zeitelement dt ist:

$$(3.)\quad dT + \delta(U^0+U+V) = dS,$$

wo dS die schon genannte Bedeutung hat. Dabei bezeic $\delta(U^0+U+V)$ denjenigen virtuellen Zuwachs, welchen U^0+U während der Zeit dt annehmen würde, falls während dieser die electrischen Ladungen und Strömungen im Innern eines je Conductors constant blieben."

Zu bemerken ist, dass das Energiegesetz keiner Einsch kung unterliegt, während andererseits das Potentialgesetz vom fasser nur für den Fall abgeleitet ist, dass die electrischen S mungen im Innern der einzelnen Conductoren als gleichför und an ihren Oberflächen als tangential angesehen werden dür

Vernachlässigt man (wie üblich) die durch U^0 und U re sentirten ordinären und electrostatischen Kräfte gegenüber durch V repräsentirten electrodynamischen Kräften, so neh die Formeln (1.), (2.a,b), (3.) folgende Gestalten an:

$$(\text{I.})\quad F = -V,$$

$$(\text{II.})\quad d(T+F) = dS - dQ \quad \text{oder:} \quad d(T-V) = dS - dQ,$$

$$(\text{III.})\quad dT - \delta F = dS \quad \text{oder:} \quad dT + \delta V = dS.$$

Bringt man die Formel (III.) auf den Fall zweier glei förmiger Stromringe in Anwendung, so gelangt man zu d (schon von F. Neumann aufgestellten) Satz, dass die ponde motorische Einwirkung zweier solcher Ringe auf einander Kräften und Drehungsmomenten besteht, welche sich ausdrück lassen als gewisse Differentialquotienten ihres gegenseitigen P tentials.

Eine Discordanz zwischen den angegebenen Gesetzen mac sich bemerklich, sobald man dieselben auf constante Magnet anwendet. Der Grund dieses Widerspruchs kann nach Ansic

s Verfassers nur darin zu suchen sein, dass constante Magnete cht existiren, und nicht existiren können; ebenso wenig etwa, ie ein Weltkörper gedacht werden kann, der trotz der Einwirng der übrigen Weltkörper constante Geschwindigkeit behält.

Nn.

NEUMANN. Ueber die von Helmholtz in die Theorie der electrischen Vorgänge eingeführten Prämissen, mit besonderer Rücksicht auf das Princip der Energie. Leipz. Ber. XXIII. 450-478.

In diesem Aufsatz hat der Verfasser die Prämissen der von lmholtz aufgestellten Theorie (Borchardt's Journal, Bd. LXXII, 129 siehe F. d. M. II. p. 800) zu erkennen und darzulegen sich müht.

Nn.

NEUMANN. Vorläufige Conjectur über die Ursachen der thermoelectrischen Ströme. Leipz. Ber. XXIV. 49-64.

Die zum Gleichgewicht eines Gases erforderlichen Bedingen lauten bekanntlich:

$$(1.)\quad \frac{1}{\delta}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{1}{\delta}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y},\quad \frac{1}{\delta}\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial z},$$

P den innern Druck des Gases, δ seine Dichtigkeit und F Kräftefunction der von Aussen einwirkenden Kräfte bezeichn. Dabei ist nach dem Mariotte'schen Gesetz:

$$(2.)\quad P=R(a+\vartheta)\,\delta,$$

R, a Constante sind, und ϑ die Temperatur vorstellt.

Die Gleichungen (1.) lassen sich zusammenfassen in die mel:

$$(3.)\quad dP=\delta.\,dF;$$

e aber geht, falls man durch (2.) dividirt, über in:

$$(4.)\quad d(lg P)=R\,\frac{dF}{a+\vartheta}.$$

Gleichgewicht wird daher nur dann eintreten können, n $a+\vartheta$ eine Function von F ist, also nur dann, n die Temperatur ϑ an allen Stellen einer Niveaufläche



weiter verfolgte Conjectur besteht nun in der Annahm
innern Ursachen der thermoelectrischen Ströme dene
genannten Gasstroms ähnlich seien.

C. NEUMANN. Ueber die Elementargesetze d
electrodynamischen Ursprungs. Leipz. Ber. XX
Clebsch Ann. V. 602-624.

Als die sichersten Stützen der Electrodynamik bet
Verfasser die beiden F. Neumann'schen Integralgesetze
deromotorische und das elektromotorische), ferner das
Gesetz über die entwickelte Wärme, ferner das Princip
digen Kraft, endlich das Ampère'sche Elementargesetz,
einen Weg an, auf welchem man von diesen Grund
ohne auf die innere Mechanik des electrischen Stromes e
zu dem noch fehlenden electromotorischen Elementa
langen könne. Die Form, in welcher dieses Gesetz l
ergiebt, ist folgende:

Sind zwei beliebige Körper *A* und *B* in beliebi
gungen begriffen, und bezeichnet *m* einen Punkt d
A, ferner *Dv* ein Volumelement von *B*, so wird die vo
rend der Zeit *dt* im Punkte *m* hervorgebrachte electro
Kraft im Allgemeinen aus zwei Kräften zusammeng

Strömung i und besitzt, in der Richtung von i gerechnet, Stärke:

$$+A^2 Dv \frac{i\,dr}{r^2}.$$

›ei bezeichnet d diejenigen Aenderungen, welche stattfinden ırend der Zeit dt. Ausserdem ist A^2 eine Constante.

Für den speciellen Fall, dass der inducirende und der inducirte per identisch (oder wenigstens starr mit einander verbunden) l, ist dieses Gesetz in Uebereinstimmung mit den betreffenden meln von Weber und Kirchhoff.

Zu Anfang des Aufsatzes findet man Bemerkungen über anweitige Theorien. So z. B. wird gegenüber der neuerdings Helmholtz aufgestellten Theorie nachgewiesen, dass für die deromotorische Einwirkung zweier electrischer Stromelemente Potential nicht existiren könne; denn die Annahme eines solchen ›ntials stände in diamentralem Widerspruch mit den elektro-›netischen Rotationserscheinungen*). Nn.

BERTRAND. Sur la démonstration de la formule, qui eprésente l'action élémentaire de deux courants.

:. R. LXXV. 733-736.

Ampère hat bekanntlich das Gesetz der Wechselwirkung ier Stromelemente auf einander aus einer kleinen Zahl von ıdamentalversuchen abgeleitet. Zwei der hauptsächlichsten ıer Versuche sind:

1) Ein geradliniger Strom und ein demselben stets sehr nahe bender, aber beliebig gewundener Strom üben dieselbe Wirıg auf ein Stromelement aus.

2) Ein geschlossener Stromkreis übt auf ein Element stets › Wirkung aus, die senkrecht zu dem Elemente steht.

In der vorliegenden Arbeit sucht der Verfasser nachzuweisen, s der erste Versuch überflüssig ist, da er als nothwendige ›e des zweiten Versuchs angesehen werden kann, und giebt n eine kurze Ableitung des Ampère'schen Gesetzes allein auf nd des zweiten Versuchs. Ok.

---

*) Auf denselben Widerspruch ist etwas später auch von Riecke ›erksam gemacht worden. (Vergl. pag. 547 dieses Jahrganges d. F. d. M.)

F. Kohlrausch. Ueber die electromotorische Kra
dünner Gasschichten. Gött. Nachr. 1872. 453-465.

Bei Versuchen mit alternirenden Inductionsströmen, durch Rotation eines Magnets innerhalb einer Drahtspirale, durch eine polarisirende Flüssigkeit geleitet wurden, sti Verfasser auf den bemerkenswerthen Umstand, dass für g Umdrehungsgeschwindigkeiten die Wirkung der Polarisati gehoben zu sein scheint. Die Stromstärke erreicht dann einen grösseren Werth, als wenn man die Flüssigkeit durc metallischen Leiter von demselben Widerstand ersetzt.

Diese Erscheinung ist einer gleichzeitigen Einwirkun Extrastroms und der Polarisation zuzuschreiben und findet mathematischen Ausdruck in der Differentialgleichung:

$$q\frac{d^2i}{dt^2}+w\frac{di}{dt}+pi=\frac{k\pi}{\tau^2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right).$$

Das Integral derselben

$$i=\frac{k}{\tau}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)}{\sqrt{w^2+\left(p\frac{\tau}{\pi}-q\frac{\pi}{\tau}\right)^2}}$$

zeigt, dass der Nenner ein Minimum wird, wenn die Kla unter der Wurzel verschwindet. Auf die weiteren interess Folgerungen über die electromotorische Kraft dünner Gassch können wir an dieser Stelle nicht näher eingehen.

E. Riecke. Bemerkungen über die Pole eines
magnets. Gött. Nachr. 1872. 251-261.

Wenn man die Pole eines beliebig gestalteten Magne zwei magnetische Massenpunkte definirt, deren Wirkun einen beliebigen äusseren Punkt gleich sein soll der Ges wirkung des Magnets, so ist einerseits die Aufgabe, diese l zu berechnen, noch keine bestimmte, andererseits würde di der Pole stets wechseln mit der Lage des äusseren Punkt der vorliegenden Arbeit werden weitere Bedingungen hinzu welche die Aufgabe zu einer bestimmten machen, und wird

r verschiedene Magnete die Berechnung der Pole durchführt.

Für einen Stabmagnet hängt die Lage der Pole für Punkte grösserer Entfernung ab von dem Winkel des Radiusvector is betreffenden Punktes mit der magnetischen Axe, nicht aber n der Länge des Radiusvector. Eine weitere Anwendung acht der Verfasser auf die Pole der Magnetnadel einer Tanmtenbussole. Ok.

. Riecke. Ueber die Ersetzbarkeit geschlossener galvanischer Ströme durch magnetische Doppelflächen. Pogg. Ann. CXLV. 218-234.

Das Potential eines geschlossenen electrischen Stromes ist ıch Ampère identisch mit dem Potential einer magnetischen oppelfläche, welche durch die Stromcurve begrenzt wird. Hieri liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass der Punkt nicht in össter Nähe der Doppelfläche liegt. Mit Benutzung der Vielıtigkeit des Potentials der magnetischen Doppelfläche zeigt der rfasser, dass auch für diesen Fall die Ersetzbarkeit zulässig mit Ausnahme des Falls, dass der betreffende Punkt in grosser he der Stromcurve liegt.

Die allgemeinen Sätze werden dann angewandt auf einen rper, der von Kreisströmen bedeckt ist, welche in parallelen enen liegen. Die magnetische Belegung des Körpers, welche es System von Kreisströmen ersetzt, ergiebt sich dadurch, dass n den Körper etwas verschoben denkt in der Richtung der meinsamen Normale der Kreisströme und den nur in einer ge von dem Körper eingenommenen Raum mit magnetischem ıidum erfüllt, und zwar den, der ersten Lage angehörigen mit ıidum von entgegengesetztem Vorzeichen, als den der zweiten ge angehörigen Raum.

Die Rechnung wird dann noch weiter an dem Beispiele eines lipsoids durchgeführt. Ok.

. Börnstein. Zur Theorie des Ruhmkorff'schen Inductionsapparats. Pogg. Ann. CXLVII. 481-524.

Für eine eingehendere Theorie dieses Apparats ist die Berechnung des Potentials einer Drahtspirale auf sich selbst, auf die andere Spirale und auf den Eisenkern nothwendig. Diese Berechnung ist in der vorliegenden Arbeit vollständig durchgeführt. Diese Potentiale lassen sich mit Hülfe elliptischer Integrale in geschlossener Form darstellen. Die weiteren Ausführungen, die Wirksamkeit des Apparats betreffend, dürfen wir wohl an dieser Stelle übergehen. Ok.

CAZIN. Qualité de magnétisme des électro-aimants. C. R. LXXIV. 733-737.

Die Arbeit, welche sich mit der Bestimmung des Magnetismus eines Eisenkerns in einer Magnetisirungsspirale beschäftigt und die Resultate hierüber angestellter Versuche wiedergiebt, hat wenig mathematisches Interesse. Die aufgestellten Formeln, deren ähnliche in grosser Zahl schon von deutschen Physikern gegeben sind, haben keinen Anspruch auf Allgemeinheit. Ok.

J. MOUTIER. Sur les effets thermiques de l'aimantation. Inst. XL. 391-392.

Die beim Magnetisiren und Entmagnetisiren eines Eisencylinders entstehende Wärmemenge soll nach Versuchen von Cazin dem Quadrat des freien Magnetismus und der Entfernung der Pole proportional sein. Die theoretische Ableitung, durch welche Moutier dieses Resultat hier zu begründen versucht, ist so wenig präcis, dass der Referent nicht näher darauf eingehen zu können glaubt. Ok.

FOURNIER. D'une méthode nouvelle pour la régulation des compas. C. R. LXXV. 25-29.

Neuer Vorschlag, den schädlichen Einwirkungen der Eisentheile eines Schiffs auf den Compass durch einen compensirenden Magnetstab zu begegnen, dessen Lage gegen die Magnetnadel verändert werden kann. Beigegeben sind Andeutungen über die Berechnung der wahren Lage des Magnets. Ok.

H. WILD. Ueber ein neues Variationsinstrument für die Vertical-Intensität des Erdmagnetismus. Carl Rep. VIII. 217-226.

Mit der Beschreibung des genannten Apparats ist eine kurze Berechnung seiner Wirkungsweise verbunden. Ok.

F. ZÖLLNER. Ueber die electrischen und magnetischen Fernewirkungen der Sonne. Leipz. Ber. XXIV. 116-128.

Es handelt sich in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich um die Widerlegung von Einwürfen, welche gegen eine früher aufgestellte Hypothese des Verfassers (Leipz. Ber. 1871 und „Natur der Kometen", 77-162) von Zenker gemacht sind.

Die Meinungsdifferenz liegt hauptsächlich in der Frage: Darf man der Sonne einen Ueberschuss an einer Electricitätsart und damit eine electrostatische Wirkung zuschreiben?

Da mathematische Entwicklungen nicht vorliegen, so glauben wir auf diese Hypothesen hier nicht eingehen zu können.
Ok.

O. FRÖHLICH. Das kugelförmige Electrodynamometer. Carl Repert. VIII. 37-45.

Siehe F. d. M. III. p. 530.

J. STUART. Investigation of the attraction of a galvanic coil on a small magnetic mass (appendix to a paper by B. G. Airy). Trans. of Lond. CLXII. 493-496.

J. STUART. Investigation of the attraction of a galvanic coil on a small magnetic mass. Proc. of Lond. XX. 66-70.

Aus Ampère's Untersuchungen ist ein Ausdruck hergeleitet für das Potential U in Bezug auf einen äussern Punkt Q von einem geschlossenen galvanischen Kreisstrom, der durch einen Draht von unendlich dünnem Querschnitt geht; und daraus Ausdrücke für die Anziehungen X und Y des Stromes; mithin auch für die X und Y in dem Falle eines Stromes, der einen Draht

von der Form eines hohlen Cylinders von gegebener Länge gegebenem äusserem und innerem Radius durchläuft.

Cly. (M.).

E. Beltrami. Teorica matematica dei solenoidi elet dinamica. Il Nuovo Cimento (2) VII-VIII. 285-301.

C. H. C. Grinwis. Over de energie eener electris lading. Versl. en Meded. Lesde deel. 140-146.

Analytischer Ausdruck der Energie einer electrischen ladung, wenn die Electricitätsmenge dieselbe, ihr Potential u ändert bleibt, und wenn dieselbe der Wirkung eines Inducti stroms unterworfen ist. Aenderung dieser Energie, wenn Grösse der electrischen Oberfläche sich ändert. Mn. (Wn.

Momber. Vertheilung der Electricität auf zwei Kug Pr. Königsberg.

Capitel 4.

Wärmelehre.

S. Carnot. Réflexions sur la puissance motrice du et sur les machines propres à développer cette pı sance. Ann. de l'Éc. Norm. (2) I. 393-458.

Wiederabdruck der bekannten 1824 erschienenen Arbeil

Wn.

J. Moutier. Eléments de thermodynamique. 18°. P Gauthier-Villars.

E. Mach. Die Geschichte und Wurzel des Satzes der Erhaltung der Kraft. Prag.

Der Verfasser sucht durch eine Reihe von Citaten nac

veisen, dass schon in längst vergangener Zeit der fragliche Satz n verschiedener Form ausgesprochen und dass besonders der Grundsatz des unmöglichen Perpetuum mobile als Princip in Beweisen benutzt worden ist. Daher sieht der Verfasser jenen Satz auch nicht an als eine Folge der fortgeschrittenen, mechanischen Naturerkenntniss, sondern sucht die Wurzel desselben in der Auffassung des Zusammenhangs der Erscheinungen nach dem Causalitätsgesetz. Ok.

R. Clausius. Zur Geschichte der mechanischen Wärmetheorie. Pogg. Ann. CXLV. 132-146.

P. G. Tait. Antwort an Herrn Clausius. Pogg. Ann. CXLV. 496.

R. Clausius. Ueber die von Herrn Tait erhobenen Einwände gegen meine Behandlung der mechanischen Wärmetheorie. Pogg. Ann. CXLVI. 308-313.

Veranlasst durch Darstellungen der Entwickelung der mechanischen Wärmetheorie von Seiten englischer Physiker, besonders on Tait und Maxwell, in denen, zweifellos absichtlich, die Namen eutscher Physiker verschwiegen sind, welche wesentlich zu der usbildung dieser Theorie beigetragen haben, sieht sich Clausius eranlasst, gegen ein solches Verfahren zu protestiren und die storische Reihenfolge der hauptsächlichsten Arbeiten über diesen egenstand festzustellen.

Die hierauf folgende Erwiderung Tait's zieht besonders die ültigkeit der Hypothese in Zweifel, welche dem zweiten Hauptitz zu Grunde liegt. Hieran knüpft daher Clausius weitere Ertterungen über die Frage: ob Wärme „von selbst" von einem älteren zu einem wärmeren Körper übergehen könnte, welche n vorwiegend physikalisches Interesse haben. Ok.

. Szily. Das Hamilton'sche Princip und der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Pogg. Ann. CXLV. 295-302.

R. CLAUSIUS. Ueber den Zusammenhang des zw Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie mit Hamilton'schen Princip. Pogg. Ann. CXLVI. 585-596.

Der zweite Hauptsatz lautet bekanntlich:

$$\int \frac{dQ}{T} \overline{\gtrless} 0,$$

wo dQ die Aenderung der Wärme, T die absolute Tem bedeutet. Identificirt man die Aenderung der Wärme in Körper mit der Aenderung der gesammten Energie aller desselben, die absolute Temperatur mit der gesammten lebe Kraft, so sieht man die Möglichkeit ein, dass der fraglich auf ein Princip der reinen Mechanik, wie das Hamilton'sc rückgeführt werden kann.

Eine derartige Ableitung hat Szily in der oben citirten zu geben versucht. Er geht von dem genannten Princip das sich auf die Form bringen lässt:

$$2 \cdot \delta \int_0^i T di = \delta E,$$

wo δE die Aenderung der gesammten Energie, T die lebe Kraft, das Integral eine Summation über den Zeitraum i bed Der Uebergang von dieser zu jener Gleichung lässt sich eine sehr einfache Transformation bewerkstelligen.

In seiner Erwiderung hierauf zeigt Clausius, dass diese leitung eine unzulässige ist. Es sind hierbei wesentliche Schwi keiten übergangen, die bei dem Beweise des zweiten Haupts zu überwinden sind. Derselbe ist nämlich insofern allgem als das Hamilton'sche Princip, als bei demselben nicht wi jenem, eine Unveränderlichkeit der Kräftefunction vorausge zu werden braucht. Ok.

R. CLAUSIUS. On the connexion of the second pro sition of the mecanical theory of heat with Ha ton's principle. Phil. Mag. 1872.

Eine Uebersetzung aus Poggendorff's Annalen CXLVI. p. Csy.

. Kurz. Ueber die Nothwendigkeit, den zweiten Satz der mechanischen Wärmetheorie zu popularisiren. Carl Rep. VIII. 161-172.

Der Verfasser theilt eine Reihe von Rechnungen und Bei-ielen mit, die sich zum Theil auf jenen Satz beziehen, ohne ıss uns indess der im Titel angedeutete Zweck dadurch ge-rdert zu sein schiene. Ok.

elpaire. Note sur le second principe de la thermodynamique. Bull. de Belg. (2) XXXIV. 502-525.

. Folie et Glasener. Rapports sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XXXIV. 448-453.

Die folgende Skizze möge den neuen, sehr einfachen Beweis es Princips von Carnot und Clausius veranschaulichen.

1) Es sei Q die von einem Körper absorbirte oder entwickelte ärmemenge, A das Wärmeäquivalent für die Arbeitseinheit, V e Energie des Körpers, S die äussere durch den Körper ge-istete Arbeit, so ist

$$dQ = A(dV + dS).$$

e Grössen Q, V, S und die Temperatur t des Körpers (letztere ch hunderttheiligen Graden gemessen) hängen von dem äusseren, f den Körper ausgeübten Druck und von seinem Volumen V . Ist der Druck an der ganzen Oberfläche des Körpers con-nt, so ist $dS = p\,dv$. Setzt man nun

$$(1)\quad dQ = A(X dp + Y dv) = A\left[\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)dp + \left(\frac{\partial V}{\partial v} + p\right)dv\right],$$

ist

$$(2)\quad \frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = -1.$$

2) Ist $T = a + t$ die Temperatur des Körpers, vom absoluten lpunkt an gezählt, so kann man als Princip annehmen, dass i einer isothermen Transformation bei der unendlich kleinen mperatur ε die in Arbeit umgesetzte Quantität der Energie endlich klein ist." Daraus folgt unmittelbar, dass bei irgend er isothermen Transformation die Function $Q = \varphi(T, V)$,

welche die von dem Körper abgegebene Wärme angiebt, der Körper vom Volumen V_0 das Volumen V erlangt, di $T\cdot\mu$ haben muss, da für $T=0$, $Q=0$ ist. μ ist dab Function von T und v. Es ist somit

$$dQ = T\cdot d\mu,$$

und daher ist bei einer isothermen Transformation $\frac{dQ}{T}$ ein Differential. Es gelten also gleichzeitig die Relationen ($dT=0$ und

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X}{T}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Y}{T}\right),$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$dQ\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = ATdv.$$

3) Es werde nun ein in jedem Sinne unendlich k Carnot'scher Kreisprocess geometrisch in einer Ebene darg wobei die Coordinaten die Grössen v und p darstellen. Temperaturen T und $T+\varDelta T$ mögen die isothermen Curv cd entsprechen, und die adiabatischen Curven ad, bc möge Werthen Q und $Q+dQ$ entsprechen. Man kann sich leicht zeugen, dass die während des vollständigen Verlaufes des I processes absorbirte Arbeit durch den Inhalt der Fläche gemessen wird. Nennt man diesen Inhalt $\varDelta^2 F$, so ist $d^2F=$ wobei dp der Zuwachs von p ist, wenn T auf $T+\varDelta T$ w während v constant ist. dv ist dagegen der Zuwachs v wenn Q zu $Q+\varDelta Q$ wird. Daraus folgt:

$$d^2F = \frac{dT}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)}dv = \frac{dT\cdot dQ}{AT}.$$

Für einen Carnot'schen Kreisprocess, der nur in einem S unendlich klein ist, und für einen beliebigen Kreisprocess weil $dQ = AdF$

$$(3)\quad dF = \frac{dT}{AT}Q,\quad \frac{Q}{T} \doteq C,$$

und

$$\frac{Q_2-Q_1}{Q_1} = \frac{T_2-T_1}{T_1}.$$

es ist der analytische Ausdruck des Carnot'schen Satzes. Aus
ist eine wichtige Folgerung abzuleiten. Nimmt man nämlich
dass der Körper von einer Reihe von Anfangszuständen aus-
at, die geometrisch durch eine adiabatische Linie dargestellt
rden, die Linie der Anfangszustände, und dass für diese Linie
$= 0$ ist, so ist für eine andere adiabatische Linie $Q = T \cdot C$.
d da allgemein $Q = T \cdot \mu$ war, so ist μ längs einer adiabati-
ıen Curve constant.

Nimmt man daher T und μ zu unabhängigen Variabeln und
Coordinaten, so wird ein Carnot'scher Kreisprocess durch ein
chteck dargestellt, dessen Seiten den Axen parallel sind.

4) Die Anwendung der erwähnten neuen Coordinaten er-
öglicht den Beweis des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie
r den Fall irgend einer umkehrbaren Transformation. Die bei
ner solchen Transformation abgegebene unendlich kleine Wärme-
enge, die durch die Grenzwerthe von T und μ bestimmt wird,
mlich

$$T, \quad \mu, \quad T+\Delta T, \quad \mu+\Delta\mu$$

bis auf ein unendlich Kleines zweiter Ordnung gleich der
ärmemenge, die bei der isothermen Transformation

$$T, \quad \mu, \quad T, \quad \mu+\Delta\mu$$

d bei der adiabatischen Transformation

$$T, \quad \mu+\Delta\mu, \quad T+\Delta T, \quad \mu+\Delta\mu$$

gegeben wird. Im letzteren Fall ist jene Wärmemenge $= 0$,
i einer isothermen Transformation ist sie bis auf Grössen
eiter Ordnung $T \cdot d\mu$. Durch die geometrische Darstellung von
' mit Hülfe der Coordinaten T, μ ist daher ersichtlich, dass
irgend eine umkehrbare Transformation auch $dQ = T \cdot d\mu$ ist,
h. dass $\frac{dQ}{T}$ ein exactes Differential ist.

5) Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun durch elemen-
r-geometrische Sätze das bekannte Theorem über die Leistung
ermischer Maschinen. Es ist in folgender Aufstellung enthalten:

$$\frac{S}{S+S'+A} < \frac{S+S''+S'}{S+S'+S''+A}.$$

abei sind S, S', S'', A Flächenräume in der Ebene der Coor-

dinaten T, μ. S ist begrenzt durch die irgend einem ur
baren Kreisprocess entsprechende Curve, $S+S''+S'$ ist der
eines der Curve umschriebenen Rechtecks, das einen Carnot
Kreisprocess darstellt, $S'+A$ ist der Inhalt der Fläche, die zw
der eben besprochenen Curve und der Axe der μ liegt.

Mn. (Wn

J. STEFAN. Ueber die dynamische Theorie der Diff
der Gase. Wien. Ber. LXV. 323-364.

In der Theorie der Gase, welche beruht auf einer An
der Bewegung der einzelnen Gasmolecüle, stehen noch zw
sichten einander gegenüber: die ältere, zur Zeit noch von
sius vertretene, nach welcher die Gasmolecüle bei ihrer
sammentreffen sich verhalten wie elastische Kugeln; un
neuere von Maxwell aufgestellte, nach welcher die Gasm
sich abstossen umgekehrt proportional der fünften Poten
Entfernung. Zur weiteren Aufklärung dieser Frage geh
Verfasser ein auf die Theorie der Diffusion zweier Gase i
ander.

Da der Diffusionscoëfficient zweier Gase für versch
Combinationen durch Versuche bestimmt ist, so kam es a
Berechnung desselben an. Derselbe ist:

$$K = \frac{1}{A_{12}} \cdot \frac{p}{d_1 \cdot d_2}.$$

Hier bedeutet p den Druck, unter dem das Gasgemenge
d_1 und d_2 sind die Dichtigkeiten der beiden Gase. A_{12} is
Grösse, welche von der Natur der beiden Gase und vo
über die Bewegung und die Zusammenstösse gemachten
aussetzungen abhängt und welche verschieden ausfällt, je
dem man der einen oder anderen Theorie folgt.

Zunächst wird die von Maxwell gegebene Ableitung
recapitulirt.

Die Formel, zu der man auf diesem Wege gelangt, la

$$K = \frac{3\pi}{8} \sqrt{2} \frac{\sqrt{m_1 + m_2} \cdot v \sqrt{m}}{\sqrt{m_1 \cdot m_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \right\}^2}.$$

bedeuten m_1, m_2 die Massen der Molecüle, v deren
leschwindigkeit. (Die mittleren lebendigen Kräfte bei-
sind gleich; daher: $v\sqrt{m} = v_1\sqrt{m_1} = v_2\sqrt{m_2}$). λ_1 und
ndlich die mittleren Weglängen. Dieselben sind nach
ı über die innere Reibung der Gase aus den Reibungs-
;en berechnet. Ausführlicher ist dann die Berechnung
Annahme von Clausius durchgeführt, und gleichzeitig
eine Reihe verwandter Probleme über die Molecular-
er Gase gelöst.
Vergleich der numerischen Resultate mit den Beobach-
ɔn Loschmidt giebt eine bessere Uebereinstimmung bei
g der Theorie von Maxwell. Ok.

ɪZMANN. Ueber das Wirkungsgesetz der Mole-
ĸräfte. Wien. Ber. LXVI. 213-219.

Verfasser behandelt die Frage, ob die kleinste Entfer-
welche zwei Gas- oder Dampf-Molecüle bei einer gegen-
Annäherung auf ihrer Centrale gelangen, eine Grösse
vergleichbar ist mit der Entfernung zweier Molecüle
ı Körpers im flüssigen Zustande. Die Betrachtung wird
Beispiel des Wassers durchgeführt.
Frage wird dadurch gelöst, dass berechnet und gleich-
verden:
lie Arbeit, die geleistet wird bei derjenigen Annäherung
Vassermolecüle, die einer Zunahme des Druckes auf die
erfläche um eine Atmosphäre entspricht;
lie mittlere lebendige Kraft zweier Wasserdampfmolecüle.
ist gleich Null, wenn die Molecüle in die grösste Nähe
en sind, welche sie erreichen können. Die gefundenen
ĸe 1) und 2) können gleichgesetzt werden, wenn man
Verfasser annimmt, dass „die Molecüle ihre Beschaffen-
ch den Uebergang in den gasförmigen Zustand nicht

Resultat ergiebt sich, dass die Entfernung der Centra
len Dampfmolecüle im Augenblick ihrer grössten Annä-

herung nur noch $\frac{2}{3}$ von der Entfernung der Wasserm
beträgt. O

L. Boltzmann. Weitere Studien über das Wärmeg
gewicht unter Gasmolecülen. Wien. Ber. LXVI. 275

Die Anzahl der Molecüle eines Gases, deren Gesch
keiten zwischen den Grenzen v und $v+dv$ liegen, ist:

$$A\cdot v^2\cdot e^{-Bv^2}\cdot dv.$$

Dieser von Maxwell aufgestellte Satz ist von demselb
wiesen worden, indem er zeigte, dass, wenn die oben ge
Vertheilung der Geschwindigkeit in einem Augenblick w
besteht, dieselbe durch irgend welche Zusammenstösse vor
cülen nicht verändert wird. Boltzmann hält diesen Bew
ungenügend, da nicht a priori entschieden werden kann, o
auch eine andere Formel dasselbe leistet.

In Abschnitt I. und II. der vorliegenden Arbeit ist dal
eben besprochene Aufgabe noch einmal behandelt. Das R
ist wieder die Maxwell'sche Formel. Die Ableitung ist
Weise durchgeführt, dass für die gesuchte Function f d
schwindigkeit (für letztere hat B. die lebendige Kraft x als
hängige Variable eingeführt) eine partielle Differentialgle
aufgestellt wird. Dann wird der Beweis geliefert, dass
die Function $f(xt)$ der gefundenen partiellen Differentialgle
genügt, der Ausdruck:

$$E=\int_0^\infty f(xt)\ \left\{ lg\left(\frac{f(xt)}{\sqrt{x}}\right)-1\right\}\ dx$$

stets abnehmen muss oder höchstens constant bleiben
dass also:

$$\frac{dE}{dt}\leqq 0.$$

Da E nicht negativ unendlich werden kann, so mu
letzte Ausdruck $=0$ sein, und daraus folgt unmittelbar di
well'sche Gleichung.

Der eben besprochene Beweis wird darauf noch ein
durchgeführt, dass an Stelle der partiellen Differentialglei

ı System gewöhnlicher Differentialgleichungen gesetzt wird. ər Vortheil dieser Abänderung besteht darin, dass man den ›weis auch führen kann, wenn man annimmt, dass das Gas ır aus einer begrenzten Zahl von Molecülen besteht.

In Abschnitt (III) sind im Anschluss an Maxwell (Phil. Mag.) XXXV) diejenigen Modificationen in der Geschwindigkeits- ›rtheilung der Molecüle eines Gases besprochen, welche bei ›r Diffusion mehrerer Gase in einander, bei Reibungserschei- ıngen und bei partiellen Temperaturänderungen eintreten. In ›schnitt IV und V werden die in den beiden ersten Abschnitten ırchgeführten Betrachtungen ausgedehnt auf ein Gas, dessen ›lecüle aus mehreren Atomen bestehen. Die Ableitung führt ıch hier wieder auf eine Grösse E, von der bewiesen wird, ›ss sie constant bleiben muss. Ok.

. v. Lang. Zur dynamischen Theorie der Gase. Pogg. Ann. CXLV. 290-294. CXLVII. 157-160. Wien. Ber. LXV. 415-419.

Durch allgemeine Betrachtungen über die Bewegung der smolecüle sind Ausdrücke für den Coëfficienten der inneren ibung und für das Wärmeleitungsvermögen der Gase abgeleitet rden. Der Verfasser sucht auf möglich einfachste Weise die- ben Ausdrücke herzuleiten, indem er (nach dem Vorbilde von önig) die Annahme zu Grunde legt, dass sich die Gasmolecüle in drei zu einander senkrechten Richtungen und mit gleichen, tleren Geschwindigkeiten bewegen. Er gelangt dabei zu den- ben Ausdrücken, wie die ausgeführtere Theorie. Nur für das ırmeleitungsvermögen findet sich ein anderer Zahlenfactor, als der Formel von Clausius. Dieser Umstand wird ausführlicher der zweiten Notiz besprochen, und ein neuer Ausdruck abge- tet, der sich besser den Versuchsresultaten von Stefan an- liesst, als die beiden früheren Formeln. Ok.

. Sellmeier. Druck und elastischer Stoss. Pogg. Ann. CXLV. 162-164.

G. HANSEMANN. Druck und elastischer Stoss. Pogg
CXLVI. 620-623.

Anknüpfend an eine frühere Arbeit von Hausemann
d. M. III. 539) erörtert Sellmeier die Frage, ob der Dru
eine feste Wand, der durch regelmässig wiederkehrende
eines elastischen Körpers hervorgebracht wird, wiederzugel
durch die Formel:

$$p = m \cdot g, \quad \text{oder durch:} \quad p = \frac{m \cdot g}{2},$$

wo m die Masse, g die Beschleunigung der Schwere bede

Hansemann's Gegenbemerkung zeigt, dass die Beantw
der Frage abhängt von der Definition der „Masse" durch G
und Beschleunigung. Ol

S. ŠUBIC. Ueber die Constanten der Gase. Pogg.
CXLVII. 302-317.

S. ŠUBIC. Ueber die Temperaturconstante. Pogg.
CXLVII. 432-468.

Die Arbeit enthält speciellere Ausführungen der neuer
wegungstheorie der Gase, und werden besonders Bezieh
zwischen verschiedenen experimentell bestimmten Constant
sucht. Die bemerkenswertheste derselben ist der folgend
„Die speciellen Wärmen der Gase bei constantem Volumen ver
sich wie die Anzahl der Atome, aus denen ein Molecül be
Wenn man die absolute Temperatur eines Gases proportiona
der mittleren lebendigen Kraft der fortschreitenden Bew
seiner Molecüle, so erhält man:

$$h \cdot T = \frac{mu^2}{2}.$$

Die hier auftretende Grösse h nennt der Verfasser die „Temp
Constante," und findet für dieselbe:

$$h = \tfrac{3}{2} A,$$

wo A das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit ist. Auf
dieses Resultats erfolgen weitere Betrachtungen über die T
der Gase. Ol

Ph. Gladbach. Untersuchungen über das gesetzmässige Verhalten der Gase und Dämpfe. Pogg. Ann. CXLV. 318-328.

Speculationen über die Veränderlichkeit der Gewichtseinheit Wasserdampf, als Function von Druck und Temperatur, veranlassen den Verfasser anzunehmen, dass das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit nicht, wie gewöhnlich angenommen, eine Constante, sondern eine Function der Temperatur ist. Auf Grund dieser, sonst durch nichts motivirten Annahme wird eine neue Ableitung der Veränderlichkeit des Dampfvolumens in genauem Anschluss an Clausius gegeben. Ok.

W. C. Wittwer. Beiträge zur Theorie der Gase. Schlömilch Z. XVII. 13-38.

Der Verfasser führt die Wirkung zweier Gasmolecüle auf einander auf abstossende Kräfte zurück. Zweck der Arbeit ist, zu zeigen, dass wenn man als Wirkungsgesetz dieser Kräfte nicht: $-\frac{b}{r^n}$, sondern eine Reihe:

$$-\left\{\frac{b}{r^n}+\frac{c}{r^p}+\frac{e}{r^q}+\cdots\right\}$$

annimmt, dass sich dann die Abweichungen der Gase von dem idealen Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetz erklären lassen. Die mathematische Betrachtung des Verfassers beschränkt sich auf eine Reihe von Gasmolecülen, die in einer einzigen geraden Linie liegen.

Die Schlüsse, die aus diesen Prämissen über das Verhältniss von Volumen, Druck und Temperatur gezogen werden, können, wie leicht einzusehen, nur als erste Annäherungen gelten.

Ok.

L. Maillard. De la définition de la température dans la théorie mécanique de la chaleur et de l'interprétation physique du second principe fondamental de cette théorie. C. R. LXXV. 1479-1482.

Der vorliegende sehr kurze Auszug der Abhandlung des Verfassers giebt den Beweis eines Satzes der mechanischen Wärme-

theorie, aus welchem sich als Definition der Temperatur er
die lebendige Kraft des Schwerpunkts eines Gasmolecüls.
Ol

J. Moutier. Sur le travail interne qui accompag
détente d'un gaz sans variation de chaleur. C. R. L
1095-1099.

Mit Hülfe von Betrachtungen, welche Clausius übe
Dulong-Petit'sche Gesetz angestellt hat, wird die innere .
verglichen, welche bei der Ausdehnung der Kohlensäure un
Wasserstoffs geleistet wird. Dieselbe ist bei ersterer grösse
bei letzterem. Ok

F. Massieu. Note sur la loi des tensions maxima
vapeurs. C. R. LXXV. 872-876.

Mit Hülfe theoretischer Betrachtungen wird der Versucl
macht, die Spannkraft der Dämpfe als Temperaturfunction
zudrücken. Der Verfasser gelangt indess nur zu einem
complicirten Ausdruck in Form einer Differentialgleichung.
Ok.

J. Bourget. Du coëfficient économique dans la ther
dynamique des gaz permanents. C. R. LXXIV. 1230-

Kurzer Auszug einer ausführlichen Arbeit. Einige Sätze
den ökonomischen Coëfficienten calorischer Maschinen we
ohne Beweise gegeben. So findet der Verfasser für eine Masc
die zwischen den Reservoiren mit den Temperaturen t_1 ur
arbeitet, nach dem Carnot'schen Kreisprocesse diesen Coëfficie

$$\varrho = 1 - \frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2}.$$

Für jeden anderen Kreisprocess ist derselbe kleiner. Ok

H. Résal. Mémoire sur les volants des machine
vapeur. Ann. des Mines (7) I. 249-270.

Ausführliche Abhandlung zu dem Bd. III. 539 dieser Fort-
ıritte erwähntem Auszug.

Die angestellten Rechnungen haben den Zweck, die für
hwungräder günstigsten Constructionsbedingungen anzugeben.

Ok.

W. Strutt (Lord Raleigh). On the vibrations of a gas contained within a rigid spherical envelope. Proc. of L. M S. IV. 93-104.

Cly.

. A. Bellanger. Petit catéchisme de machines à vapeur. 2me. éd. avec. atlas. 8. Paris. Gauthier-Villars.

rosch. Ueber den Temperaturzustand eines von zwei nicht concentrischen Kugelflächen eingeschlossenen Körpers. Schlömilch Z. XVII. 498-507.

Die vorliegende Arbeit ist die Fortsetzung einer Abhandlung
chlömilch Z. XIII. s. F. d. M. I. p. 379) und nimmt als Aus-
ngspunkt die Arbeit von C. Neumann „Allgemeine Lösung des
oblems über den stationären Temperaturzustand etc.“

Die im Titel genannte Aufgabe erfordert die Bestimmung
ler Function V_1, wo:

$$4\pi V_1 = \int \eta'_\sigma V_\sigma d\sigma + \int \eta'_\tau V_\tau d\tau.$$

V_σ und V_τ sind die auf den beiden Kugelflächen herrschen-
n stationären Temperaturen, welche gegeben sein müssen. Die
egrationen erstrecken sich über jene Kugelflächen. η'_σ und η'_τ
ıd zwei, schon in dem ersten Theil der Arbeit bestimmte Func-
nen. Die speciellere Berechnung und Transformation dieser
nctionen wird durchgeführt für den Fall:

1) dass die Kugelflächen in parallele Ebenen übergehen,
2) dass die Kugelflächen sich berühren.

Ok.

H. Weber. Ueber das Wärmeleitungsvermögen Eisen und Neusilber. Pogg. Ann. CXLVI. 257-283.

Die Arbeit enthält die experimentelle Bestimmung des seren und inneren Wärmeleitungsvermögens der oben genan Metalle, nach einer von F. Neumann angegebenen Methode. Stab wird an dem einen Ende bis auf eine bestimmte Ten ratur u_0 erwärmt und am andern bis auf die Temperatur u_1 gekühlt. Darauf umgekehrt das erste Ende dieselbe Zeit bis u_1 abgekühlt, das andere Ende bis auf u_0 erwärmt, etc. V dies in regelmässigen Perioden fortgesetzt, so tritt schliess innerhalb jeder Periode ein stationärer Temperaturzustand Stabes ein. Die mathematische Behandlung dieser Aufgabe in der Abhandlung nicht ausgeführt, sondern es sind nur resultirenden Formeln gegeben. Auf den experimentellen Th der interessanten Arbeit können wir hier nicht eingehen.

Ok.

J. Stefan. Untersuchungen über die Wärmeleitung der Gase. Wien. Ber. LXV. 45-73.

In der ausschliesslich experimentellen Arbeit werden nur einige leicht abzuleitende Formeln der mathematischen Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern benutzt. Anlass zu der Arbeit gab eine nach der dynamischen Gastheorie von Maxwell ausgeführte Berechnung des Wärmeleitungsvermögens der Luft, nach welcher dasselbe $\frac{1}{3400}$ von demjenigen des Eisens betragen sollte, während der Verfasser aus seinen Versuchen die sehr nahe kommende Zahl $\frac{1}{3360}$ berechnet. Ok.

Jamin et Richard. Mémoire sur le refroidissement des gaz. C. R. LXXV. 105-114, 453-458.

Die vorliegende Arbeit giebt ausschliesslich die Beschreibung und die Resultate von Versuchen über die Erkaltungsgeschwindigkeit von Gasen. Die angestellten Rechnungen sind ganz elementar und dienen nur dazu, die durch die Versuche erhaltenen Curven durch geeignete Formeln darzustellen. Ok.

P. Desains. Recherches sur la réflexion de la chaleur à la surface des corps polis. C. R. LXIV. 1102-1104, 1185-1188.

Nach der Fresnel'schen Theorie der Reflexion und Brechung der Lichtstrahlen erhält man Formeln für die Intensitäten des gebrochenen und reflectirten Strahls, die verschieden ausfallen, je nachdem das Licht senkrecht oder parallel der Einfallsebene polarisirt war. Der Verfasser vergleicht die Resultate einer experimentellen Untersuchung über die Reflexion von Wärmestrahlen an metallischen Oberflächen mit diesen Formeln, kommt dabei indess zu dem Resultat, dass dieselben einer Modification bedürfen, wenn sie die Reflexion von Wärmestrahlen, herrührend von einer Wärmequelle von niedriger Temperatur, wiedergeben sollen. Ok.

A. Genocchi. Sur l'intensité de la chaleur dans les régions polaires. C. R. LXXV. 1521-1524.

Die vorliegende Notiz ist ein kurzer Auszug einer Arbeit, die sich in den Bulletins de l'Institut Lombard (8 Février 1872) findet. Zweck derselben ist, die Irrthümer zu verbessern, die Plana begangen, bei einer mathematischen Untersuchung des Jahresmittels der Sonnenwärme für Orte der Erde zwischen dem Polarkreis und dem Nordpol. Während Plana zu dem auffallenden Resultat gelangt war, dass die mittlere Sonnenwärme vom Polarkreis nach dem Pole hin zunimmt, weist der Verfasser nach, dass dieses Resultat auf Rechenfehlern beruht und theilt die richtige Formel mit, in der elliptische Integrale auftreten.

Ok.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1.

Geodäsie.

W. OGILVY. New theory of the figure of the earth. 4°. London. Longmans.

Hi.

E. FOLIE. Sur le calcul de la densité moyenne de la terre, d'après les observations d'Airy. Bull. de Belg. (2) XXXIII. 389-409.

PH. GILBERT ET LIAGRE. Rapports sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XXXIII. 369-372.

DEWALQUE. Note sur le même sujet. Bull. de Belg. (2) XXXIII. 388-389.

Herr Folie nimmt mit Airy die Erde als sphärisch an und berücksichtigt ihre Rotationsbewegung nicht. Pendelbeobachtungen an zwei auf derselben Verticalen gelegenen Punkten, von denen der eine A ein innerer, der andere B ein äusserer ist, geben das Verhältniss der Intensitäten der Schwerkraft in A und B. Dies Verhältniss hängt nicht nur von den Abständen jener beiden Punkte vom Erdmittelpunkte ab, sondern auch von der Anziehung, welche die sphärische Schicht von der Dicke AB auf beide Punkte ausübt. Airy nimmt an, dass die Dichtigkeit dieser Schicht eine gleichförmige ist und gleich der mittleren Dichtigkeit (2,5), die er in einem Schacht AB bestimmt hat. Herr

lie hat nun dieselbe Rechnung durchgeführt unter der Voraus-
zung, dass die Schicht AB überall eine mittlere Dichtigkeit von
hat, wegen der grossen Ausdehnung der Meere auf der Erd-
ərfläche, während in einem geraden Cylinder von 3 englischen
ilen, der AB zur Rotationsaxe hat, die Dichtigkeit 2,5 ist.
əser Cylinder von der Dichtigkeit 2,5 endet in einer Ebene,
senkrecht zu AB durch A geht.

Während Airy für die mittlere Erddichtigkeit den Werth
66 abgeleitet hat, findet Folie 6,439, eine Zahl, die den durch
dre Methoden gefundenen Resultaten näher kommt. Mn. (Wn.)

SAWITSCH. Les variations de la pesanteur dans les provinces occidentales de l'empire Russe. Monthl. Not. XXXI. 221-224. 1871. Mem. of R. Astr. Soc. XXXIX. II. 19-29.

Der grosse Bogen des Meridians, der in Russland mit all
r Genauigkeit gemessen ist, welche die modernen Beobach-
ıgsmethoden zulassen, ist von besonderer Wichtigkeit geworden,
die Variationen der Intensität der Schwere in den Gegenden,
von diesem Bogen durchschnitten werden, zu untersuchen
d den Verlauf dieser Aenderungen mit den Variationen zu
gleichen, die man beobachtet in der Richtung der Schwere,
lche auf einer Anzahl Stationen durch astronomische Beobach-
ıgen und geodätische Operationen bestimmt ist. Eine ausge-
ınte Reihe von Pendelbeobachtungen war deshalb von der
ademie der Wissenschaften zu St. Petersburg auf gewissen
tionen zwischen Tornea in Finnland und Ismail in der Moldau
eordnet worden, und es waren nur solche Punkte gewählt,
en geographische Lage und deren Erhebung über die mittlere
ae der See in Verbindung mit dem Bogen des Meridians be-
ımt waren. Die Methode, nach der die Pendelbeobachtungen
estellt wurden, wird genau beschrieben, und es werden die
ultate von 12 Stationen mitgetheilt. Auch die Formeln für
Reduction werden aufgestellt, wobei die zur Berechnung von

$$\int_{-1}^{+1}\left(1+\frac{1}{16}\sin^2 u\right)dt$$

brauchte Methode auseinander gesetzt wird. Glr. (O).

A. SONDERHOF. Ein Beitrag zur höheren Geodäsie.
Schlömilch Z. XVII 89-129, 177-232.

Der erste Abschnitt der Abhandlung bezieht sich auf die Theorie eines Linienvielecks, d. h. eines Systems von zwei, drei oder mehr Geraden im Raume und entwickelt die Relationen, welche zwischen den verschiedenen Bestimmungsstücken eines solchen Systems bestehen, mit besonderer Rücksicht darauf, dass die Geraden gedacht werden als Normalen einer Fläche, auf welcher geodätische Operationen auszuführen sind. Im zweiten Abschnitt werden zunächst die bekannten Sätze über Krümmungshalbmesser, conjugirte Tangenten, Krümmungslinien etc. abgeleitet und dann eine Reihe von Relationen aufgestellt für die Krümmungsradien benachbarter Krümmungslinien, für die Centrale, d. h. für denjenigen Durchmesser eines die Fläche osculirenden Ellipsoids, welcher nach dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte gezogen ist, endlich für die Torsion des Hauptschnitts oder für den Winkel, um welchen sich die Hauptschnitte gegen die Richtung der conjugirten Tangente drehen. Abschnitt III. ist einer ausführlichen Anwendung der vorhergehenden Formeln auf das Sphäroid und das dreiaxige Ellipsoid gewidmet, wobei statt der geodätischen Linie die durch die Normale oder die Centrale gelegten Schnitte benutzt werden. Abschnitt IV. enthält Reflexionen über die Art und Weise, wie durch die astronomischen und geodätischen Messungen die Fläche selbst ermittelt wird.

B.

W. JORDAN. Ueber die Bestimmung des Gewichts einer durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmten Unbekannten. Schlömilch Z. XVII. 350-352.

Der Verfasser zeigt, wie man bei der Methode der kleinsten Quadrate die Ausdrücke für die Gewichte der Unbekannten auf etwas einfachere Weise herleiten kann, wenn man statt von der Wahrscheinlichkeitsfunction von dem Princip der kleinsten Quadratsumme ausgeht.

B.

W. JORDAN. Ueber die Bestimmung des mittleren Fehlers durch Wiederholung der Beobachtungen. Astr. Nachr. LXXIX. 219-222.

v. ANDRAE. Ueber die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers durch die gegebenen Differenzen von m gleich genauen Beobachtungen einer Unbekannten. Astr. Nachr. LXXIX. 257-272.

G. ZACHARIAE. Note betreffend die Bestimmung des mittleren Fehlers. Astr. Nachr. LXXX. 67-70.

Herr Jordan hatte in No. 1766-1767 der Astr. Nachr. (s. F. d. M. II. p. 841) Formeln entwickelt, um den wahrscheinlichen Fehler aus den Differenzen der beobachteten Grössen unter sich direct abzuleiten, und dabei Ausdrücke erhalten, welche eine viel genauere Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers zu gestatten scheinen, als die gewöhnlichen. Gegen die Richtigkeit dieser Resultate hatte Herr v. Andrae in No. 1770 den Einwurf gemacht, dass man die Differenzen nicht als von einander unabhängig ansehen dürfe, und dass deshalb die gefundenen Ausdrücke nicht zulässig seien.

Von den vorliegenden Aufsätzen enthält der erste eine Erwiderung des Herrn Jordan. Die Unrichtigkeit der von ihm aufgestellten Genauigkeitsgrenzen des wahrscheinlichen Fehlers wird zugegeben, dagegen die Berechtigung in dem vorliegenden Falle die Beobachtungsdifferenzen wie von einander unabhängige Beobachtungsfehler behandeln zu dürfen, aufrecht erhalten und der Nutzen dieser Betrachtungsweise an dem Beispiel von Längenmessungen darzuthun versucht. Der Aufsatz von Herrn v. Andrae behandelt nun in Erwiderung hierauf in eingehender Weise die Aufgabe, den wahrscheinlichen Fehler herzuleiten aus den Beobachtungsdifferenzen, und zwar aus den ersten Potenzen derselben, weil die Betrachtung der Quadrate der Differenzen und der Beobachtungsfehler zu identischen Resultaten führt. Der Verfasser erhält für den wahrscheinlichen Fehler den Ausdruck:

$$r = 0.5978 \frac{[d]}{C^{\mu}} \left\{1 \pm \frac{0.055 + 0.482m}{m\sqrt{m-1}}\right\};$$

m ist hierbei die Anzahl der Beobachtungen, $\mu = \frac{1}{2}m(m-1)$ u
$[d]$ die Summe der μ positiven Differenzen zwischen den Be
achtungen. Der Aufsatz von Herrn Zachariae endlich wend
sich gegen mehrere Ungenauigkeiten in der Erwiderung d
Herrn Jordan. B.

G. Zachariae. Beiträge zur Theorie des Schlussfehle geometrischer Nivellementspolygone. Astr. Nachr. LXX 305-318.

Enthält einen Beitrag zur Lösung der Frage, ob die Höh differenz zweier Punkte unabhängig ist von dem Wege, auf w chem das die beiden Punkte verbindende Nivellement ausgefül worden ist. Der Verfasser untersucht zunächst den Fall, wo d Niveauflächen ähnliche Sphäroide sind, und findet dass dann d Schlussfehler zweier Nivellements zwischen denselben Punkt innerhalb mässiger Grenzen eingeschlossen ist. Dagegen erhä er für den Fall, dass erhebliche Lothstörungen oder Abweichu gen der Niveauflächen von der sphäroidischen Gestalt vorhand sind, das Resultat, dass merkliche Schlussfehler auftreten könne sobald die Seiten der Nivellementspolygone in verschiedenen N veauflächen von bedeutendem gegenseitigen Abstande liegen.

B.

M. Bauernfeind. Ein Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot, Hansen u. A. benannten geodäti schen Aufgaben. Grunert Arch. LIV. 81-98.

Der Verfasser beschreibt unter dem Namen „Einschneide zirkel" einen kleinen Apparat, welcher dazu bestimmt ist, ohne Zwischenconstructionen auf dem Messtischblatt über einer gege benen Sehne einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gege benen Winkel als Peripheriewinkel fasst. Die Construction des Apparates beruht auf dem Satz: „Wenn die Schenkel eines Win kels e stets durch zwei feste Punkte gehen, so beschreibt sein

ıeitel einen Kreis." Der Aufsatz enthält ausser einer genauen schreibung des Apparats, die Vorschriften für seine Berichtiıg und für seine Anwendung zur Lösung der Pothenot'schen d Hansen'schen Aufgabe, sowie eine Erläuterung seiner pracchen Brauchbarkeit an einigen Beispielen. (S. F. d. M. III. 547). B.

Schlesinger. Eine neue Beweisführung über die Lehmann'schen Sätze bei der Pothenot'schen Aufgabe und Ableitung einer neuen Formel für die Basislänge des Fehlerdreiecks etc. Grunert Arch. LIV. 174-182.

Der Aufsatz enthält zunächst eine einfache Herleitung der hmann'schen Sätze über die Lage des Orientirungspunktes gen das Fehlerdreieck, welches bei der graphischen Auflösung s Pothenot'schen Problems durch falsche Orientirung des Messches entsteht, und behandelt dann die Beziehungen, welche stehen zwischen der Basislänge des Fehlerdreiecks, dem Standdes Messtisches und dem Winkel, um welchen der Messtisch sch orientirt ist. B.

aassvergleichungen des geodätischen Instituts. Berlin, G. Reimer.

Bruhns, A. Hirsch. Europäische Gradmessung. Berlin, G. Reimer.

. A. Hansen. Bemerkungen zu einem vor der permanenten Commission der Europäischen Gradmessung am 21. September vorigen Jahres zu Wien gehaltenen Vortrage. Leipz. Ber. XXIV. 1-15.

Im ersten Abschnitte wird, unter Hinweisung auf die „Supement zu den geodätischen Untersuchungen u. s. w." benannte handlung, in gedrängter Kürze die Reduction der Winkel eines f dem abgeplatteten Revolutionsellipsoid liegenden sphäroidien Dreiecks auf die eines sphärischen von denselben Seiten producirt. Bedeuten nämlich Δ die Fläche des Dreiecks, die erfläche, auf der es gebildet ist, dabei unbestimmt gelassen,

a, b, c seine Seiten, $p+1$, $q+1$, $r+1$ die Krümmungsmaa[illegible] Oberfläche in den Winkelpunkten (oder Eckpunkten) de[illegible] ecks, $p'+1$ das Krümmungsmaass in der normalen Pro[illegible] des Schwerpunktes des Dreiecks auf die zu Grunde gelegt[illegible] fläche und $q'+1$, $r'+1$ die Krümmungsmaasse sehr nahe [illegible] ersten Drittheilungspunkten der an dem Winkel A anlie[illegible] Seiten des sphäroidischen Dreiecks, so geschieht die Re[illegible] des Winkels A vermittelst der Formel:

$$\delta A = -3\frac{\varDelta}{40}(2p'+q'+r') - \frac{\varDelta}{480}\cdot F\cdot(2p+q+r),$$
$$F = 4 - a^2 + 3(b^2+c^2).$$

Für das Revolutionsellipsoid, dessen Excentricität e eine [illegible] der ersten Ordnung ist, gelten dann, wenn man die redu[illegible] Polardistanzen der betreffenden Punkte auf dem Ellipsoid $\bar{\delta}$, [illegible] etc. nennt, die bis auf Grössen vierter Ordnung (ausschlie[illegible] genau berechnet werden müssen, um die Winkelreductione[illegible] δB, δC bis auf Grössen achter Ordnung genau zu erhalten[illegible] Ausdrücke:

$$p' = -(e^2+\tfrac{1}{4}e^4)\cos 2\bar{\delta} + e^4(3\cos^2 2\bar{\delta} - 1),$$
$$q' = -(e^2+\tfrac{1}{4}e^4)\cos 2\bar{\beta}_1 + e^4(3\cos^2 2\bar{\beta}_1 - 1),$$
$$r' = -(e^2+\tfrac{1}{4}e^4)\cos 2\bar{\gamma}_1 + e^4(3\cos^2 2\bar{\gamma}_1 - 1)$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Nach diesen Erklärungen schreitet der Herr Verfasser zur Abw[illegible] der ihm von Herrn Weingarten in einem Vortrage, den derse[illegible] bei Gelegenheit der Sitzung der permanenten Commission [illegible] Europäischen Gradmessung am 21. September 1871 zu Wien hi[illegible] zur Last gelegten Fehler, in welchem u. A. gesagt wird, dass [illegible] jedem Kundigen auffallen müsse, die Lösung der zu den tr[illegible] cendenten Problemen gehörigen Aufgabe: „Die reducirte B[illegible] eines Punktes zu finden, der eine durch ihre Endpunkte gege[illegible] geodätische Linie in gegebenem Verhältnisse theilt", von Ha[illegible] einfach durch die Anwendung sphärisch-trigonometrischer For[illegible] ermöglicht zu sehen, während doch eine solche in einer [illegible] wünschten Annäherung nur durch angemessene Reihenentwi[illegible] lungen erhalten werden könne, freilich beruhe dieselbe aber [illegible]

uf einem sich durch die ganzen Entwickelungen hindurchziehen-
len Irrthume. Die Darlegung dieses Irrthumes in seinen einzel-
ıen Theilen, den Herr Hansen begangen haben soll, glaubt
Referent wortgetreu hier mittheilen zu müssen: „Der erste Fehler
ler Hansen'schen Berechnungsweise besteht nun darin, dass für
las Complement der reducirten Breite des Theilpunktes einer geo-
lätischen Linie AB auf dem Revolutionsellipsoid die Poldistanz
lesjenigen Punktes genommen wird, der die reducirte geodätische
inie (die Seite des correspondirenden Kugeldreiecks $A'B'$) in
em nämlichen Verhältnisse theilt. Dieser Fehler ist von einer
rdnung, die durch die Multiplication des Quadrates e^2 der Ex-
entricität des Sphäroids mit einer Grösse von der Ordnung der
etheilten Seitenlänge gegeben wird; daher, wenn, wie es am
ngeführten Orte geschehen ist, e von der Ordnung der Dreiecks-
eiten angenommen wird, von der dritten Ordnung. Seine Ver-
achlässigung ist, der Versicherung auf Seite 336, Zeile 6 von
en allerdings zuwider, unstatthaft." Gegen die in diesem Rai-
onnement enthaltenen Schlüsse hat der Herr Verfasser einzu-
enden: Da sich zu jedem, auf einem beliebigen Revolutions-
llipsoid zwischen den Endpunkten einer geodätischen Linie und
em der beiden Pole dieses Ellipsoids gebildeten Dreieck mit
ometrischer Strenge ein Corollardreieck auf der Kugel con-
uiren lässt, dessen Seiten die reducirten Polardistanzen der
kpunkte, sowie die reducirte Länge der geodätischen Linie
d, und dessen an der zuletzt genannten Seite anliegende
inkel einerlei Grössen mit den betreffenden Winkeln des sphä-
idischen Dreiecks haben, so erhält man für jeden beliebigen
heil- oder Verlängerungspunkt der geodätischen Linie, die Kennt-
iss der diesem Punkte zukommenden Länge der reducirten geo-
tischen Linie dabei vorausgesetzt, die reducirte Polardistanz
nd die Winkel derselben mit der geodätischen Linie strenge
urch sphärisch-trigonometrische Rechnungen.

Wenn nun die Excentricität des Ellipsoids klein ist, so lässt
ich für die Berechnung der reducirten Länge χ der geodätischen
inie, die sonst allerdings von der Auflösung einer transcendenten
leichung abhängen würde, eine nach den graden Potenzen von

e fortschreitende, rasch convergirende Reihe substituiren, von der hier natürlich nur die Anfangsglieder in Betracht kommen, nämlich:

$$\chi_1 = \sigma + \tfrac{1}{2}e^2\sigma\{\sin^2\tfrac{1}{2}(k+k') - \sin k\cos k'\cos^2\tfrac{1}{2}(l-l')\},$$

worin σ die Länge der geodätischen Linie, k, k' die reducirten Polardistanzen der Endpunkte der geodätischen Linie und l, l' die Azimuthe an diesen Endpunkten bezeichnen.

Versteht man unter n irgend eine Zahl < 1, unter $n\sigma$ also einen Theil der geodätischen Linie σ, und entspricht χ_1 dem $n\sigma$, so hat man, bis auf Grössen fünfter Ordnung genau, für die Länge χ_1 den Ausdruck

$$\chi_1 = n\sigma + \tfrac{1}{2}n\sigma e^2\{\sin^2\tfrac{1}{2}(k+k_1) - \sin k_1\cos k\cos^2\tfrac{1}{2}(l-l_1)\},$$

der durch Entwickelung des eingeklammerten Factors in

$$\chi_1 = n\chi - \tfrac{1}{4}n\sigma e^2\delta k(\cos k\sin k' - \sin k\cos k'\cos(l-l'))$$
$$+ \tfrac{1}{4}n\sigma e^2\delta l\sin k\sin k'\sin(l-l'),$$
$$\delta k = k' - k_1, \quad \delta l = l' - l_1$$

übergeht, woraus folgt, dass, bis auf Grössen vierter Ordnung genau, immer

$$\chi_1 = n\chi$$

gesetzt werden darf. Die Bedeutung von k_1 resp. l_1 ist wohl von selbst klar.

Dieser Satz, von dessen Zulässigkeit man sich noch durch einen zweiten, sehr einfachen Beweis, der in der vorliegenden Abhandlung beigebracht ist, überzeugen kann, wurde zur Berechnung der reducirten Polardistanzen $\overline{\beta}_1$, $\overline{\gamma}_1$ angewandt, die also damit, da der übrige Theil der Rechnung als vollkommen strenge zu betrachten ist, bis auf Grössen vierter Ordnung genau erhalten werden können.

Weiter werden im Weingarten'schen Vortrage folgende Bedenken erhoben: „Der nächste Fehler in Hansen's Arbeit beruht in der Meinung, dass auch den drei nach dem Pol P reichenden sphäroidischen Dreiecken ABP, ACP, BCP, die über den drei Seiten eines sphäroidischen Dreiecks ABC construirt werden können, drei Kugeldreiecke $A'B'P'$, $A'C'P'$, $B'C'P'$ correspondiren, die den Pol P' der Kugel zur gemeinschaftlichen Ecke haben, und deren Basen durch ein sphärisches Dreieck $A'B'C'$ gegeben

erden, dessen Seiten die correspondirenden reducirten geodätiben Linien des sphäroidischen Dreiecks sind, welche Meinung is der zur Berechnung angegebenen Figur des § 33 des Supements hervorleuchtet u. s. w."

Sodann: „Die von ihm aufgestellten, in Beziehung auf das häroid unrichtigen Relationen liefern jedoch nur die Werthe n Poldistanzen, die mit der zu behandelnden Frage in keinerlei ziehung stehen, und die von denjenigen, welche ermittelt wern sollen, wiederum um Grössen von der dritten Ordnung verhieden sind."

Durch Anwendung des oben erwähnten Corollardreiecks auf ei geodätische Linien, die auf dem Ellipsoid das sphäroidische eieck *ABC* bilden, gelangt man, vermöge einer rein geometrihen Betrachtung, zunächst zu der Gleichung:

$$\lambda + \lambda' - \lambda'' = 0,$$

rin λ, λ', λ'' die den Längenunterschieden der Eckpunkte eichen Winkel in P der sphäroidischen Dreiecke *ABP, ACP, CP* bedeuten. Sind nun ω, ω', ω'' die correspondirenden Winkel r Corollardreiecke in P, die mit den Winkeln λ und drei kleinen inkeln oder Kreisbogen $\Delta\omega$ durch die Gleichungen

$$\lambda'' = \omega'' - \Delta\omega'', \quad \lambda' = \omega' - \Delta\omega', \quad \lambda = \omega - \Delta\omega$$

sammenhängen, so ergiebt sich

$$\omega + \omega' - \omega'' - (\Delta\omega + \Delta\omega' - \Delta\omega'') = 0.$$

r die Grösssen $\Delta\omega$ werden die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \tfrac{1}{2}e^2\omega \sin k' \sin k'', \\ \Delta\omega' &= \tfrac{1}{2}e^2\omega' \sin k \sin k'', \\ \Delta\omega'' &= \tfrac{1}{2}e^2\omega'' \sin k \sin k' \end{aligned}$$

nter k, k', k'' dabei die reducirten Polardistanzen der Eckpunkte *B, C* des sphäroidischen Dreiecks verstanden) abgeleitet, die, bst von der dritten Ordnung, bis auf Grössen fünfter Ordnung nau sind. Mit Hilfe der Substitution

$$\begin{aligned} \sin k &= \sin k' + u', \\ \sin k &= \sin k'' + u'' \end{aligned}$$

det sich endlich, wenn man blos die ersten Potenzen von u' d u'' berücksichtigt, die Relation:

$$\omega + \omega' - \omega'' = \tfrac{1}{2}e^2 \frac{\omega' u' - \omega'' u''}{1 - \frac{1}{2}e^2 \sin k' \sin k''} \sin k'.$$

Hat sich daher der Herr Verfasser bei seiner Berechnun reducirten Polardistanz der normalen Projection des Sc punktes des sphäroidischen Dreiecks *ABC* der bis auf Gı vierter Ordnung richtigen Sätze

$$\chi_1 = n\chi,$$
$$\omega + \omega' - \omega'' = 0$$

bedient, so hat er hierbei, da die Berechnung der Polard sonst strenge ausgeführt wurde, und keine schädlichen Divi vorkommen, nur eine erlaubte Grösse übergangen, also die erwähnte Polardistanz bis auf Grössen vierter Ordnung erhalten.

Bekanntermaassen können Grössen, die, analytisch betra übergehbar sind, in der numerischen Anwendung der betreff Resultate nicht ganz unmerklich werden. Da nun das Ha sche Verfahren zur Berechnung der reducirten Polardistan normalen Projection des Schwerpunktes eines sphäroidi Dreiecks verschiedene Arten derselben zulässt, so sind mit l sicht hierauf im Schlusskapitel einige Erörterungen in di Sinne niedergelegt. Beispielsweise werden drei Dreiecke bet tet, nämlich:

	Beiläufige Werthe der Polardistanzen der Eckpunkte.						Beiläufige Seitenlängen.						Beilä Fläcl
I.	45°	0′,	58°	24′,	42°	16′	20°	2′,	17°	0′,	15°	0′	2°1
II.	0	0	20	0	18	49	18	0	18	49	20	0	2 4
III.	74	45	90	0	90	0	19	33	18	0	18	0	2 3

Berechnet man, indem man der Reihe nach von den Eckpunkt *A, B, C* ausgeht, jedes Mal für sich die Grösse $\bar{\delta}$, was wieder auf je zwei Arten geschehen kann, so betragen die grössten Al weichungen der einzelnen Werthe von $\bar{\delta}$ untereinander im

I^ten Dreieck 1″,8,
II^ten „ 1 ,7,
III^ten „ 3 ,1,

aus welchen Zahlen der geringe Einfluss ersichtlich ist, den ein

ränderte Berechnungsweise in diesen, und da ziemlich extreme wählt sind, wohl in allen Fällen auf das Resultat äussert.

Weiter begegnen wir Untersuchungen, die über die numechen Werthe der Fehler angestellt sind, welche aus der Ueberhung der Glieder vierter und höherer Ordnung in der Gleichung $= n\chi$, in $\overline{\beta}_1$ und in $\overline{\gamma}_1$ erwachsen können. Es ergiebt sich u. A., ss der wirklich stattfindende Unterschied in χ stets $< q''$ sein rd. Um wieder ein dort näher betrachtetes Beispiel anzuführen, nke man sich ein auf dem Erdsphäroid liegendes sphäroidihes Dreieck, dessen Fläche durch $2^{\circ}40'$ ausgedrückt sein möge. ir dieses Dreieck bringt im ungünstigsten Falle eine Aenderung n $11''$ im Werthe von $\overline{\delta}$ nur $0'',001$ in den Winkelreductionen rvor; dagegen müssen $\overline{\beta}_1$ und $\overline{\gamma}_1$ um $22''$ geändert werden, um eiche Wirkung auf die Winkelreductionen auszuüben.

Wtn.

A. Hansen. Darlegung einer unbedeutend scheinenden Umformung der Endgleichungen des „Supplements zu den geodätischen Untersuchungen," durch welche aber eine weit grössere Genauigkeit in den numerischen Werthen derselben erlangt wird. (Nebst einer Tafel für die Krümmungsmaasse auf dem Erdsphäroid). Leipz. Ber. XXIV. 15-26.

Der Ausdruck für die Reduction eines sphäroidischen Winls auf einen sphärischen

$$\left.\begin{aligned} -\delta A &= \frac{3\Delta}{40}(2p'+q'+r') + \frac{\Delta}{480}F(2p+q+r) \\ F &= 4 - a^2 + 3\,(b^2+c^2) \end{aligned}\right\}$$

rd umgeformt in:

$$\left.\begin{aligned} -\delta A &= \frac{\Delta}{480}F'(2p'+q'+r') + \frac{\Delta}{120}(2p+q+r) \\ F' &= 36 - a^2 + 3\,(b^2+c^2) \end{aligned}\right\}.$$

Die übrigen Endformeln des „Supplements zu den geodätisen Untersuchungen" lassen sich auf analoge Weise umformen. r Herr Verfasser hat sich dieser Transformation bei der Be-

rechnung einer Reihe von sehr grossen Dreiecken bedient. Das Ergebniss des hier in der nöthigen Ausführlichkeit mitgetheilten Calculs documentirt eine wesentliche Erhöhung der Genauigkeit, die bei kleineren Dreiecken als absolut gelten kann. Für die, im Allgemeinen bis auf Grössen 2ter Ordnung einander gleichen Functionen $2p'+q'+r'$ und $2p+q+r$ wird ferner der Unterschied derselben, bis auf Grössen vierter Ordnung genau, entwickelt, der, wenn man ihn auf das Revolutionsellipsoid von kleiner Excentricität anwendet, einen Genauigkeitsgrad bis auf Grössen sechster Ordnung erreicht, nämlich;

$$(2p'+q'+r') = (2p+q+r) - \tfrac{4}{9}e^2\cos^2\bar{\alpha}\,(a^2+2b^2+2c^2)$$
$$+\tfrac{4}{9}e^2\sin^2\bar{\alpha}\,(3b^2\cos^2\alpha' - 2bc\cos\alpha'\cos\alpha'' + 3c^2\cos^2\alpha'')$$
$$-\tfrac{1}{9}(2p-q-r)(a^2+2b^2+2c^2) - \tfrac{1}{3}(q-r)(b^2-c^2);$$

α' und α'' sind die Azimuthe der Dreiecksseiten b und c am Eckpunkte A, $\bar{\alpha}$ bedeutet die reducirte Polardistanz von A. Diese Formel kann nur bei kleineren Dreiecken in Anwendung kommen; bei grösseren Dreiecken muss die Berechnung von p', q', r' direct nach der, im „Supplement u. s. w.“ auseinandergesetzten Methode geschehen.

Das um die Zahl 1 verminderte Krümmungsmaass, hier mit p bezeichnet, für ein Revolutionsellipsoid, dessen halbe grosse Axe $= 1$, und dessen Excentricität $e = 0{,}0816968$ ist, entnimmt man aus der der Abhandlung beigegebenen Tafel mit dem Argumente: Reducirte Polardistanz. Die mit „Var.“ überschriebene Columne giebt die Veränderung von p, die einer Aenderung von 0,00001 in der Excentricität entspricht, wesshalb die Tafel auch für andere Excentricitäten anwendbar ist. Wtn.

C. Bruhns. Mittheilung über die Ermittelung der Coordinaten der Pleissenburg und verschiedener Thürme in Bezug auf die Leipziger Sternwarte und über die Construction eines Basisapparates. Leipz. Ber. XXIV. 352-370.

Bereits im Jahre 1861 bestimmte der Herr Verfasser auf der Pleissenburg mit Hilfe eines sechszölligen Repsold'schen Uni-

versalinstrumentes und einer kleinen Basis von ungefähr 16$^{m.}$ Länge die Entfernung der Mittelpunkte der Pleissenburg und der neuen Sternwarte, sowie das Azimuth der Richtung Pleissenburg-Sternwarte. Es fand sich damals, dass die neue Sternwarte 10,7″ südlich und 60,0″ östlich von dem alten Observatorium auf der Pleissenburg liegt. Nach dem Bau der neuen Sternwarte erschien es wünschenswerth, diese Bestimmungen von Neuem vorzunehmen, und zwar gestützt auf eine grössere Basis. Die Messung der Basis geschah mit dem, von der Königl. Preussischen Landestriangulation entliehenen Bessel'schen Apparate. Der Herr Verfasser knüpft an den Gebrauch dieses Apparates, seine Feststellung etc. einige technische Bemerkungen. Ferner giebt er einige Vorschläge zur Verbesserung des Bessel-schen Apparates. Die Länge der Strecke ergab sich zu 562,4718^{m} = 288 Toisen 509,51 Linien mit einem mittleren Fehler des vereinigten Resultates der zweimaligen Messung von ± 0,085 Linien = $\pm \frac{1}{2900000}$ der Länge. Die Höhendifferenz findet sich aus der Basis zu 11,274$^{m.}$ und genau eben so gross aus einem zweimaligen directen Nivellement. Wtn.

Gobbi-Belcredi. Degli errori azimutali del teodolite. Atti di Torino VII. 435-444.

Der Verfasser will die azimuthalen Fehler der Theodoliten untersuchen, indem er für zwei Fälle eine einfache Darstellung giebt, nämlich, wenn die optische Axe schräg zur Rotationsaxe liegt, und wenn die Rotationsaxe gegen den Horizont geneigt ist; für einen dritten Fall, wenn die Scheibe gegen den Horizont geneigt ist, will er einige Ungenauigkeiten im Beweise fortschaffen. Jg. (O.)

F. Casorati. Teoria, descrizione ed uso di alcuni strumenti topografici a riflessione. Milano 1872.

Der Verfasser giebt verschiedene Anwendungen von Prismen auf elementare Probleme der Topographie, die zum grossen Theil von den Herren Bauernfeind und Parro ersonnen sind, mit vereinfachten Darstellungen. Besonders sucht er die Anwendungen

der Prismenkreuze von Bauernfeind auszudehnen, indem er das eine Prisma gegen das andere beweglich macht, ohne doch den für Instrumente, die zu Operationen niederer Gattung bestimmt sind, gestatteten Preis zu erhöhen. Er beweist, wahrscheinlich zuerst, dass: „das Bild eines leuchtenden Punktes nach der successiven Reflexion an 3 ebenen unter einander senkrechten Spiegeln in Beziehung auf den gemeinsamen Punkt der 3 Ebenen symmetrisch zum leuchtenden Punkte ist.“ Jg. (O.)

O. Schlömilch. Ueber die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers. Schlömilch Z. XVII. 87-88.

Reproduction der in Thomson und Tait's Handbuch der theoretischen Physik (übersetzt von Helmholtz und Wertheim Bd. I. p. 353 u. f.) gegebenen Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsfunction $f(x) = a\, e^{bx^2}$. O.

Capitel 2.

Astronomie.

W. Klinkerfues. Theoretische Astronomie. 1ste Abtheilung. Braunschweig. Vieweg 1871.

Das Referat über das vorliegende Werk wird nach vollendetem Erscheinen folgen. O.

R. Proctor. Essays on astronomy. A series of papers with illustrations. 8vo. London. Longmans.

Hi.

Brinkley's Astronomy, revised by J. W. Stubbs and F. Brünnow. 12me. London. Longmans.

Hi.

K. Goebel. Ueber Kepler's astronomische Anschauungen und Forschungen. Halle. Waisenhaus.

Der Herr Verfasser führt uns in der vorliegenden Studie in

ıziehender Weise in die Gedankenwerkstatt des grossen Astro-
ómen ein. Nach kurzer Besprechung der kosmischen Anschau-
ngen der Jonier, Hipparch's, Ptolemäus', Regiomontan's, Coper-
icus' und Tycho's werden Kepler's drei „Grundgedanken" ana-
ysirt. Als ersten derselben bezeichnet Herr Göbel die Verwerfung
ines blos ideellen Bewegungs-Mittelpunktes, als zweiten den
rundsatz, dass allen Planeten ein gemeinsames „punctum
equans" zukommen müsse, als dritten die Kepler's ganzes
Vesen erfüllende Ahnung von der „Harmonie" des Weltsystems.
usführlich wird die sogenannte „Hypothesis vicaria" und die
rt und Weise besprochen, wie Kepler selbst sich von deren
Jnrichtigkeit überzeugte, ebenso die Hypothese der eirunden
Curve, welche schliesslich der Ellipse Platz machen musste. Auch
uf die factisch gleichgültigen, für die Geschichte des grossen
lannes selbst dagegen höchst wichtigen Speculationen über den
usammenhang der Weltenharmonie mit den Tonscalen und regel-
ıässigen Körpern wird näher eingegangen.

Die Auffassung des Herrn Verfassers in Bezug auf Kepler's
tellung zur Infinitesimalrechnung scheint doch etwas mehr in
essen Worte hineinzulegen, als eigentlich darin enthalten ist.

Gr.

NEWCOMB. Note sur un théorème de mécanique céleste. C. R. LXXV. 1780-1783.

Siehe Abschn. X, Cap. 4, A, pag. 463.

CAYLEY. On the variations of the position of the orbit in the planetary theory. Monthly Not. XXXII. 206-211.

Der Verfasser bemerkt, dass sich in der Planetentheorie,
eciell beim Gebrauch der Methode der Variation der Elemente
ıe Schwierigkeit in der eigentlichen Behandlungsweise bei den
eigungen und Längen der Knoten findet, welche die weitere
ıtwickelung der Theorie hindert. Obgleich in der allgemeinen
ieorie der secularen Variationen der Bahnen des Planetensystems
φ und c auf eine feste Ebene (die Ekliptik eines gewissen

gegebenen Planeten) bezogen werden, so ist es jetzt in der Theorie der speciellen Planeten auch Gebrauch, die θ, φ für jeden Planeten auf eine besondere feste Ebene (die Bahn des Planeten auf einer gewissen gegebenen Ebene) zu beziehen, was zur Folge hat, dass φ und folglich $p(=\operatorname{tang}\varphi\sin\theta)$, und $q(=\operatorname{tang}\varphi\cos\theta)$, statt von der Ordnung der Neigungen zur Ekliptik nur von der Ordnung der störenden Kräfte sind. Der Verfasser meint, dass die letzterwähnte Ebene beibehalten werden müsse, und benutzt diese Idee, indem er die Störungsfunctionen nach den ersten Potenzen von p und q entwickelt.

Glr. (O.)

A. Cayley. The second part of a memoir on the development of the disturbing function in the lunar and planetary theories. Mem. of R. Astr. Soc. XXXIX. II. 55-74. Monthl. Not. XXXII. 231-232.

Die Abhandlung ist eine Fortsetzung zu des Verfassers Arbeit: „The first part of a memoir on the development of the disturbing function in the lunar and planetary theories", Mem. of the R. Astr. Soc. XXVIII. 187-215, 1859, und ist daher so betitelt, obgleich sie sich wirklich nur mit der Planetentheorie befasst. Im ersten Theil gab der Verfasser, aber nicht explicite, einen Ausdruck für den allgemeinen Coefficienten $D(\gamma,\gamma')$ in Gliedern der Coefficienten der vielfachen Cosinus von θ in den Entwickelungen der verschiedenen Potenzen $(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}$ oder $(a^2+a'^2-2aa'\cos\theta)^{-s-\frac{1}{2}}$, so dass das Glied, welches $\cos(\gamma U+\gamma' U')$ enthält, als von einem gewissen gegebenen Werthe erklärt wurde. Das betreffende Glied ist $D(\gamma,\gamma')\cos(\gamma U+\gamma' U')$ und daher

$$D(\gamma,\gamma')=\Sigma\frac{\Pi_1(x-\frac{1}{2})}{\Pi(x)}\eta^{2x}\Sigma M_x^{\vartheta}R_x^{\vartheta}.$$

Die Auslassung war insofern von Bedeutung, als dieser Ausdruck für den allgemeinen Coefficienten dazu dient, des Verfassers Formeln mit den Entwickelungen von Leverrier in den Annales de l'Observatoire de Paris I. (1855. p. 275-330, 353-383) zu verknüpfen. Der Verfasser resumirt hier die Frage der Ergänzung

ie Theile seiner Abhandlung sind folgende: 1) Formeln für den lgemeinen Coefficienten $D(\gamma, \gamma')$; 2) Specielle Fälle, $\gamma+\gamma'=0$, 4, 6, die in der Planetentheorie vorkommen; 3) Vergleich mit ›verrier; 4) die Entwickelung in Potenzen von e, e'; 5) Beıchtung eines speciellen Falles; 6) Leverrier's Resultate, ausdrückt in den Argumenten $L'-\theta'$, $L'-\Pi'$, $L-\theta$, $L-\Pi$. Der ciproke Werth der Entfernung (bis zur 7ten Ordnung) wird in bellarischer Form (7 Seiten umfassend) durch $L'-\theta'$ etc., in ›lche der Verfasser Leverrier's Argumente transformirt, dargestellt. Die Ausdrücke $-\frac{r\cos H}{r'^2}$ und $-\frac{r'\cos H}{r^2}$, bis zum " Grade in den Excentricitäten und der Inclination entwickelt, ıren von Leverrier gegeben und sind, ebenfalls in $L'-\theta'$ etc. ısgedrückt, in tabellarischer Form aufgestellt. Glr. (O.)

. CAYLEY. Note on a pair of differential equations in the lunar theory. Monthl. Not. XXXII. 31-32. 1871.

Die Gleichungen sind:

$$\frac{d}{dt}\frac{d\varrho}{dt}-\varrho\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{1}{\varrho^2}=km^2\varrho\{\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}\cos(2v-2mt)\},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\varrho^2\frac{dv}{dt}\right)=\gamma m^2\varrho^2\{\quad\tfrac{3}{2}\sin(2v-2mt)\}.$$

Es wird bemerkt, dass es für einige Zwecke passend ist, ber k und γ zu behalten, als sie durch ihre Werthe in der Mondeorie, nämlich die Einheit zu ersetzen. Glr. (O.)

CAYLEY. On a pair of differential equations in the lunar theory. Monthl. Not. XXXII. 201-206.

Lösung der Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{d\varrho}{dt}-\varrho\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{1}{\varrho^2}=km^2\varrho\{\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}\cos(2v-2mt)\},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\varrho^2\frac{dv}{dt}\right)=\gamma m^2\varrho^2\{-\tfrac{3}{2}\cos(2v-2mt)\}$$

derselben Art, wie sie der Verfasser in der obigen Arbeit seinandergesetzt hat. Die Glieder werden bis zu m^6 genommen;

in den Werthen ϱ und v_1 ist $k=\gamma$ gesetzt, so dass die Co ficienten von k, k^2, k^3 dargestellt werden. Glr. (O.)

A. Cayley. On the expression of Delaunay's l, g, in terms of his finally adopted constants. Monthl. N XXXII. 8-16. 1871.

In Delaunay's Mondtheorie ist l die mittlere Anomalie Mondes, g die mittlere Entfernung des Perigäums vom aufst genden Knoten, h die mittlere Länge des aufsteigenden Knote Grössen, welche direct wie die Zeit variiren, und die Coefficient von t oder die Werthe von $\frac{dl}{dt}$, $\frac{dg}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$ sind in seiner „Théo du mouvement de la Lune" II. p. 237 und 238 gegeben. Die Werthe sind aber nicht in den Constanten a, e, γ ausgedrüc die zum Schluss angwandt und p. 800 erklärt sind. In d vorliegenden Arbeit giebt Herr Cayley die dazu nöthigen Tran formationen. Glr. (O.)

A. Cayley. On the expression of M. Delaunay's $h+$ in terms of his finally adopted constants. Monthl. No XXXII. 74.

In Folge der obigen Arbeit hat Herr Cayley einen Brie von Delaunay erhalten, in welchem derselbe mittheilt, dass e selbst Ausdrücke für l, g und h gefunden, die mit denen vo Cayley (bis auf einen Druckfehler) identisch sind. Er hat auc 4 weitere Glieder für $h+g$ gefunden, die mitgetheilt werden. Glr. (O.)

A. Cayley. Notice of a memoir by Prof. S. Newcomb on the lunar theory. Monthl. Not. XXXI. 265-268. 1871.

Kurze Notiz über eine Abhandlung von Prof. Newcomb in den C. R. vom 3. April 1871, s. F. d. M. III. p. 555. Glr. (O.)

Ch. Delaunay. Note sur les mouvements du périgée et du noeud de la Lune. C. R. LXXIV. 17-21.

Delaunay giebt in seiner Mondtheorie die Ausdrücke für die ittlere Bewegung des Knotens und des Perigäums der Mond-ıhn bis auf Grössen von der siebenten Ordnung der kleinen, ırt als Grössen erster Ordnung angesetzten Quantitäten genau. ›rliegende Note enthält die Mittheilung der Fortsetzung dieser ısdrücke bis auf Grössen neunter Ordnung. Die Substitution ımerischer Werthe in diese Ausdrücke liefert für die beiden ttleren täglichen Bewegungen Zahlen, welche bis auf 0″,1 mit n aus zahlreichen Beobachtungen abgeleiteten übereinstimmen, ıe Differenz, welche sich vermuthlich bei noch weiterer Approxi-ıtion vermindern wird, soweit man dies wenigstens aus der Art d Weise, in welcher die bereits bekannten Coefficienten ab-hmen, schliessen kann. B.

ı. DELAUNAY. Variations séculaires des moyens mouvements du périgée et du noeud de la Lune. C. R. LXXIV. 152-153.

Mittheilung einer weiteren Approximation für die secularen ›nderungen der mittleren Bewegungen des Mond-Knotens und s Perigäums. B.

. RÉSAL. Théorie géométrique du mouvement des planètes. C. R. LXXIV. 743-746.

Enthält eine einfache geometrische Herleitung der von La-'ange in seiner Théorie géométrique du mouvement des aphélies ›gebenen Formeln. Die aufgestellten Betrachtungen führen rect dazu, die Variationen der grossen Axe und der Apsiden-ıie einer Planetenbahn auszudrücken durch die Componenten ›r störenden Kräfte, genommen längs der Tangente und Nor-ıle der Bahnellipse. B.

LEVERRIER. Mémoire sur les théories des quatre planètes supérieures: Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. C. R. LXXIV. 1305-1310.

LEVERRIER. Sur les masses des planètes et la parallaxe du Soleil. C. R. LXXV. 165-172.

J. LEVERRIER Détermination des variations séculaires des quatre planètes, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. C. R. LXXV. 1158-1166.

B.

FAYE. Note sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne. C. R. LXXV 645-647.

FAYE. Note sur la stabilité des anneaux de Saturne. C. R. LXXV. 793-795.

B.

O. STRUVE. Sur l'exactitude qui doit être attribuée à la valeur du coëfficient constante de l'aberration. C. R. LXXV. 795-798.

B.

A. MANNHEIM. Sur un modèle de vernier. C. R. LXXV. 1495-1497.

B.

A. SCHELL. Ueber den Einfluss der Fehler des Spiegelsextanten auf die Winkelmessung. Schlömilch. Z. XVII. 465-475.

Der Verfasser leitet direct aus der Betrachtung der Figur des Sextanten auf einem einfachen Wege die schon früher von Encke und Grunert gegebene Formel für die Correction der unmittelbaren Angaben des Instrumentes ab und giebt mehrere Methoden zur Bestimmung der Fehlerconstanten an. B.

J. A. GRUNERT. Neue Auflösungen einer nautisch-astronomischen und einer geodätisch-astronomischen Aufgabe. Grunert Arch. LIV. 419-447.

„Neue ganz allgemeine analytische Auflösung der Douwes'schen Aufgabe in vollständig entwickelten Formeln.“ B.

C. F. W. PETERS. Berichtigung zu Brünnow's sphärischer Astronomie. Astr. Nachr. LXXX. 231-236.

Berichtigung mehrerer auch in die dritte Auflage des be-
nnten Brünnow'schen Lehrbuches über sphärische Astronomie
ergegangenen Versehen und Fehler in dem Abschnitte, welcher
h auf das Passageninstrument im ersten Vertical bezieht.

B.

TODHUNTER. On the proposition 38 of the third book of Newton's Principia. Monthl. Not. XXXII. 234-236.

Newton hat es in der oben bezeichneten Proposition unter-
mmen, die Figur des Mondes zu bestimmen. In seiner Auf-
llung ist jedoch ein Fehler. Er findet

$$\frac{h}{H}=\frac{M}{m}\cdot\frac{b}{B} \text{ statt } \frac{h}{H}=\left(\frac{M}{m}\right)^2\left(\frac{b}{B}\right)^2,$$

M die Masse der Erde, B die kleinere und $B+H$ die grössere
e derselben ist; m, h und $b+h$ bezeichnen ähnliche Grössen
den Mond. Auf diesen Fehler ist im Jahre 1768 von Paul
isi aufmerksam gemacht worden, er wurde aber weder vorher
ch nachher wieder erwähnt.

Glr. (O.)

C. HOUZEAU. Note additionnelle sur la mesure des distances de Venus au soleil, de centre en centre, pendant les passages de la planète. Bull. de Belg. (2) XXXIII. 453-497.

Antwort des Verfassers auf eine Kritik von Airy über die
aktischen Schwierigkeiten, welche die Construction eines Helio-
ters bieten würde, dessen Princip im vorigen Bande der Fort-
ıritte angegeben ist. (Siehe F. d. M. III. p. 559).

Mn. (Wn.)

KAISER. Berigt omtrent eenige der maatregeln, die genomen zyn ter waarneming van der overgang der planeet Venus voorby de Zonneschyf, op den 8sten December 1874. Versl. en Meded. Lesde deel. 98-116.

Kurze Notiz über die verschiedenen Methoden, die vor 1872
ır Berechnung der Sonnenparallaxe angewandt sind, und etwas

detaillirtere Angaben über die von den Astronomen ergriffenen Maassregeln, um den Vorübergang der Venus vor der Sonne am 8ten December 1874 mit möglichstem Nutzen beobachten zu können. Diese Angaben sind vorzugsweise für solche bestimmt, die sich nicht speciell mit Astronomie beschäftigen. Mn. (Wn.)

HOFMANN. Berechnung des Vorüberganges der Venus vor der Sonnenscheibe. Pr. Bayreuth.

Es wird in dieser Abhandlung die vollständige Berechnung aller Umstände eines Venusdurchganges mit elementaren Hülfsmitteln durchgeführt. Von Interesse ist es zu sehen, wie manche von ihrem Urheber in complicirter Form dargestellte Vorschrift sich in ein einfaches Gewand kleiden lässt. Gr.

C. FLAMMARION. Sur le temps que les planètes mettraient à tomber dans le soleil. Mondes (2) XXVII. 558-562.

C. SZILY. Encore un mot sur le temps que les planètes mettraient à tomber dans le soleil. Mondes (2) XXVII. 661-662.

Herr Flammarion hat in der obigen Notiz auf empirischem Wege die Formel $t = \frac{T}{\sqrt{32}}$ abgeleitet, wo t die Dauer des Falls eines Planeten bis zum Mittelpunkt der Sonne bezeichnet (vorausgesetzt, dass die Centrifugalkraft plötzlich Null würde), T die Umlaufszeit des betreffenden Planeten. Herr Szily sucht diesen Satz theoretisch zu beweisen, indem er von der allgemeinen Formel für den Fall auf der Sonne

$$t = \sqrt{\frac{2gr^2}{a}} = \tfrac{1}{2}a \arccos \frac{a-2x}{a} + \sqrt{ax-x^2}$$

ausgeht, wo t die Zeit des Falls für den Weg x, a die ursprüngliche Entfernung des Planeten, g die Schwere an der Oberfläche der Sonne, r den Radius derselben bezeichnet. O.

STUDIOSUS. Réclamation. Mondes (2) XXVII. 695-696.

Der Einsender, ein Italiener, bemerkt, dass der oben an-

;esprochene Satz sich bereits in Santini's Astronomie T. II. p. 60 nit ganz ähnlicher Ableitung findet. O.

Ch. MOLDENHAUER. Die Axendrehung der Weltkörper. Berlin, Weber.

Der Verfasser leitet folgenden Satz her: „Es verhalten sich lie Kuben der Rotationszeiten umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen.“ Die Herleitung beruht indess auf einer falschen Erklärung der Rotation der Planeten. O.

C. BUDDE. Ueber einige Folgerungen aus der heutigen Lehre vom Kosmos. Pogg. Ann. CXLV. 463-469.

O.

A. CAYLEY. On the graphical construction of a solar eclipse. Mem. of R. Astr. Soc. XXXIX. p. I, 1-17. 1871.

Die Abhandlung enthält die Erklärung der graphischen Construction einer Sonnenfinsterniss, welche nach dem Verfasser bequem und einer beträchtlichen Genauigkeit fähig ist; er glaubt, lass wenn sie mit einer Scala vom Radius = 12 Zoll gemacht wird, mit Hülfe derselben ein Diagramm construirt werden kann, wie die Finsterniss-Diagramme des „Nautical Almanac,“ mit wenigstens ebensoviel Genauigkeit, als es auf einem Diagramm n jener Scala ausgeführt werden kann.

Man stelle sich die Himmelskugel als vom Mittelpunkt der Erde aus in jedem Augenblick während der Finsterniss in solcher Weise stereographisch projicirt vor — der Radius des begrenzenden Kreises der projicirten Halbkugel sei gegeben —, dass der Mittelpunkt des Mondes immer auf dem Mittelpunkt M der Projection und der Nordpol N der Erde auf einem gegebenen Radius bleibt, indem seine Lage auf diesem Radius in variabler Entfernung ist. Wäre nun die Lage des Mittelpunktes der Sonne auch für jeden Augenblick auf der Projection eingetragen, wie um die Projection der relativen Sonnenbahn zu erhalten, so würde diese Bahn (welche nicht gezeichnet zu sein braucht) eine bestimmte kurze Linie sein, nahezu gerade und dem Mittelpunkt der Pro-

jection nahe liegend. Wenn die Lage der Sonne auf der relativen Bahn in einem Augenblick mit S' bezeichnet wird, so geht die gerade Linie MS' in der Projection des Bogens des grössten Kreises durch die Mittelpunkte von Mond und Sonne, so dass, wenn E die Winkelentfernung der Mittelpunkte ist, $\tang \frac{1}{2}E$ die Länge der Linie MS' ist. Nun verlängere man $S'M$ über den Mittelpunkt M bis zu einem Punkte Z, und betrachte Z als Darstellung eines Punktes auf der Oberfläche der Erde (die Methode, um die graphische Lage von Z zu bestimmen, wird erklärt). Ferner betrachte man Sonne und Mond als gesehen von Z; es möge dabei die parallactische Depression der Sonne vernachlässigt und dem Monde eine Verrückung gleich der Differenz der parallaktischen Verrückungen von Mond und Sonne beigelegt werden, d. h. man betrachte den Mittelpunkt des Mondes als herabgedrückt durch die Parallaxe in der Richtung des Bogens MS' durch einen Bogen $0{,}99837\,(\sigma'-\pi')\sin ZM$, wo $\sigma'-\pi'$ die Differenz der äquatorialen horizontalen Parallaxe zur Zeit der Finsterniss ist, und die Constante dem Nautical Almanac für 1836 entnommen ist. Wenn dann Q' so gewählt wird, dass seine Winkelentfernung von S' gleich der Summe der Winkelhalbmesser von Sonne und Mond ist, so ist der Ort von Q' sehr nahe ein Kreis um den Mittelpunkt S', und die entsprechenden Lagen von Z geben die Stellen auf der Erde, wo die Ränder in äusserer Berührung sind, d. h. sie geben die Halbschatten-Curve auf der Oberfläche der Erde für die Positionen S' der Sonne. Dies ist eine kurze Darstellung des Princips der Methode, die in der Abhandlung in einigen Punkten vereinfacht ist. Es wird nun gezeigt, wie die relative Bahn der Sonne durch eine erweiterte relative Bahn ersetzt werden kann und da man (um die geographischen Bezeichnungen der Figur zu gebrauchen) auf der Projection die Lage des Meridians von Greenwich, welche sich mit der Lage von S ändert, zeichnen muss, wird gezeigt, wie eine einzige vollständige Projection dazu benutzt werden kann. Die Art der Construction der relativen Bahn wird weitläufig auseinandergesetzt, und es wird bewiesen, dass die stereographische Projection der Halbschatten-Curve auf der Erdoberfläche (sowohl

die Projection als auch die durch die angenäherte Methode gegebene, die in der Abhandlung beschrieben ist) eine bicirculare Curve 4ten Grades ist. Die Arbeit schliesst mit praktischen Rathschlägen und einer Anwendung auf die Finsterniss vom 21. und 22. December 1870. Glr. (O.)

E. Soymié. Extension de l'octant à la mesure d'au moins 120° en practique et 180° en théorie. Mondes (2) XXVII. 652-653.

Beschreibung einer Modification des Octanten, um auch Winkel bis zu 120° zu messen. O.

A. Freeman. Graphic conversion of stellar coordinates. Monthl. Not. XXXIII. 18-23.

Der Verfasser setzt auseinander, wie man mit hinreichender Genauigkeit für eine gegebene Breite ein Diagramm construiren könne, welches die Stundenkreise und die Polardistanzkreise der sichtbaren Himmelskugel darstellt in ihrer Lage gegen die Verticalkreise und die Kreise gleicher Höhe. Glr. (O.)

J. G. Galle. Ueber das Nordlicht vom 4. Februar d. J. und über eine Methode zur Höhenbestimmung der Nordlichtstrahlen. Pogg. Ann. CXLVI. 133-148.

Ableitung von Formeln, um aus dem Abstand der Krone des Nordlichtes vom magnetischen Zenith des Beobachtungsortes und aus der scheinbaren Höhe eines Nordlichtstrahles die lineare Erhebung der Mitte und der Endpunkte des Strahls, sowie die lineare Länge desselben zu berechnen. Wn.

Y. Villarceau. Sur la constante de l'aberration et la vitesse de la lumière considérées dans leurs rapports avec le mouvement absolu de translation du système solaire. C. R. LXXV. 854-860.

Bei der Ableitung der Aberrationsconstante wird nur die Bewegung der Erde um die Sonne berücksichtigt, nicht die Bewegung des ganzen Sonnensystems im Weltenraume. Bei Berücksichtigung des letzteren ist die Aberration nicht mehr für alle Sterne

constant, sondern wird für jeden einzelnen Stern bestimmt durch die (ohne Beweis mitgetheilte) Formel:

$$\frac{K}{V} = \frac{1}{\frac{U}{V}\cos k + \sqrt{1 - \frac{U^2}{V^2}\sin^2 k}}$$

Darin ist V die Geschwindigkeit des Lichts, U die Translationsgeschwindigkeit des Sonnensystems, k der Winkel, den die Richtung des Sterns mit der absoluten Bewegung der Sonne bildet, K eine Constante, die von der Bewegung der Erde abhängt, so dass $\frac{K}{V}$ die Aberrationsconstante für $U = 0$ ist. Die Struve'schen Beobachtungen reichen nicht aus, zu entscheiden, ob U gegen V zu vernachlässigen ist, sondern dazu würden correspondirende Beobachtungen auf der südlichen Erdhälfte nöthig sein.

Wn.

G. SCHUBRING. Immerwährender Kalender. Giebel Z. (2) V. 452-458.

Die Arbeit ist ein Nachtrag zu der im vorigen Bande des Jahrbuchs p. 564 besprochenen. Sie enthält neben der Beschreibung eines weiteren Kalenders Berichtigungen und Zusätze zu der betreffenden Arbeit.

O.

A. SCHWARZ. Der jüdische Kalender astronomisch und historisch untersucht. Breslau 1872.

Den Inhalt dieses Werkes (nebenbei bemerkt, gekrönte Preisschrift) eingehend zu besprechen, dürfte sich vorläufig noch nicht empfehlen. Es hat nämlich ein Sachverständiger, der auch als Mathematiker durch verschiedene Arbeiten in Crelle's Journal bekannte Gelehrte Slonymski, gegen den uns hier allein interessirenden Theil jener Schrift in Geiger's „jüdischer Zeitschrift" gewichtige Einwendungen erhoben, welchen Herr Schwarz (Fränkel's Zeitschrift für Geschichte und Wissenschaft des Judenthums) in einer längeren Antikritik entgegnete. Es ist deshalb wohl angezeigt, das Referat im Zusammenhang mit den anderen genannten Artikeln auf das Jahr 1874 zu verschieben.

Gr.

Anhang.

G. Bellavitis. Seconda parte della XI° rivista di giornali. Att. d. Ist. Ven (4) I. 393-458.

Theil einer kritischen Uebersicht, welche der Verfasser in den Atti d. Ist. Ven. zu veröffentlichen pflegt. Bei den mathematischen Abhandlungen, welche allmählig besprochen werden, lässt der Verfasser in einigen Fällen der kritischen Besprechung ein Verzeichniss der Arbeiten folgen, welche mit Vortheil in denselben oder ähnlichen Gegenständen zur Orientirung benutzt werden können. Jg. (O.)

J. Worpitzky. Elemente der Mathematik für gelehrte Schulen und zum Selbststudium. Erstes Heft: Die Arithmetik. Zweites Heft: Algebra, Combinationslehre nebst Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kreisfunctionen nebst Trigonometrie. Berlin. Weidmann.

Das erste Heft behandelt nach einem einleitenden Kapitel über die Grössenlehre die sieben Operationen, zu deren vollständiger Erledigung die Theorie der Reihen, des binomischen Satzes und eine rein arithmetische Theorie der Kreisfunctionen mit hineingezogen sind, letztere hauptsächlich mit Rücksicht auf die Theorie des Imaginären. In einem Anhange werden die geometrischen Veranschaulichungen des Grössenbegriffs mit eingehender Berücksichtigung des Imaginären, in einem zweiten die numerischen Rechnungen besprochen. Aus dem Inhalte des zweiten Heftes ist hervorzuheben eine etwas erweiterte Definition

der reciproken Gleichungen als solcher, bei denen die Pr
je zweier zusammengehörigen Wurzeln einander gleich sin
sich wohl in weiteren Kreisen Eingang verschaffen dürf
sich dieser allgemeinere Fall fast ebenso einfach behandeln
wie die gewöhnlich in's Auge gefassten specielleren Fälle
sowohl in theoretischer Beziehung von Interesse, wie rücksi
der Anwendung z. B. zur Behandlung cubischer Gleich
äusserst bequem sind. An die allgemeine Theorie der alg
schen Gleichungen und die Näherungsmethoden zur Aufl
derselben sind Functionsbetrachtungen geknüpft (Maxima
Minima etc.) mit geometrischer und mechanischer Veran
lichung. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung geht selbstverstä
nicht über die Elemente hinaus. In der Trigonometrie, e
und sphärischen, welche wohl vorzugsweise aus einem prakti
Grunde mit in dies Heft gestellt ist, wird mehr als in a
Lehrbüchern betont, dass als unabhängige Variabeln der tri
metrischen Functionen der Arcus, also eine reine Zahl z
trachten sei. Die Durchführung des Systems der Trigono
verbindet in bemerkenswerther Weise die Anforderungen
retischer Durchsichtigkeit und Bestimmtheit und praktische
wendbarkeit, letztere namentlich durch die Einführung s
Hülfsgrössen, die für die Lösung der meisten Aufgaben di
quemsten sind, z. B. in der ebenen Trigonometrie walte
Tendenz vor, alle vorkommende Stücke durch $d (= 2r)$ un
Winkel auszudrücken, wodurch dem Schüler zugleich eine
brauchbare Handhabe zur Lösung von Aufgaben gegeben w

Das Buch weicht in wesentlichen Punkten bedeutend
dem Herkömmlichen ab, namentlich im ersten Hefte, auf wel
sich die folgenden Bemerkungen vorzugsweise beziehen.
formeller Hinsicht ist es das ausgesprochene Bestreben des
fassers, eine streng systematische Anordnung und streng wis
schaftliche Begründung zu geben, beides jedoch so, dass es
Fassungsgabe der Schüler, wenigstens derer auf der höch
Stufe nicht übersteigt, und sie nicht nur mit den Resultaten, s
dern auch mit der Zweckmässigkeit der Entwickelung, der e
geführten Begriffe und Begriffserweiterungen bekannt macht,

or allem den Zusammenhang der mathematischen Disciplinen
nter einander und mit der Wissenschaft überhaupt bekannt
nachen soll. Deshalb sind die Erfahrungen, die den Ausgangs-
unkt des mathematischen Denkens bilden, anfangs mit logischer
chärfe besprochen, und an jeder Stelle sind die nothwendigen
Begriffserweiterungen durch Definitionen bestimmt hervorgehoben,
nd die statt derselben häufig beliebten Scheinbeweise vermieden.
Nur an einigen Stellen scheint dem Referenten dies Princip nicht
anz streng durchgeführt, so namentlich § 4 I. und § 5 VI., wo
ie erste Definition der Grösse auch discontinuirliche Grössen ein-
chliesst, während die zweite, zusätzliche, dieselben ausschliesst,
nd § 29 IV A, wo bewiesen wird, dass ein Product gleich Null
st, wenn der Multiplicator es ist, obwohl die Operation des
Multiplicirens vorher nur für positive und negative Multiplica-
oren definirt ist, die Definition also auf den Multiplicator Null
rweitert werden müsste. Dagegen bildet die correcte Einführung
es Irrationalen einen wesentlichen Vorzug gegenüber andern
Darstellungen. Dieselbe geschieht im Anschluss an das Dividiren
gleichartiger Grössen, und es wird hierbei sofort der mathema-
ische Begriff des Unendlichen und des Grenzwerthes einer Ver-
änderlichen scharf festgestellt, nach dessen Einführung das Irra-
ionale keine Schwierigkeiten mehr bietet.

Was ferner den wissenschaftlichen Grundgedanken betrifft,
o ist der Ausgangspunkt des Verfassers der folgende: Der Ver-
asser definirt die Zahl als die Form einer Grösse, d. h. als die
Art, wie eine Grösse aus einer andern entsteht. Die Arithmetik
st ihm nun der Theil der Mathematik, in welchem man die
Grössen ohne Rücksicht auf ihre Qualität betrachtet, in welchem
lso die Zahl nur als operatives Hülfsmittel der Grössenbetrach-
ung erscheint, während die Zahlentheorie auch von dem Quantum
strahirt und nur die formellen Gesetze der Zahlen zum Objecte
t. (Es ist hier übrigens zu erinnern, dass aus der gegebenen
finition der Grösse nicht mit Nothwendigkeit hervorgeht, dass
r Quotient von zwei constanten gleichartigen Grössen endlich
in muss, was für des Verfassers Theorie des Unendlichen noth-
endig ist.) Von dem oben besprochenen Gesichtspunkte aus-

gehend betrachtet der Verfasser die vier ersten Operati
an Grössen vorgenommene. Erst nachdem in der Divi
Operationen des Theilens und Messens für sich behand
durch welche die Begriffe der gebrochenen und der irr
Zahl gewonnen werden, ist es möglich, alle gleichartigen
als Producte der Einheit mit einer Zahl darzustellen,
reelle Zahl kann nun nicht nur als operatives Zeichen (Multi
Exponent etc.), sondern auch als eine ideale, continuirlich
(ohne Qualität) betrachtet werden, wodurch für die f
drei Operationen eine bequeme Basis geschaffen ist. Di
fassung, consequenter durchgeführt, als in älteren Werk
einen Gegensatz bildend zu den meisten neueren, die
discreten Zahl ausgehen, scheint in der That den Vorzug
dienen, da durch sie der arithmetische Gedankenprocess
hervortritt, und die Anschauung in lebendiger Verbind
den Begriffen bleiben kann.

Beiläufig sei die Bezeichnung des Logarithmus $1\frac{a}{b}$
erwähnt, die der Verfasser vorschlägt und neben der ge
lichen anwendet. Dieselbe hat vor der ähnlichen im Mehl
Buche gewählten: $\underset{b}{\overset{a}{\times}}$ den Vortheil, auch für längere Nun
quem zu sein.

Wenn nun aus dieser Besprechung hervorgeht, dass F
den wissenschaftlichen Principien des Verfassers im Weser
zustimmt, und das Buch als ein dem angehenden Mathe
und dem Lehrer in vieler Hinsicht nützliches bezeichnen
so kann derselbe doch nicht verhehlen, dass dem ersten
unbeschadet des wesentlichen Inhaltes eine minder schwer
Form der äusseren Darstellung (Vgl. beispielsweise § 4,
dringend zu wünschen wäre, da es sich in der jetzigen (
schwerlich die Verbreitung erringen wird, die es aus sach
Gründen zu verdienen scheint. A

HELMES. Die Elementar - Mathematik. Recension d
Gött. Anz. 1872. 265.

E. NETOLICZKA. Repetitorium der mathematischen Physik. Graz.

CHEVALLIER et MÜNTZ. Problèmes de mathématiques avec leurs solutions développées. 8. Paris. Gauthier-Villars.

A. DE MORGAN. Budget of paradoxes. London 8⁰. Longmans. Hi.

G. BINDER. Ein falscher Satz. Hoffmann Z. III. 367-369.

Entdeckt in der Aufgabensammlung von Gandtner und Jungmans. H.

PICK. Ueber das Abtheilen grosser Zahlen. Hoffmann Z. III. 270-271.

Empfohlen wird das Abtheilen der Ziffern zu je 6 mit blossem Zwischenraum, von den Einern nach beiden Seiten hin, vor dem Decimalbruch ein Punkt oben; gegen Kober wird bemerkt, dass ein mathematisches Buch nicht „ohne Griffel in der Hand lesbar“ zu sein braucht und nicht ohne ihn gelesen werden soll. H.

VON DER HEYDEN. Das Rechenlineal ein an höheren Lehranstalten einzuführendes Unterrichtsmittel. Hoffmann Z. III. 336-346.

Das Rechenlineal, dessen Einrichtung und Gebrauch der Verfasser deutlich zu machen sich bemüht, obwohl Bestimmtheit des Ausdrucks vielfach zu vermissen ist, besteht im Wesentlichen aus 2 an einander verschiebbaren logarithmisch getheilten Maassstäben. Es wird gezeigt, wie man die Resultate von Multiplication, Division, Quadratwurzeln, Kubikwurzeln, sowie die combinirter Operationen etwa bis auf 4 Stellen daran ablesen kann. Das Instrument sei überall in Frankreich, aber noch nirgends in Deutschland gekannt, und sehr wohl bei solchem Unterricht zu verwenden, wo das Rechnen nicht Gegenstand, sondern Mittel ist, z. B. bei der Chemie. H.

HAMMER, ZERLANG, SCHERLING. Bemerkungen zu Aufsätzen dieser Zeitschrift. Hoffmann Z. III. 457-464.

Ohne allgemeines Interesse. H.

J. C. V. Hoffmann. Zu dem Capitel von den rectheiten. Hoffmann Z. III. 375-377.

An Incorrectheiten sind nur einzeln vorgekommene e Unter Vorschlägen ist vielleicht zu nennen die Bezeichnui für concaven, $\overset{\vee}{AOB}$ für convexen Winkel.

A. Kuckuck. Das Rechnen mit decimalen Zahl besonderer Berücksichtigung des abgekürzten Rec Berlin. Weidmann.

Da die Werthschätzung der Decimalbruchrechnung ei neuster Zeit datirt, so mag der Verfasser wohl Grund die gewiss unbestrittene Sache besonders zu betonen, da Decimalbruch im Unterricht nicht als Specialisirung au gemeinen Bruch, sondern als Erweiterung direct aus den malen Zahlensystem abgeleitet werden muss. Diese Auff ist dann auch maassgebend für die durchweg naturgemäs thode, nach welcher das Buch mit exacter Wissenschaftli und genügender Ausführlichkeit bearbeitet ist. Es umfas 4 Species, geht sehr bald zu den abgekürzten und unge Decimalbrüchen und abgekürzten Rechnungen über, und be sichtigt sorgfältig die Beurtheilung des Fehlers. Als ein griff in der Benennung lässt es sich nur bezeichnen, das Verfasser statuirt, die Summe verschieden benannter Zahlen, 6 Zehner und 7 Einer, sei nicht eine Zahl, sondern werd erst nach Reduction. Hiernach soll also eine Summe schon handen sein, ehe eine Addition möglich ist. Dies beruht a scheinlich auf einer Verwechselung: die Summe ist nicht erst Mehrheit von Zahlen, nachher eine, sondern erst eine pr matische (unbekannte), dann eine bekannte Zahl. H.

G. A. Vorstermann van Oijen. Theorie der Allgem Rekenkunde. Erste Deel. Tweede, vermeerderde druk. Si hoven, van Nooten.

Dieser erste Theil einer allgemeinen Arithmetik enthäl Theorie der 7 Grundoperationen in unbenannten Zahlen. I

›ssen Vorzug vor anderen Arbeiten dürften die consequent durch-
führten geschichtlichen Nachweisungen für die Ursprünge der
zelnen Sätze und Bezeichnungsarten bilden. Ce.

Catalan. Nouvelle formule d'intérêt composé.
J. d. Act. Fr. I.

Diese sehr merkwürdige Formel nimmt die Zinsen nicht pro-
·tional der Zeit an. Die Zinsen y von 1 Franc nach n Jah-
ı sind:

$$y = p\left[e - \left(1 + \frac{n}{100}\right)^{\frac{100}{n}}\right]$$

$$p'\cdot\left[e - \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}\right] = \text{dem Zinsfuss.}$$

sind die in p enthaltenen Ganzen. Der Verfasser hat y be-
:hnet für $p = 4$, $n =$ (1 bis 10), 10, 500, 1000, ∞. Für
< 20 ist y nahe proportional n, aber es convergirt mit wach-
ıdem n ziemlich schnell gegen eine ziemlich kleine Grenze.
Mn. (Wn.)

. Ligowski. Erklärungen und Formeln der Astronomie.
Kiel. Toeche.

Separatabdruck des ersten und zweiten Anhanges aus der
ımlung fünfstelliger logarithmischer, trigonometrischer, nauti-
∍r und astronomischer Tabellen. Im ersten Anhang wird die
tische Astronomie behandelt, während der zweite eine Zu-
menstellung trigonometrischer Formeln enthält. Ableitungen
Formeln sind nicht gegeben. O.

Bremiker. Logarithmisch - trigonometrische Tafeln
mit fünf Decimalstellen. Berlin. Weidmann.

Die Tafeln sind in derselben Weise geordnet, wie die sie-
stelligen von Vega, die in demselben Verlage erscheinen.
trigonometrischen Tafeln unterscheiden sich jedoch dadurch,
s der Grad in hundert Theile getheilt ist. Beigefügt ist in
ge dessen eine Tafel zur Umrechnung der Minuten und Se-
ıden des Winkels in die hunderttheilige Theilung. Es folgen

dann noch Tafeln zur Bestimmung der Zeit nach Sonnenhöh und endlich eine Uebersicht über die Zeit- und Festrechnu nebst den wesentlichen Constanten. O.

O. SCHLÖMILCH. Fünfstellige logarithmische und trig nometrische Tafeln. Braunschweig, Vieweg.

Die neue Auflage ist speciell für Schulen berechnet, d. möglichst billig hergestellt. Das ist nicht ohne nachtheilig Einfluss auf die äussere Ausstattung abgegangen, was bei Lo rithmentafeln wohl in's Gewicht fällt. Noch weniger empfehle werth aber dürfte es sein, dass in Folge dessen auch die Sam lung von Constanten und die Gebrauchsanweisung fortgefall sind. Im Uebrigen ist die Anordnung dieselbe, wie in d früheren Auflagen geblieben. O.

V. VASSAL. Nouvelles tables donnant avec cinq déc males les logarithmes vulgaires et naturels des nombr de 1 à 10800 et les fonctions circulaires et hyperboli ques pour tous les degrés du quart de cercle de mi nute en minute. 4°. Gauthier-Villars.

LALANDE. Tables de logarithmes pour les nombres et les sinus à cinq décimales, revues par le baron Rey- naud. Édition augmentée de formules pour la résolu- tion des triangles par M. Bailleul, et d'une nouvelle introduction. 18° Paris, Gauthier-Villars.

LALANDE. Tables de logarithmes étendues à sept déci- males par M. Marie, précedées d'une instruction par le baron Reynaud. Nouvelle édition augmentée de formules pour la résolution des triangles par M. Bailleul. 12°. Paris, Gauthier-Villars.

J. W. L. GLAISHER. Pineto's table of ten-figure loga- rithms of numbers. Messenger (2) II. 44-48.

Beschreibung der Methode, die Herr Pineto in seinen „Tables

le logarithmes vulgaires à dix décimales construites d'après un ıouveau principe" St. Pétersb. 1871 giebt, und allgemeine Bemerkung über diese Art von Logarithmentafeln und ihre Nützichkeit.

Glr. (O.)

]. BABBAGE. Table of logarithms of natural number 1 to 108000. London. 8°. Spon.

Hi.

[. INMAN. Nautical tables. London. 8°. Trübner.

Hi.

Namenregister.

Berichtigungen.

Seite 101, Zeile 10, ist nach dem Worte „folgendem“ einzuschalten: schon früher von Hoppe (Grunert Arch. XXVI.) publicirten,

Seite 107, Z. 1 v. o. statt „F. St.“ lies M.

Seite 208, Z. 10 v. u. statt „Function φ“ lies „Function φ und ψ“.

Seite 218, Z. 13 v. o. statt $2\frac{\lambda n_2 - \mu n_3}{n_1 n_2}\omega'$ lies $2\frac{\lambda n_2 - \mu n_3}{n_1 n_2}\omega$.

Seite 220, Z. 17 v. o. statt „das“ lies „dass“.

Seite 271, Z. 19 v. o. statt „C_n“ lies „C_h“.

Seite 271, Z. 21 v. o. statt „einer“ lies „eine“.

Seite 298, Z. 11 v. o. statt „Indice“ lies „Index“.

Seite 360, Z. 3 v. u. statt „Nonv.“ lies „Nouv.“.

